مکانیک کلاسیک میدان ها

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

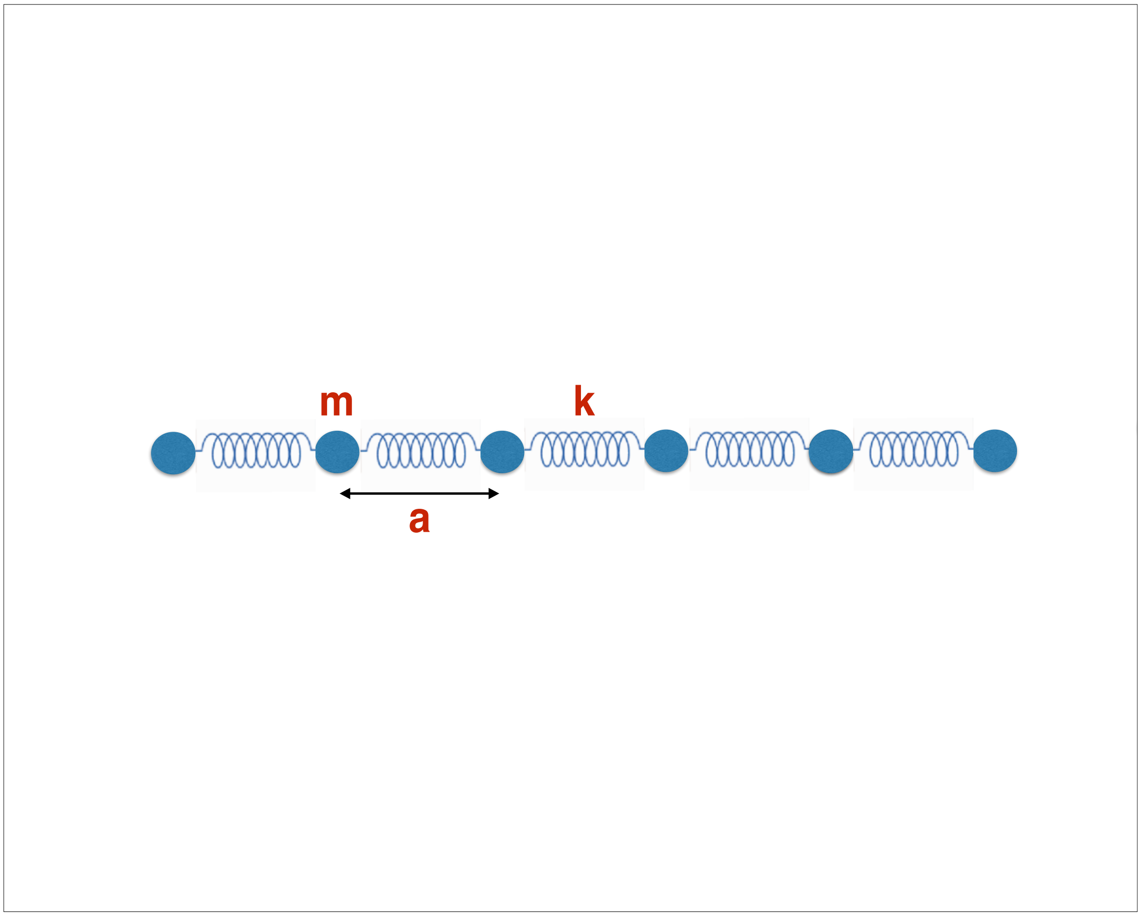
۶ آبان ۱۳۹۶

۱ مقدمه

فرض ما این است که خواننده این فصل با صورت بندی لاگرانژی و هامیلتونی از مکانیک ذرات و مکانیک میدان ها آشناست. در چنین صورتی وی می تواند مستقیما به سراغ فصل بعد برود بدون اینکه چیزی از دست بدهد. بنابراین مطالب این دو فصل درکلاس تدریس نخواهند شد. اگر خواننده با چنین صورت بندی ای آشنا نیست می بایست نخست فصل قبلی را مطالعه کند و سپس این فصل را بیاموزد. در این درس آنچه را که در مورد سیستم های با درجات آزادی گسسته می دانیم به سیستم های با درجات آزادی پیوسته یعنی میدان ها تعمیم می دهیم. خواهیم دید که فرمالیزم پدیدار شده یعنی نظریه میدان های کلاسیک از خیلی جهات تعمیم سرراستی است از مکانیک کلاسیک برای سیستم های گسسته . اما در نهایت میدان های کلاسیک دارای ساختار بسیار غنی تری هستند.

در درس گذشته یک سیستم از جرم و فنر را مطالعه کردیم: شکل ؟؟.

گفتیم که « این دستگاه مدل ساده ای از اتم های یک جامد یک بعدی است. از دید میکروسکوپی جامد خیلی پیچیده تر از یک سیستم جرم و فنر است اما این مدل به عنوان تقریب اولیه خیلی خوب است. خیلی از خصوصیات یک جامد مثل ظرفیت گرمایی ویژه اش یا قابلیت اش را برای انتشار صوت یا دیگر خواص مکانیکی اش را می توان با چنین مدل ساده ای توضیح داد و لازم نیست نگران جزییات میکروسکوپی و اتمی جامد باشیم. » اما وقتی که می خواهیم خصوصیات این جامد را مثلا برای انتشار صوت و یا نظایران توضیح دهیم اصولاً حتی لازم نیست به ساختارگسسته آن فکر کنیم زیرا هر تغییر فیزیکی و هر نوع مشاهده ای در مقیاسی صورت می گیرد که شامل هزاران و حتی میلیون ها اتم است.



شکل ۱: یک سیستم از جرم های یکسان و فنر های یکسان.

در چنین مقیاسی ساختار گسسته این شبکه و ساختار گسسته نوسانات اصلا دیده نمی شوند و توضیح رفتار چنین جامدی بر اساس حرکت اتم هایش کار بیهوده ای است، مثل این است که بخواهیم حرکت یک رودخانه را بر اساس حرکت تک تک مولکولهای اب درون آن توضیح دهیم. در چنین شرایطی هم برای توصیف شبکه و هم برای توصیف جابجایی اتم ها متغیرهای پیوسته زیر را به کار می بریم:

$$n \longrightarrow x = na, \qquad q_n \longrightarrow a^{\frac{1}{2}}\phi(x), \qquad q_{n+1} - q_n \longrightarrow a^{\frac{3}{2}}\partial_x\phi(x), \qquad \sum_{n=1}^{N} \longrightarrow \frac{1}{a}\int dx. \tag{۱}$$

به این ترتیب متغیرهای گسسته را به یک میدان پیوسته تبدیل کرده ایم و لاگرانژی میدان به صورت زیر در می آید:

$$L = \int_0^L \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}), \qquad \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{k_s a^2}{2}(\partial_x \phi)^2. \tag{۲}$$

هم چنین تکانه ها در این حد به صورت زیر در می آیند:

$$p_n \longrightarrow a^{\frac{1}{2}}\pi(x). \tag{۳}$$

در نتیجه روابط کروشه پوآسون به صورت زیر در می آید:

$$\{\phi(x), \pi(y)\} = \lim_{a \longrightarrow 0} \frac{1}{a}\delta_{na,ma} = \delta(x-y). \tag{۴}$$

هامیلتونی نیز به صورت زیر در می آید:

$$H = \int_0^L \mathcal{H}(\phi, \pi), \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2m}\pi^2 + \frac{k_s a^2}{2}(\partial_x \phi)^2. \tag{۵}$$

در این مثال سیستمی را بررسی کرده ایم که به دلیل مقیاسی که آن را مشاهده کرده ایم به صورت یک میدان پیوسته درآمد. بعضی اوقات هم با سیستم هایی سروکار داریم که از ابتدا پیوسته هستند و متغیرهای دینامیکی آنها میدان هستند. ساده ترین میدان کلاسیک یک طناب کشسان است که در یک بعد به صورت عرضی نوسان می کند. فرض کنید که طناب بین دو نقطه با مختصات $x = 0$ و $x = L$ بسته شده است. در این صورت جابجایی طناب در نقطه x را با $\phi(x)$ و سرعت جابجایی آن را در این نقطه با $\dot{\phi}(x)$ نشان می دهیم. در این جا x خودش یک متغیر دینامیکی نیست، بلکه تنها پارامتری است که متغیرهای دینامیکی پیوسته یعنی $\phi(x)$ و $\dot{\phi}(x)$ را مشخص می کند. یک نمونه دیگر از میدان وقتی است که به جای طناب کشسان یک غشای کشسان را بررسی می کنیم. در این صورت متغیر های دینامیکی این سیستم میدان $\phi(x,y)$ و $\dot{\phi}(x,y)$ هستند.

ما در این درس با انواع مختلفی از میدان ها روبرو خواهیم شد، مثل میدان اسکالر، میدان برداری و نظایر آن . تفاوت این میدان ها در تعداد مولفه های آنها و مهم تر از آن در خواص تقارنی آنهاست. آنچه که در زیر می آید که مربوط به اصول کلی دینامیک حاکم بر این میدان هاست، کاملا کلی است و برای همه این میدان ها به کار می رود.

برای ادامه خواننده می بایست با مفهوم تابعی [۱] که در ضمیمه معرفی شده است آشنا شود.

---

[۱] Functional

۲ صورت بندی لاگرانژی برای میدان های کلاسیک

تاکنون با دستگاه هایی سروکار داشتیم که تعداد درجات آزادی آنها محدود و یا شمارش پذیر بود. دراین قسمت صورت بندی های لاگرانژی و هامیلتونی را به دستگاه هایی که تعداد درجات آزادی آنها پیوسته است تعمیم می دهیم. نخستین گام دراین راه آن است که شاخص متغیر های مکانی را از i که یاد آور گسسته بودن شاخص هاست به یک پارامتر پیوسته (نوع این پارامتر هر چه که می خواهد باشد) تعمیم دهیم. ازآنجا که این دستگاه ها نوعاً دستگاههایی هستند که درآنها متغیرهای دینامیکی شکل یک میدان پیوسته در فضا را دارند طبیعی ترین شاخصی که می توان بکار برد همان شاخص فضایی یعنی $\mathbf{x}$ است و متغیرهای دینامیکی را نیز بجای q_i با $\phi(\mathbf{x})$ نشان خواهیم داد. دراین جا باید دقت کنیم که خود $\mathbf{x}$ دیگر یک متغیر دینامیکی نیست بلکه پارامتری است که متغیر های دینامیکی متفاوت را نشان می دهد. متغیر های دینامیکی $\{\phi(\mathbf{x_1}),\phi(\mathbf{x_2}),\phi(\mathbf{x_3}),\cdots\cdots\}$ هستند که درآنها پارامتر $\{\mathbf{x}\}$ یک پارامتر پیوسته است. بنابراین پیکربندی دستگاه درهر لحظه با یک جفت میدانِ $\{\phi(\mathbf{x}),\dot{\phi}(\mathbf{x})\}$ مشخص می شود. برای چنین دستگاه هایی فضای پیکر بندی یک فضای بی نهایت بزرگ است که مجموعه همه میدان های قابل تصور $\{\phi,\dot{\phi}\}$ را شامل می شود. هر نقطه از این فضای پیکر بندی یک وضعیت میدان را نشان می دهد.

تذکر مهم: دقت کنید که $\phi(x)$ و $\dot{\phi}(x)$ دو میدان مستقل هستند که هیچ نوع بستگی زمانی ندارند و تنها در روی مسیر حرکت است که این دو بستگی زمانی پیدا کرده و می توان نوشت: $\dot{\phi}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)$.

دینامیک یک میدان نیز یک مسیر مشخص دراین فضای پیکر بندی است که با دردست داشتن شرایط اولیه یک نقطه معین $\{\phi_0(x),\dot{\phi}_0(x)\}$ و معادلات حرکت به طور یکتا مشخص می شود. برای گذار از حالت گسسته به حالت پیوسته می توان جایگزینی های مناسبی را به ترتیب زیر بکار برد:

$$i \longrightarrow \mathbf{x} \tag{۶}$$

$$q_i \longrightarrow \phi(\mathbf{x}) \qquad\qquad \dot{q}_i \longrightarrow \dot{\phi}(\mathbf{x}) \tag{۷}$$

$$S[q_1,q_2,\cdots q_N] \longrightarrow S[\phi] \tag{۸}$$

$$L(q_1,\cdots q_N,\dot{q}_1,\cdots \dot{q}_N) \longrightarrow L[\phi,\dot{\phi}] \tag{۹}$$

$$p_i \longrightarrow \pi(\mathbf{x}) \tag{۱۰}$$

دقت کنید که در سطر سوم S به عنوان یک تابعی از مسیرهای $[q_1, q_2, \cdots q_N]$ نوشته شده است. یعنی با در دست داشتن مسیرها یا توابع $q_1(t), q_2(t), \cdots q_N(t)$ کنش S نیز مشخص می شود. با گذار به حالت پیوسته S یک تابعی از میدان $\phi(x,t)$ می شود که آن را به صورت $S[\phi]$ می نویسیم.

به یک نکته مهم دیگر نیز باید دقت کنیم و آن اینکه کنش یک تابعی از مسیر است به همین دلیل آن را به صورت $S[\phi]$ می نویسیم که روی این امر تاکید کنیم ولی لاگرانژی یک تابعی از دو تابع ϕ و $\dot{\phi}$ است، به همین دلیل آن را به صورت $L[\phi, \dot{\phi}]$ می نویسیم. نهایتاً خواهیم داشت:

$$S[\phi] = \int dt L[\phi, \dot{\phi}]. \qquad (۱۱)$$

تقریبا در همه موارد لاگرانژی به صورت انتگرال از یک تابع موضعی نوشته می شود که چگالی لاگرانژی خوانده می شود. بنابراین داریم:

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}), \partial\phi(x), \cdots, \dot{\phi}(\mathbf{x})) \qquad (۱۲)$$

که در آن $\cdots$ به معنای مشتق های بالاتر از میدان ϕ است. دراین جا باید دقت کنیم که خود لاگرانژی یک تابعی از میدان های $\phi, \dot{\phi}$ و چگالی لاگرانژی یک تابع از مقادیر میدان درنقطه $\mathbf{x}$ یعنی یک تابع معمولی از متغیر های $\phi(\mathbf{x}), \partial\phi(x), \cdots, \dot{\phi}(\mathbf{x})$ است. هم چنین کنش نیز یک تابعی از میدان ϕ می شود یعنی :

$$S[\phi] = \int dt L[\phi, \dot{\phi}] = \int dt dx \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}), \partial\phi(x), \cdots, \dot{\phi}(\mathbf{x})) \qquad (۱۳)$$

۱.۲ معادله حرکت

تعمیم سرراست آنچه که در مکانیک کلاسیک سیستم های گسسته داشتیم به صورت زیر است: در لحظه t_1 میدان به شکل $\phi_1(x)$ است. در لحظه t_2 میدان به شکل $\phi_2(x)$ در آمده است. از چه مسیری میدان این تحول را طی کرده است. یعنی چه نوع تحولی به صورت $\phi(x,t)$ طی شده است که در آن $\phi(x,t_1) = \phi_1(x)$ بوده و سپس به $\phi(x,t_2) = \phi_2(x)$ در آمده است. اصل برهم کنش می گوید که از میان همه مسیرها ی $\phi(x,t)$ که ابتدا و انتهای آنها بر میدان های فوق منطبق بوده است مسیری طی شده که مقدار کنش را اکسترمم کرده باشد. اگر مسیر حرکت کلاسیک را با $\phi_{cl}(x,t)$ نشان دهیم آنگاه یک مسیر در اطراف این حل را به صورت $\phi_{cl}(x,t) + \epsilon\eta(x,t)$ نشان می دهیم که در آن $\eta(x,t)$ یک مسیر دلخواه و ϵ یک پارامتر کوچک است. این شرط نیز وجود دارد که $\eta(x,t_1) = \eta(x,t_2) = 0$ است زیرا قرار است که ابتدا و انتهای مسیرها همه بر هم منطبق باشند. در این صورت اصل کمترین عمل می گوید که

$$S[\phi_{cl} + \epsilon\eta] = S[\phi_{cl}] + O(\epsilon^2), \qquad \forall\ \eta. \qquad (۱۴)$$

این عبارت به معنای این است که مسیر حرکت کلاسیک مسیری است که مشتق تابعی کنش روی آن صفر است . به عبارت دیگر داریم:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi(x,t)}\ |_{\phi_{cl}} = 0. \tag{۱۵}$$

■ مسئله یک : با توجه به اینکه کنش انتگرال لاگرانژی است، یعنی رابطه (۱۱) نشان دهید که مسیر حرکت کلاسیک یعنی معادله حرکت میدان کلاسیک از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\frac{\delta L}{\delta\phi(x)} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)} = 0. \tag{۱۶}$$

ممکن است که کنش شامل چند میدان مستقل باشد. به عنوان مثال کنش می تواند شامل یک میدان برداری A_μ باشد که در این صورت هر کدام از مولفه های آن یک میدان مستقل محسوب می شوند یا اینکه کنش می تواند شامل میدان های اسکالر متفاوت مثل $\phi,\ \psi$ و نظایر آن باشد. در این صورت اصل کمترین عمل به صورت بدیهی تعمیم پیدا می کند. فرض کنید که میدان یک تابعی از میدان های متفاوت باشد که آنها را برای یکنواختی با $\phi^a, \quad a = 1, \cdots n$ نشان می دهیم:

$$S = S[\phi^1, \phi^2, \cdots \phi^n] = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\phi^1, \dot{\phi}^1, \cdots \phi^n, \dot{\phi}^n], \tag{۱۷}$$

یا به اختصار

$$S = S[\{\phi^a\}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\{\phi^a, \dot{\phi}^a\}]. \tag{۱۸}$$

در این صورت بازهم اصل کمترین عمل بیان می کند که برای آنکه میدان ها از شکل $\phi^a{}_1(x) := \phi^a(x,t_1)$ در زمان t_1 به شکل $\phi^a{}_2(x) := \phi^a(x,t_2)$ در زمان t_2 در آیند مسیر کلاسیکی را طی می کنند که کنش را اکسترمم می کند. یعنی

$$S[\{\phi^a{}_{cl} + \epsilon\eta^a\}] = S[\{\phi^a{}_{cl}\}] + O(\epsilon^2), \qquad \forall\ \eta^a(x,t). \tag{۱۹}$$

که به معنای این است که مسیر کلاسیک میدان ها از معادلات حرکت زیر بدست می آید:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi^a(x,t)}\ |_{\phi^a_{cl}} = 0, \qquad a = 1,\ 2,\ 3, \cdots n. \tag{۲۰}$$

■ مسئله دو : از رابطه (۲۰) نشان دهید که وقتی چند میدان داریم، مسیر حرکت کلاسیک یعنی معادله حرکت میدانهای کلاسیک از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\frac{\delta L}{\delta\phi^a(x)} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}^a(x)} = 0, \qquad a = 1,\ 2,\ 3 \cdots n. \tag{۲۱}$$

می توان معادله حرکت را برحسب چگالی لاگرانژی نیز نوشت.

■ مسئله سه: در هرکدام از موارد زیر از معادله ۲۱ استفاده‌کنید و معادله حرکت را بر حسب چگالی لاگرانژی بنویسید. در تمام این روابط انتگرال روی فضای D بعدی‌گرفته شده است. هم چنین نمادهای خلاصه و معمول زیر به‌کار رفته است:

$$\phi_i := \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \qquad\qquad \phi_{i,j} := \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j}$$

:

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^D x \mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi, \dot{\phi}) \tag{۲۲}$$

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^D x \mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi, \partial_i \partial_j \phi, \dot{\phi}) \tag{۲۳}$$

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^D x \mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi, \partial_i \dot{\phi}, \dot{\phi}). \tag{۲۴}$$

برای وقتی‌که چگالی لاگرانژی تابعی از میدان و مشتقات درجه اول آن است یعنی برای وقتی‌که $\mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}), \partial\phi(x), \dot{\phi}(\mathbf{x})$ می توان با محاسبه مشتق های تابعی فوق معادله حرکت را به شکل زیر نوشت :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu(x)} = 0 \tag{۲۵}$$

■ مسئله چهار: در هرکدام از موارد زیر از معادله ۲۲ استفاده‌کنید و معادله حرکت را بدست آورید. در روابط زیر از نماد

$$\partial_0 \phi := \dot{\phi}$$

و هم چنین نمادگذاری نسبیتی به معنای

$$x^\mu := (x^0 = ct,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \qquad\qquad x_m := (x^0,\ -x^1,\ -x^2,\ -x^3) \tag{۲۶}$$

و

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad\qquad \partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{۲۷}$$

و

$$A_\mu = \eta_{\mu,\nu} A^\nu, \tag{۲۸}$$

و

$$A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

استفاده کرده ایم.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \lambda \phi^4, \quad (۲۹)$$

$$\mathcal{L} = m\phi\phi^* + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \lambda(\phi\phi^* - a^2)^2, \quad (۳۰)$$

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} F_{\mu,\nu} F^{\mu,\nu} + J^\mu A_\mu, \quad (۳۱)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\phi^2 + \frac{1}{2} M\psi^2 + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + \lambda \sin(\phi\psi)^2. \quad (۳۲)$$

(۳۳)

در این روابط A_μ یک میدان برداری نسبیتی است. هم چنین $F_{\mu,\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

- مسئله پنج: لاگرانژی زیر را که مربوط به یک میدان اسکالر در $1+1$ بعد است، را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2}(\phi_t^2 - \phi_x^2) - 1 + \cos\phi. \quad (۳۴)$$

این لاگرانژی به لاگرانژی $Sine - Gordon$ مشهور است.

الف: معادله حرکت میدان را بدست آورید.

ب: نشان دهید که میدان زیر در معادله فوق صدق می کند:

$$\phi(x,t) = 4\arctan e^{\gamma(x - vt)} \quad (۳۵)$$

که در آن $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-v^2}}$. اصطلاحاً گفته می شود که این حل دربردارنده یک سالیتون [۲] است. سالیتون به معنای یک نوع برآمدگی در یک محیط است که شکل خود را ضمن حرکت حفظ می کند. درستی این موضوع را تحقیق کنید.

- مسئله شش: بردار سه مولفه ای $\mathbf{S}$ را که طول آن ثابت و برابر با 1 است در نظر بگیرید. حال میدان $\mathbf{S}(x)$ را در فضا زمان چهار بعدی در نظر بگیرید که لاگرانژی زیر دینامیک آن را توصیف می کند.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \mathbf{S} \cdot \partial^\mu \mathbf{S}. \quad (۳۶)$$

[۲] Soliton

معادله حرکت حاکم بر این میدان را بدست آورید.

۳ صورت بندی هامیلتونی برای میدان های کلاسیک

اکنون که با صورت بندی لاگرانژی برای میدان ها آشنا شده ایم تدوین صورت بندی هامیلتونی با توجه به آنچه که برای دستگاه های گسسته دیده ایم ساده است. نخست می بایست تکانه تعمیم یافته را به صورت مشتق تابعی لاگرانژی تعریف کنیم:

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)}. \tag{۳۷}$$

سپس می توانیم هامیلتونی را بنویسیم:

$$H = \int d^D x \dot{\phi(x)} \pi(x) - L = \int d^n x (\dot{\phi(x)} \pi(x) - \mathcal{L}), \tag{۳۸}$$

که در آن D بعد فضاست.

- تمرین: δH را محاسبه کنید و نشان دهید که اولا H یک تابعی از $\phi(x)$ و $\pi(x)$ است. ثانیا نشان دهید که

$$\dot{\phi}(x,t) = \frac{\delta H}{\delta \pi(x)} \qquad \dot{\pi}(x,t) = -\frac{\delta H}{\delta \phi(x)} \tag{۳۹}$$

دقت کنید که تا پیش از این $\pi(x)$ و $\phi(x)$ دو میدان مستقل (یا دو متغیر مستقل) در فضای فاز میدان ها بودند. اما در روی مسیر حرکت آنها بستگی زمانی مشخصی دارند و به همین دلیل است که در عبارت های بالا بستگی صریح به زمان را نشان داده ایم.

- مسئله هفت: برای لاگرانژی های توصیف شده در مسئله چهار، هامیلتونی را بدست آورید و سپس با استفاده از آن معادلات حرکت میدان را تعیین کنید. این معادلات می بایست دقیقا با معادلاتی که از لاگرانژی بدست می آورید یکسان باشند.

۱.۳ کروشه پوآسون

برای هر دو مشاهده پذیر F, G یعنی هر دو تابعی که روی فضای فاز بی نهایت بعدی با مختصات موضعی (ϕ, π) تعریف شده اند کروشه پواسون به شکل زیر تعریف می شود:

$$\{F, G\} = \int d^n x \left(\frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi(x)} \right) \tag{۴۰}$$

از روابط بالا نتیجه می شود:

$$\{\phi(x), \phi(x')\} = 0$$
$$\{\pi(x), \pi(x')\} = 0$$
$$\{\phi(x), \pi(x')\} = \delta(x - x') \quad (۴۱)$$

و

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} \qquad \dot{\pi} = \{\pi, H\} \quad (۴۲)$$

و سرانجام برای هر مشاهده پذیر F درفضای فاز خواهیم داشت:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}. \quad (۴۳)$$

۴ نمونه هایی از میدان های کلاسیک

هر نظریه میدان اصطلاحاً با محتوای میدانی آن [۳] و لاگرانژی اش مشخص می شود. منظور از محتوی میدانی این است که بگوییم با چه نوع میدان هایی (اسکالر، برداری، حقیقی یا مختلط، یا چند مولفه ای...) سر و کار داریم. لاگرانژی نیز معین می کند که این میدان ها چگونه با هم برهم کنش می کنند. برای این که نوع لاگرانژی را تعیین کنیم مهم ترین اصل راهنما تقارن است و البته همراه با آن توجه به خصلت های کلی و فیزیکی ای که از سیستم فیزیکی خود می شناسیم. مثلا اغلب اوقات می دانیم که سیستم فیزیکی ما دارای تقارن انتقالی و دورانی است. بنابراین از نوشتن جملاتی در لاگرانژی که این تقارن ها را نقض می کنند پرهیز می کنیم. مثلا لاگرانژی زیر

$$L = \int dx \, (... + g(x)\phi(x) + ...) \quad (۴۴)$$

[۳] Field Content

که در آن $g(x)$ یک تابع ثابت و وابسته به مکان است حتما تقارن انتقالی را نقض می‌کنند. یا جملاتی مثل $\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x}$

در حال حاضر ما یک شناخت مقدماتی از میدان های اسکالر و برداری و نظایر آن داریم ولی بعدها که دانش بیشتری در باره تقارن بدست آوریم می توانیم از انواع دیگری از میدان ها نیز سخن بگوییم. در عوض لاگرانژی زیر یک لاگرانژی است که هم تقارن دورانی دارد و هم تقارن انتقالی:

$$L = \int d^D x \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}(x) \cdot \dot{\phi}(x) - \nabla\phi(x) \cdot \nabla\phi(x) + m^2 \phi(x)^2 \right) + g\phi(x)^4. \quad (۴۵)$$

۵ تقارن و قوانین بقا برای میدان ها

تاکنون آموخته ایم که هر نظریه میدانی با لاگرانژی یا باکنش اش مشخص می شود. لاگرانژی بیان می‌کند که چه میدان هایی با چه مشخصاتی در نظریه شرکت دارند و چگونه باهم برهم‌کنش می‌کنند. لاگرانژی معادلات حرکت میدان ها را نیز مشخص می‌کند. البته عموما حل معادلات حرکت جز در موارد خیلی ساده بسیار دشوار و یا حتی غیر ممکن است. با این وجود می توان بدون حل این معادلات تنها با نگاه به لاگرانژی و توجه به تقارن های آن کمیت های پایسته را بدست آورد. کمیت های پایسته کمیت هایی هستند که مقدارشان در طول زمان، هر چقدر هم که دینامیک پیچیده ای بر یک سیستم حاکم باشد، ثابت باقی می ماند. آنچه که مهم است این است که یک رابطه ساده و یک به یک بین تقارن های پیوسته لاگرانژی و کمیت های پایسته برقرار است. هر چقدر که لاگرانژی تقارن های بیشتری داشته باشد کمیت های پایسته بیشتری نیز وجود خواهند داشت. به همان دلیل که حل کردن معادلات حرکت سخت است پیدا کردن کمیت های پایسته از روی معادلات حرکت نیز سخت است یعنی براحتی نمی توان از روی معادلات حرکت تشخیص داد که چه کمیت هایی پایسته هستند. اما یک قضیه وجود دارد که به ما نشان می دهد چگونه به طور مستقیم، تنها با شناختی که از تقارن های یک نظریه میدان داریم، کمیت های پایسته را بدست آوریم. این قضیه به نام ریاضیدان مشهور نیمه اول قرن بیستم، قضیه نوتر [۴] خوانده می شود. خواننده قبل از ان که ادامه این فصل را بخواند می بایست خود را با مفاهیم تقارن و نظریه گروه آنچنانکه در فاصل های پیشین آمده است آشنا کند.

[۴] Noether Theorem

۱.۵ تبدیلات روی میدان ها

آن میزان آشنایی ای که با تقارن و نظریه گروه پیدا کرده ایم کافی است که به ما کمک کند معنای تبدیلات تقارنی را بهتر بفهمیم . نخست مثال ساده زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\phi^4. \tag{۴۶}$$

این لاگرانژی تحت تبدیل $\phi \longrightarrow -\phi$ متقارن است یعنی شکل خود را حفظ می‌کند. اما این چنین تقارنی منجر به یک کمیت پایسته نمی شود چراکه تقارن تحت یک تبدیل پیوسته نیست. (تبدیل پیوسته آن است که به طور پیوسته به تبدیل همانی متصل باشد.) حال لاگرانژی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\psi - \frac{1}{2}M^2\psi^2 - \lambda\phi^2\psi^2. \tag{۴۷}$$

این لاگرانژی در بردارنده دو میدان ϕ و ψ است و علاوه بر تقارن

$$\phi \longrightarrow -\phi, \quad \psi \longrightarrow -\psi, \tag{۴۸}$$

دارای تقارنی از نوع

$$\phi \leftrightarrow \psi, \tag{۴۹}$$

نیز هست. اما این تقارن آخر هم به یک کمیت پایسته منجر نمی شود چراکه تبدیل بالا تبدیل پیوسته ای نیست. حال مثال سوم را در نظر می گیریم

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\psi - \frac{1}{2}m^2\psi^2 - \lambda(\phi^2+\psi^2)^2. \tag{۵۰}$$

این لاگرانژی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi^T\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^T\Phi - \lambda(\Phi^T\Phi)^2, \tag{۵۱}$$

که در آن

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \tag{۵۲}$$

حالا واضح است که این لاگرانژی دارای یک تقارن خیلی بزرگتر از لاگرانژی های قبلی است به این معنا که تحت تبدیلات پیوسته زیر ناورداست:

$$\Phi \longrightarrow \Phi' := g\Phi \tag{۵۳}$$

که در آن g یک ماتریس متعامد دو بعدی است یعنی $g = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$. قضیه نوتر بیان می کند که این تقارن پیوسته منجر به یک کمیت پیوسته می شود و به ما یاد می دهد چگونه این کمیت پایسته را پیدا کنیم.

در مثال بالا می توانیم یک میدان مختلط را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\chi := \phi + i\psi \tag{۵۴}$$

در این صورت همان لاگرانژی به صورت زیر در می آید:

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi^*\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m^2\chi^*\chi - \lambda(\chi^*\chi)^2. \tag{۵۵}$$

بااین تعریف جدید، این لاگرانژی دارای تقارن $\chi \longrightarrow e^{i\theta}\chi$ است. اصطلاحاً می گوییم این لاگرانژی تقارن $U(1)$ دارد. اما این یک تقارن جدید نیست چرا که گروه $SO(2)$ با گروه $U(1)$ یکسان است.

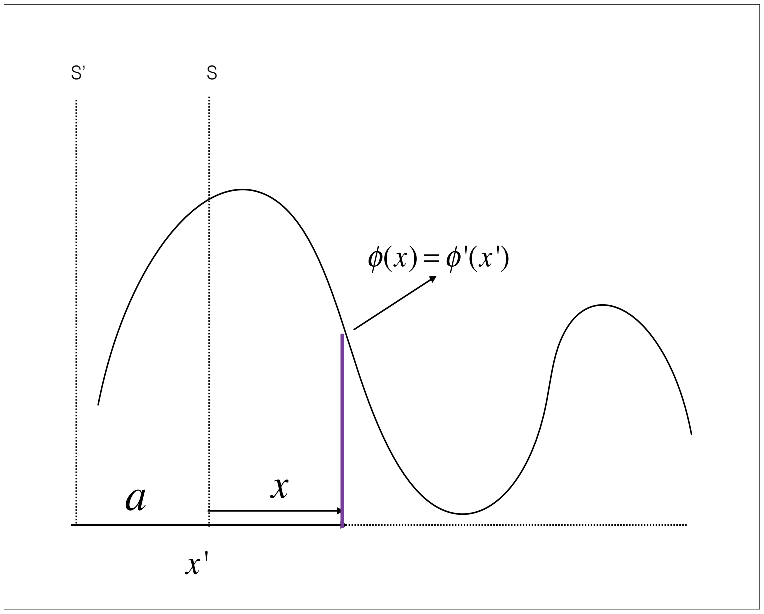
۲.۵ تبدیلات روی فضا - زمان و میدان ها

تاکنون به تقارن هایی پرداختیم که در آن ها تنها میدان ها تبدیل می شوند. یعنی میدان $\phi_i(x)$ تبدیل می شود به میدان دیگری که آن را به صورت کلی زیر می نویسیم:

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x) := U_{ij}\phi_j(x) \tag{۵۶}$$

که در آن U_{ij} نمایشی از یک گروه است و به پارامترهای پیوسته ای بستگی دارد. برای پارامترهای خیلی کوچک این تبدیل به صورت زیر در می آید:

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + (\delta\phi_i)(x), \tag{۵۷}$$



شکل ۲: در این جا مختصات نقطه در دستگاه S برابر با x و در دستگاه S' برابر با x' است. یک میدان اسکالر در هر نقطه با یک عدد مشخص می شود. وقتی که مختصات این نقطه عوض می شود، مقدار عددی میدان اسکالر عوض نمی شود. بنابراین همواره داریم $\phi'(x') = \phi(x)$

یا به صورت خلاصه (از آنجا که x در هر دو طرف یکسان است)

$$\phi_i \longrightarrow \phi'_i + \delta\phi_i. \tag{۵۸}$$

اما می توان تبدیلات کمی پیچیده تر را نیز در نظر گرفت. در واقع این تبدیلات از نظر مفهومی برای ما اشنا تر هستند. این ها تبدیلاتی هستند که فضا و زمان را تحت تاثیر قرار می دهند و به تبع آن میدان ها را نیز تغییر می دهند. انتقال و دوران و تبدیل لورنتز نمونه های خیلی مهم از این تبدیلات هستند. هر لاگرانژی ای که از نظر فیزیکی بخواهد قابل قبول باشد می بایست این تقارن ها را داشته باشد. لاگرانژی های زیر نمونه هایی از لاگرانژی هایی هستند که چنین تقارنی ندارند:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda(x)\phi^4 \\
\mathcal{L}_5 &= \frac{1}{2}\partial_t\phi\partial_t\phi + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda(x)\phi^4 \\
\mathcal{L}_6 &= \frac{1}{2}\partial_t\phi\partial_t\phi - \frac{1}{2}\left(\partial_x\phi + \partial_y\phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda(x)\phi^4.
\end{aligned} \tag{۵۹}$$

■ در هر مورد بگویید که لاگرانژی های بالا کدام تقارن های فضازمانی را ندارند.

برای این‌که این تبدیلات جدید را بفهمیم مثال خیلی ساده ای را در یک دنیای یک بعدی در نظر بگیرید که در آن تنها یک میدان اسکالر در فضا وجود دارد. شکل (۱.۵)

این میدان را که در یک ناحیه تعریف شده است نشان می دهد. حال فرض کنید که یک تبدیل فضایی $x \longrightarrow x' = x + a$ را انجام می دهیم. تحت این تبدیل اندازه میدان اسکالر تغییر نمی‌کند و ما خواهیم داشت:

$$\phi'(x') = \phi(x). \tag{۶۰}$$

یعنی در نقطه جدید x' میدان ϕ' را داریم که اندازه اش با همان میدان قبلی برابر است. بنابراین این تبدیل را به صورت جفت زیر می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} x \quad &\longrightarrow \quad x' = x + a \\ \phi(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi'(x') = \phi(x). \end{aligned} \tag{۶۱}$$

اما همه میدان ها به این شکل تغییر نمی‌کنند. برای درک این موضوع شکل (۲.۵) را در نظر بگیرید. این شکل یک میدان برداری را در ناحیه ای از فضا نشان می دهد. سپس یک دوران انجام شده است. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} x_i \quad &\longrightarrow \quad x'_i = R_{ij} x_j \\ \phi_i(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi'_i(x') = R_{ij}\phi_j(x). \end{aligned} \tag{۶۲}$$

در این جا از این استفاده کرده ایم که ϕ یک میدان برداری با مولفه های ϕ_i است که مثل یک بردار فضایی تبدیل می شود. اما ممکن است که میدان ϕ یک میدان تانسوری باشد که در این صورت مولفه هایش را با ϕ_{ij} نشان می دهیم که به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\phi_{ij}(x) \longrightarrow \phi'_{ij}(x') = R_{ik}R_{jl}\phi_{kl}(x). \tag{۶۳}$$

در حالت کلی داریم

$$\begin{aligned} x \quad &\longrightarrow \quad x' = gx \\ \phi(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi'(x') = D(g)\phi(x) \end{aligned} \tag{۶۴}$$

که در آن g یک عنصر از گروه تبدیلات و $D(g)$ یک نمایش از آن است که بستگی به نوع میدان انتخاب شده است. این رابطه آخری را می توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$x \quad \longrightarrow \quad x' = gx$$

$$\phi(x) \quad \longrightarrow \quad \phi'(x) = D(g)\phi(g^{-1}x). \tag{۶۵}$$

شکل بی نهایت‌کوچک این تبدیلات به صورت زیر خواهد بود:

$$x^\mu \quad \longrightarrow \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$
$$\phi_i(x) \quad \longrightarrow \quad \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x). \tag{۶۶}$$

این‌که δx^μ و $\delta\phi_i(x)$ دقیقا چه هستند را برای هر تبدیل به صورت جداگانه باید مشخص کرد.

- مثال: یک میدان اسکالر را در نظر بگیرید. تبدیل را هم تبدیل بی نهایت‌کوچک انتقال یعنی $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^m$ در نظر بگیرید. در این مورد داریم

$$\phi'(x') = \phi(x), \;\longrightarrow\; \phi'(x) = \phi(x-\epsilon) = \phi(x) - \epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x) \;\longrightarrow\; \delta\phi(x) = -\epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x) \tag{۶۷}$$

- مثال: یک میدان اسکالر را در نظر بگیرید. اما این بار تبدیل بی نهایت‌کوچک دوران یعنی $x'^\mu = x^\mu + \omega_{\mu,\nu}x^\nu$ را اعمال می‌کنیم‌که در آن $\omega_{\mu,\nu} = -\omega_{\nu,\mu}$ پارامترهای بی نهایت‌کوچک دوران هستند. در این مورد داریم

$$\phi'(x') = \phi(x), \;\longrightarrow\; \phi'(x) = \phi(x) - \omega_{\mu,\nu}x^\nu\partial_\mu\phi(x) \;\longrightarrow\; \delta\phi(x) = -\omega_{\mu,\nu}x^\nu\partial^\mu\phi(x). \tag{۶۸}$$

- مثال: یک میدان برداری $A_\mu(x)$ را در نظر بگیرید. تبدیل بی نهایت‌کوچک انتقال $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ را اعمال می‌کنیم . در این مورد داریم

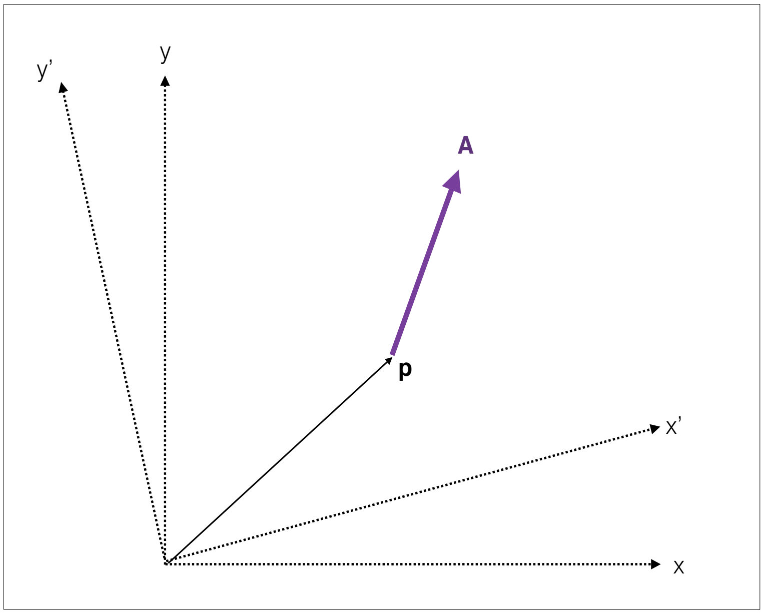
$$A'_\mu(x') = A_\mu(x), \;\longrightarrow\; A'_\mu(x) = A_\mu(x-\epsilon) \;\longrightarrow\; A'_\mu(x) = A_m(x) - \epsilon^\alpha\partial_\alpha A^\mu(x) \tag{۶۹}$$

و در نتیجه

$$\delta A^\mu(x) = -\epsilon^\alpha\partial_\alpha A^\mu(x). \tag{۷۰}$$

- مثال: یک میدان برداری $A_\mu(x)$ را در نظر بگیرید. اما این بار تبدیل بی نهایت‌کوچک دوران یعنی $x'^\mu = x^\mu + \omega_{\mu,\nu}x^\nu$ را اعمال می‌کنیم‌که در آن $\omega_{\mu,\nu} = -\omega_{\nu,\mu}$ پارامترهای بی نهایت‌کوچک دوران هستند. در این مورد داریم

$$A'_\mu(x') = A_\mu(x), \;\longrightarrow\; A'_\mu(x) = A_\mu(x-\omega x) \;\longrightarrow\; A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \omega_{\alpha,\beta}x^\beta\partial^\alpha A_\mu(x) \tag{۷۱}$$



شکل ۳: وقتی که دستگاه مختصات را می چرخانیم بردار مکان نقطه p و هم چنین میدان برداری A که در آن نقطه تعریف شده اند تغییر نمی کنند. اما مولفه های آنها به ترتیب زیر تغییر می‌کنند: $x'_i = R_{ij}x_j, \quad A'_i(x') = R_{ij}A_j(x)$ اگر در این نقطه یک میدان اسکالر داشته باشیم بازهم مقدار آن تغییر نمی‌کند یعنی خواهیم داشت: $\phi'(x') = \phi(x)$

و در نتیجه

$$\delta A_\mu(x) = -\omega_{\alpha,\beta} x^\beta \partial^\alpha A_\mu(x). \tag{۷۲}$$

■ مسئله: یک میدان تانسوری $V_{\mu,\nu}(x)$ در نظر بگیرید. تحت تبدیل دوران $\delta V_{\mu,\nu}(x)$ را پیدا کنید.

بنابراین با دو نوع جداگانه از تبدیلات تقارنی آشنا شدیم که اولی حالت خاصی از دومی است. در اولی تنها میدان ها تبدیل می شوند اما در دومی نقاط فضا زمان هم تبدیل می شوند. دقت کنید که این تبدیلات را هم می توان به صورت فعال [۵] که در آن نقاط واقعا جابجا می شوند یا غیرفعال [۶] که در آن تنها دستگاه مختصات جابجا می شود، در نظر گرفت. نتیجه نهایی مستقل از این است که این تبدیلات را چگونه تعبیر می کنیم.

[۵] active
[۶] passive

۶ نمایش یک گروه روی میدان ها به صورت کلی

تاکنون از یک میدان اسکالر یا میدان برداری که خاصیت یا تعریف آن را می شناسیم صحبت کردیم. در واقع تعریف می کنیم که در یک فضای d بعدی میدان اسکالر یک میدان یک مولفه ای است که تحت تبدیلات دوران تغییر نکند یعنی

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{۷۳}$$

یا میدان برداری میدانی است با d مولفه که تحت تبدیلات دوران به شکل زیر تغییر کند

$$A'_i(x') = R_{ij}A_j(x) \tag{۷۴}$$

و یا میدان تانسوری مرتبه دو میدانی است که تحت تبدیلات دوران به شکل زیر تغییر کند

$$T'_{ij}(x') = R_{ik}R_{jl}T_{kl}(x). \tag{۷۵}$$

همه این روابط را می توان در یک چارچوب کلی و قدرتمند که برای گروه های دلخواه تبدیل صورت بندی می شود، گنجاند. در حالت کلی یک میدان چند مولفه ای مثل $\Phi(x)$ و یک گروه دلخواه مثل G را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که رابطه بین این دو میدان وقتی که عنصر $g \in G$ تبدیل $g : x \longrightarrow x' = gx$ را انجام می دهد به شکل زیر است:

$$\Phi'(x') = U(g)\Phi(x). \tag{۷۶}$$

ما نمی دانیم که $\Phi(x)$ چگونه میدانی است، چند تا مولفه دارد و چگونه خاصیت هایی دارد. هم چنین نمی دانیم که $U(g)$ چگونه تبدیلی است. تنها چیزی که می دانیم این است که اگر این تبدیل را دو بار پشت سر هم اعمال کنیم مثل این است که یک بار تبدیل ترکیبی را انجام داده باشیم. به عبارت دیگر می دانیم که اگر یک بار تبدیل g و یک بار تبدیل g' را انجام دهیم و داشته باشیم:

$$\Phi"(x") = U(g')\Phi(x') \tag{۷۷}$$

که در نتیجه آن

$$\Phi"(x") = U(g')U(g)\Phi(x), \tag{۷۸}$$

آنگاه می بایست داشته باشیم:

$$\Phi"(x") = U(g'g)\Phi(x). \tag{۷۹}$$

بنابراین آنچه که در باره U می دانیم این است که می بایست نمایشی از گروه G باشد.

بنابراین اگر نمایش های گروه G ا یک بار برای همیشه طبقه بندی کنیم رابطه فوق بیان می کند که تبدیلات انواع میدان ها نیز طبقه بندی خواهند شد. مطابق با هرنمایش گروه G یک نوع میدان وجود دارد که مطابق رابطه (۷۶) تحت آن گروه تبدیل می شود. ما می توانیم درساختن یک نظریه یا مدل از میدان های مختلف استفاده کنیم و با توجه به تبدیلات آنها میدان ها را آنچنان در لاگرانژی خود بگنجانیم که نظریه نهایی نسبت به تبدیلات آن گروه خاص ناوردا [۷] شود.

۷ قضیه نوتر

قضیه نوتر [۸] نشان می دهد که در یک نظریه میدان همواره تقارن های پیوسته منجر به وجود جریان های پایسته می شوند و تعداد جریان های پایسته نیز دقیقا برابر با بعد گروه تقارن است. نخست حالت ساده ای را در نظر می گیریم که تنها میدان ها تبدیل می شوند. از آنجا که نقاط فضا زمان تغییر نمی کنند یک نظریه میدان وقتی دارای این نوع تقارن است که لاگرانژی اش تغییر نکند. طبیعتا کنش چنین سیستمی نیز تغییر نمی کند.

۱.۷ قضیه نوتر برای وقتی که فقط میدان ها تبدیل می شوند.

از آنجا که این تبدیلات پیوسته هستند حتما می توان تبدیلات بی نهایت کوچک را در نظر گرفت. هر نتیجه ای که برای این تبدیلات بدست بیاوریم برای تبدیلات دلخواه هم درست است زیرا تبدیلات دلخواه چیزی نیستند جز تکرار همین تبدیلات بی نهایت کوچک. لاگرانژی ما شامل میدان هایی است که آنها را با

$$\phi_i, \quad i = 1, \cdots K$$

نشان می دهیم. این میدان ها تحت تبدیل تقارنی بی نهایت کوچک به میدان های زیر تبدیل می شوند:

$$\phi'_i = \phi_i + \delta\phi_i, \quad i = 1, \cdots K.$$

[۷] Invariant

[۸] Emmy Noether ریاضیدان آلمانی در اوایل قرن بیستم

دقت کنید که این $\delta\phi_i$ برای هر میدانی یک جور است چرا که ممکن است تبدیل تقارنی میدان های مختلف را به شکل های مختلف تحت تاثیر قرار دهد. فرض ما این است که لاگرانژی تحت این تبدیلات ناورداست. هم چنین فرض دیگر ما این است که لاگرانژی تنها تابع میدان ها و مشتقات مرتبه یک آنهاست. این تقارن را به شکل زیر می نویسم

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \delta\partial_\mu\phi). \tag{۸۰}$$

که در آن برای سادگی از نماد ϕ بدون اندیس برای نشان دادن همه میدان ها استفاده کرده ایم. بنابراین داریم

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\partial_\mu\phi = 0. \tag{۸۱}$$

در این عبارت و عبارت هایی که در آینده می نویسیم یک جمع روی اندیس میدان ها از $i = 1$ تا $i = K$ مستتر است. مثلا

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i \tag{۸۲}$$

از معادله حرکت و هم چنین رابطه $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$ استفاده می کنیم و رابطه بالا را به صورت زیر می نویسیم:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\partial_\mu\delta\phi = 0. \tag{۸۳}$$

و یا

$$\partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi) = 0. \tag{۸۴}$$

به این ترتیب این تقارن منجر به یک معادله پیوستگی به صورت

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{۸۵}$$

شده است که در آن

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi, \tag{۸۶}$$

جریان پایسته است. اگر جمع روی اندیس ها را به صورت صریح بنویسیم این جریان به شکل زیر است:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{i,\mu}}\delta\phi_i, \tag{۸۷}$$

که در آن روی اندیس i جمع زده می شود. اما این جریان در دل خود تعداد بیشتری جریان پایسته دارد چرا که $\delta\phi_i$ برحسب تعدادی پارامتر کاملا دلبخواه یعنی ϵ_a ها نوشته می شود. یعنی داریم

$$\delta\phi_i = \epsilon_a \chi_{i,a} \tag{۸۸}$$

که در طرف راست روی اندیس a جمع زده شده است. بنابراین به ازای هر مجموعه دلبخواهی از این پارامترها جریان

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \epsilon_a \chi_{i,a}, \tag{۸۹}$$

پایسته است. معنای آن این است که ضرایب بسط بر حسب ϵ_a ها همگی جریان های پایسته هستند: بنابراین داریم

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0, \qquad , a = 1, 2, \cdots N, \tag{۹۰}$$

که در آن

$$J^\mu_a := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \chi_{i,a}. \tag{۹۱}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که بارهای [۹]

$$Q_a := \int d^d x J^0_a \tag{۹۲}$$

پایسته هستند یعنی

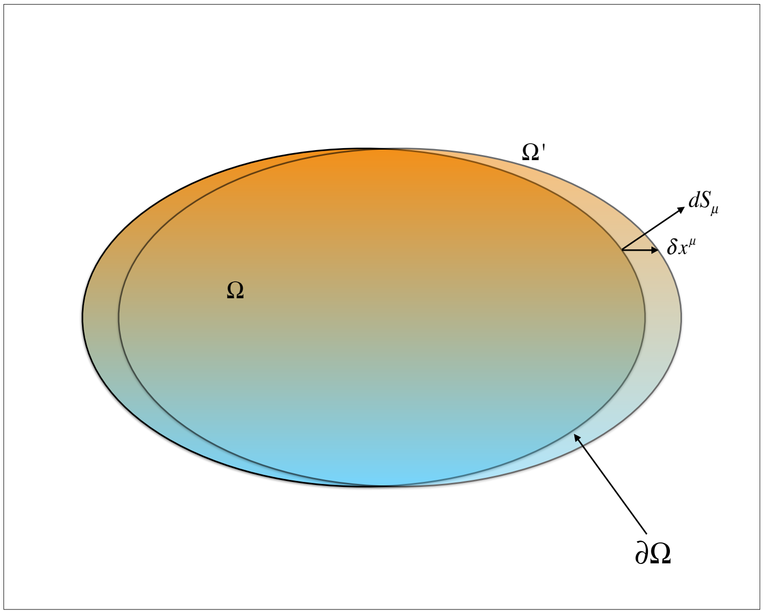
$$\frac{d}{dt} Q^0_a = 0. \tag{۹۳}$$

این به این معناست که

$$\{Q_a, H\} = 0 \qquad \forall\, a. \tag{۹۴}$$

■ تمرین: درستی رابطه (۹۴) را نشان دهید.

[۹] Charges



شکل ۴: تحت یک تبدیل بی نهایت کوچک $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ رابطه ی ساده ای بین ناحیه انتگرال گیری قبل و بعد از تبدیل وجود دارد. این رابطه عبارت است از: $\int_{\Omega'} d^Dx = \int_\Omega d^Dx + \int_{\partial\Omega} \delta x^\mu dS_\mu$ که در آن $\partial\Omega$ مرز ناحیه ی Ω و dS_μ بردار المان سطح آن است.

■ تمرین: فرض کنید که $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \Phi_{,\mu})$ که در آن Φ یک میدان 2 مولفه ای است. هم چنین فرض کنید که این لاگرانژی تحت تبدیلات $SU(2)$ به صورت $g \in SU(2)$ $\qquad \Phi \longrightarrow g\Phi,$ ناورداست.

الف: بارهای پایسته را بدست آورید.

ب: نشان دهید که این بارهای پیوسته در رابطه جبر $SU(2)$ صدق می کنند، یعنی

$$\{Q_a, Q_b\} = i\epsilon_{abc}Q_c. \qquad (۹۵)$$

۲.۷ قضیه نوتر برای وقتی‌که هم نقاط فضا زمان و هم میدان ها تبدیل می شوند.

تاکنون تبدیلات تقارنی ای را در نظرگرفتیم‌که تنها میدان ها را تحت تاثیر قرار می دادند و نقاط فضا زمان را دست نخورده باقی می‌گذاشتند. حال به دسته وسیع تر تبدیلاتی می پردازیم‌که هم نقاط فضا زمان و هم میدان ها را تحت تاثیر قرار می دهند. در این جا ممکن است‌که لاگرانژی تغییرکند زیر لاگرانژی تابع میدان ها و به تبع آنها تابع نقاط فضا و زمان است . بنابراین وقتی‌که نقاط فضا و زمان تغییر می‌کنند لاگرانژی نیز تغییر می‌کند. بنابراین معنای تقارن در این مورد این نیست‌که مقدار لاگرانژی تغییر نکند. بلکه معنای آن این است‌که انتگرال آن روی یک ناحیه تغییر نکند. در واقع اگر قبلا لاگرانژی را روی یک ناحیه مثل یک ناحیه یک بعدی $[0\ ,\ L]$ تعریف‌کرده باشیم در اثر تبدیل انتقال این ناحیه به $[a, L+a]$ تبدیل می شود. به صورت‌کلی هر ناحیه دلخواهی مثل Ω تبدیل به یک ناحیه دیگر مثل Ω' می شود و معنای تقارن این است‌که

$$\int_\Omega d^{D+1}x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \int_{\Omega'} d^{D+1}x\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi'). \quad (۹۶)$$

برای این منظور تبدیلا بی نهایت‌کوچک زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (۹۷)$$

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (۹۸)$$

حال عبارت $S_\Omega := \int_\Omega d^{d+1}x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ را درنظر بگیرید‌که درآن‌کنش فقط روی یک ناحیه هموار Ω تعریف شده است. تحت تبدیلات فوق ناحیه Ω نیز به ناحیه Ω' تبدیل می شود‌که تفاوت بی نهایت‌کوچکی با ناحیه Ω دارد. قضیه نوتر بیان می‌کند‌که هرگاه تحت تبدیلات (97) و به ازای هرناحیه Ω تساوی $S_\Omega = S_{\Omega'}$ برقرار باشد آنگاه یک جریان پایسته به شکل زیر وجود دارد:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (۹۹)$$

که درآن

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu. \quad (۱۰۰)$$

برای اثبات این قضیه توجه می‌کنیم‌که تفاوت S_Ω و $S_{\Omega'}$ را می توان به شکل زیر نوشت :

$$\begin{aligned} 0 = S_{\Omega'} - S_\Omega &= \int_\Omega d^{D+1}x(\mathcal{L}(\phi'(x), \partial\phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi'(x), \partial\phi'(x))) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \delta x^\mu dS_\mu \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)) \end{aligned} \quad (۱۰۱)$$

که درآن $\partial\Omega$ مرز ناحیه Ω است و dS_μ المان سطح روی آن است. حال می توان تفاوت دو لاگرانژی را برحسب قوای درجه اول $\delta\phi$ بسط داد و از معادله حرکت $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0$ و هم چنین قضیه‌گاووس $\int_\Omega \partial_\mu A^\mu dx^{D+1} = \int_{\partial\Omega} A^\mu dS_\mu$ استفاده‌کرد و به نتیجه زیر رسید:

$$0 = \int_\Omega d^{D+1}x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \tag{۱۰۲}$$

از آنجاکه ناحیه Ω دلخواه است نتیجه می‌گیریم‌که حتما عبارت داخل انتگرال برابر با صفر است یعنی یک معادله پیوستگی به شکل زیر بدست می آوریم:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{۱۰۳}$$

که درآن

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \tag{۱۰۴}$$

هرگاه‌گروه تبدیلات تقارنی N پارامتر داشته باشد J^μ نیز ترکیبی از N جریان پایسته است. به عبارت دقیق تر هرگاه پارامتر های تبدیلات را با $\epsilon_a : \quad a = 1 \cdots N$ نشان دهیم می توان نوشت :

$$\delta x^\mu = \chi_a^\mu \epsilon_a \qquad \delta\phi(x) = \Psi_a(x)\epsilon_a \tag{۱۰۵}$$

و درنیتجه جریان J^μ به شکل زیر درمی آید:

$$J^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \Psi_a(x) + \mathcal{L}\chi_a^\mu(x) \right) \epsilon_a \tag{۱۰۶}$$

که نشان می دهد جریان J^μ ترکیب خطی از N تا جریان مستقل و پایسته به شکل زیر است

$$J_a^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \Psi_a(x) + \mathcal{L}\chi_a^\mu(x) \tag{۱۰۷}$$

هرگاه قراردادی راکه در ابتدای این فصل به آن اشاره‌کنیم به یاد بیاوریم می توان شکل‌کامل تر این جریان را این طور نوشت:

$$J_a^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \Psi_{i,a}(x) + \mathcal{L}\chi_a^\mu(x) \tag{۱۰۸}$$

که در آن روی اندیس i جمع زده شده است.

۸ مسئله ها

■ مسئله اول : کنش زیر را در نظر بگیرید:

$$S = \int dx^{D+1}\frac{1}{2}\left(\partial_{,\mu}\phi\partial^{,\mu}\phi - m^2\phi^2 + V(\phi)\right). \qquad (۱۰۹)$$

این کنش روی تمام فضازمان تخت تعریف شده است. نخست ثابت کنید که این کنش تحت تبدیلات زیر ناورداست:

$$\begin{aligned} x^\mu \longrightarrow x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu, \\ \phi(x) \longrightarrow \phi'(x') &= \phi(x). \end{aligned} \qquad (۱۱۰)$$

سپس جریان های پایسته را بدست آورید.

■ مسئله دوم: کنش زیر را در نظر بگیرید:

$$S = \int dx^{D+1}\frac{1}{2}\left(\partial_{,\mu}\phi\partial^{,\mu}\phi - m^2\phi^2 + V(\phi)\right). \qquad (۱۱۱)$$

این کنش روی تمام فضازمان تخت تعریف شده است. این کنش تحت تبدیلات لورنتز $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ و $\phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x)$ ناورداست. جریان های پایسته را بدست آورید. چند جریان پایسته وجود دارد؟

■ مسئله سوم : کنش زیر را در نظر بگیرید:

$$S = -\int dx^4 F_{\mu,\nu}F^{\mu,\nu} \qquad (۱۱۲)$$

که در آن $F_{\mu,\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. این کنش تحت تبدیلات لورنتز ناورداست. جریان های پایسته را بدست آورید. چند جریان پایسته وجود دارد؟

۹ ضمیمه: تابعی، مشتق تابعی و انتگرال تابعی

یک تابعی [۱۰] نگاشتی است از فضای توابع به سوی اعداد حقیقی یا مختلط. در واقع یک تابعی چیزی نیست جز حدّ یک تابع

[۱۰] Functional

n متغیره وقتی‌که تعداد متغیرها به سمت بی نهایت میل‌کرده و به هم فشرده می شوند و خود تبدیل به یک تابع می شوند. به عبارت بهتر یک تابع n متغیره حقیقی f نگاشتی است به صورت زیر:

$$f:\ R^n \longrightarrow R, \qquad\qquad (q_1, q_2, \cdots q_n) \longrightarrow f(q_1, q_2, \cdots q_n) := f(q) \in R. \tag{۱۱۳}$$

در حدی‌که در بالا گفتیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} i &\longrightarrow x, \\ q_i &\longrightarrow \phi(x), \\ f(q) &\longrightarrow F[\phi]. \end{aligned} \tag{۱۱۴}$$

برای اینکه یک تابعی را مشخص‌کنیم می بایست نخست تعیین‌کنیم‌که روی‌کدام فضا از توابع اثر می‌کند و سپس تعیین‌کنیم‌که روی این توابع چه عملی انجام می دهد. به عنوان مثال فضای توابع حقیقی و پیوسته یک متغیره در فاصله $[a,b] \subset R$ را در نظر می‌گیریم. این فضا را با $C[a,b]$ نشان می دهیم. در این صورت مثال های زیر هرکدام یک تابعی از این فضا به سوی اعداد حقیقی هستند:

$$\begin{aligned} F_0(\phi) &= \int_a^b \phi(x)dx, \\ F_1(\phi) &= \phi(a), \\ F_2(\phi) &= \phi^2(\frac{a+b}{2}) + e^{-\int_a^b \phi^2(x)dx}, \end{aligned} \tag{۱۱۵}$$

اما مثال های زیر هیچ‌کدام یک تابعی روی فضای بالا نیستند:

$$\begin{aligned} G_0(\phi) &= \phi, \\ G_1(\phi) &= \frac{d}{dx}\phi(x)\mid_{x=a}, \\ G_2(\phi) &= \phi^2(a+b). \end{aligned} \tag{۱۱۶}$$

■ تمرین: دلیل این‌که $G_1, G_2,$ و G_3 تابعی نیستند چیست؟

به چند نکته اشاره می‌کنیم. یک تابعی می تواند به عنوان آرگومان های خود بیش از یک تابع را بپذیرد مثلا می توانیم داشته باشیم:

$$F[\phi, \psi] = \int \phi(x)\psi(x)^2 dx. \tag{۱۱۷}$$

هم چنین مجموعه توابع می توانند روی یک خمینه دلخواه تعریف شده باشند. مثلا توابع روی‌کره S^2 را در نظر بگیرید. در این صورت فضای توابع پیوسته روی‌کره را با $C(S^2)$ نمایش می دهیم. یک تابعی می تواند از این فضای توابع به اعداد حقیقی یا مختلط تعریف شود.

مشتق تابعی [۱۱] نیز تعمیم سرراست مشتق جزئی یک تابع چند متغیره است. برای فهم این موضوع به رابطه زیر دقت می‌کنیم:

$$f(q_1+\epsilon_1,\cdots q_n+\epsilon_n)=f(q_1,\cdots q_n)+\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad (۱۱۸)$$

در حد پیوسته این رابطه تبدیل می شود به :

$$F[\phi+\epsilon]=F[\phi]+\int dx\epsilon(x)\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}, \qquad (۱۱۹)$$

که در آن ϵ یک تابع بی نهایت‌کوچک است. به طور دقیق تر در طرف راست جملاتی از مرتبه ۲ از تابع ϵ وجود دارد‌که آن ها را برای سادگی ننوشته ایم. در واقع رابطه بالا مشتق تابعی یعنی $\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}$ را تعریف می‌کند.

- تمرین: نشان دهید‌که مشتق تابعی خاصیت های زیر را دارد:

$$\begin{aligned}\frac{\delta(F+G)}{\delta\phi(x)} &= \frac{\delta(F)}{\delta\phi(x)}+\frac{\delta(G)}{\delta\phi(x)}\\ \frac{\delta(FG)}{\delta\phi(x)} &= \frac{\delta(F)}{\delta\phi(x)}G[\phi]+F[\phi]\frac{\delta(G)}{\delta\phi(x)}\\ \frac{\delta(f(F))}{\delta\phi(x)} &= f'(F)\frac{\delta(F)}{\delta\phi(x)}.\end{aligned} \qquad (۱۲۰)$$

- تمرین: تابعی های $F_0,\ F_1,\ F_2$ را‌که در بالا تعریف شدند، در نظر بگیرید. مشتقات زیر را حساب‌کنید:

$$\frac{\delta F_0}{\delta\phi(x)}, \qquad \frac{\delta e^{F_1}}{\delta\phi(x)}, \qquad \frac{\delta(F_1F_2)}{\delta\phi(x)}, \qquad (۱۲۱)$$

هم چنین مشتق زیر را حساب‌کنید.

$$\frac{\delta^2 F_2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}. \qquad (۱۲۲)$$

انتگرال تابعی [۱۲] نیز تعمیمی است از انتگرال چندمتغیره وقتی‌که تعداد متغیرها به سمت بی نهایت میل می‌کند. به عبارت دیگر

$$\int dq_1dq_2\cdots dq_N F(q_1,q_2,\cdots q_N)\longrightarrow\int D\phi F[\phi], \qquad (۱۲۳)$$

[۱۱] Functional Derivative

[۱۲] Functional Derivative

که در آن

$$D\phi := \lim_{N \longrightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i. \qquad (۱۲۴)$$

می توانیم به اختصار قرار دهیم $Dq := \prod_{i=1}^{N} dq_i$. همانطورکه Dq روی تمام مقادیر همه q_i انتگرال می‌گیرد، $D\phi$ نیز روی تمام افت و خیزهای تابع ϕ انتگرال می‌گیرد.