مکانیک کلاسیک ذرات

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۶ آبان ۱۳۹۶

۱ مقدمه

در این درس فرض بر این است که دانشجو با مکانیک کلاسیک ذرات و فرمول بندی لاگرانژ و هامیلتون از این نظریه آشناست. بنابراین این مطالب درکلاس تدریس نخواهد شد. با این وجود برای آن دسته از خوانندگانی که ممکن است از قبل با این مطالب آشنا نباشند، فرمول بندی لاگرانژ و هامیلتون از مکانیک کلاسیک ذرات در این فصل شرح داده شده است. این مطالب مقدمه ای خواهد بود برای فهم مکانیک میدان های کلاسیک که در فصل بعد توضیح داده خواهد شد. خواننده ای که با مکانیک کلاسیک ذرات آشناست می تواند مستقیما به فصل بعد بپردازد و اگر با میدان های کلاسیک نیز آشناست می تواند مستقیما مطالعه درسنامه را از فصل سوم آغاز کند. البته خواندن بخش آخر این فصل برای خواننده ای که با مکانیک کلاسیک ذرات نیز اشنا است ممکن است مفید باشد زیرا مدخلی مناسب است برای نظریه میدان .

۲ صورت بندی لاگرانژ از مکانیک کلاسیک

تقریباً نیم قرن پس از آنکه نیوتن کتاب «اصول ریاضی فلسفی طبیعی» را در ۱۷۲۹ منتشرکرد و درآن قوانین مکانیک را به صورتی که امروز می شناسیم تدوین کرد، ژوزف لویی لاگرانژ ریاضیدان فرانسوی توانست فرمول بندی جدید ولی معادلی از مکانیک ارایه کند که هم برای تعمیم های نظری و هم برای تحلیل مسائل پیچیده کارایی خیلی بیشتری داشت. مکانیک در آن صورتی که نیوتن نخستین بار عرضه کرده بود هنوز متکی

بر مفاهیم هندسی بود، اما لاگرانژ توانست با کاربرد آنالیز به جای هندسه به آن هم وحدت و هم استحکام بخشد. خواننده دقیق می تواند به این نکته توجه کند که در صورت بندی نیوتن می بایست برای برای هر مسئله‌ای تجزیه تحلیل دقیقی از بردارهای نیروها انجام دهیم. هم چنین می تواند به یاد بیاورد که معادلات حاکم بر نیروها و شتاب ها در هر دستگاه مختصاتی یک شکل و یک قیافه معین پیدا می کند. در صورت بندی لاگرانژ خواهیم دید که اثری از بردارهای نیرو و شتاب نیست، نیازی به تجزیه تحلیل این بردار ها نیز و جود ندارد، و بالاتر از همه شکل معادلات حرکت که آنها را معادلات اویلر– لاگرانژ می نامیم کاملاً مستقل از نوع مختصاتی هستند که به کار می بریم. این خصلت هاست که به صورت بندی لاگرانژ هم توانایی فوق العاده داده و هم آن را به صورت یک ساختار ریاضی زیبا درآورده است.

> ده سال بعد از آن تاریخ در نامه ای که لاگرانژ به ریاضی دان فرانسوی دالامبر نوشته است گفته است که در نظر او کاری که در دوران جوانی در نوزده سالگی در محاسبه تغییرات انجام داده شاهکار اوست و بوسیله همین محاسبه است که لاگرانژ توانست تمام دانش مکانیک را منسجم کند و به قول هامیلتون از آن نوعی « شعر علمی » بوجود آورد. [۱]

دستگاهی درنظربگیرید که برای توصیف حالت آن احتیاج به مختصات $(q_1, q_2, \cdots q_N)$ دارید. این مختصات لزوماً مختصات دکارتی نیستند و می توانند طول، زاویه یا هرچیز دیگری باشند که برای توصیف موقعیت دستگاه لازم است. سرعت های تعمیم یافته را با $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_N)$ نشان می دهیم. مجموعه $(q, \dot{q})$ را که درآن منظور از q تمامی مختصه هاست یک پیکربندی یا $Configuration$ ازدستگاه می خوانیم و $2N$ را تعداد درجات آزادی دستگاه می گوییم. ازاین به بعد نماد خلاصه‌ی $(q, \dot{q})$ را بجای $(q_1, q_2, \cdots q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_N)$ بکار خواهیم برد. مجموعه تمام هیئت های قابل تصور برای یک دستگاه را فضای پیکر بندی یا $Configuration\ Space$ می خوانیم. خاصیت مهمِ طبیعت آن است که که مختصات q_i و سرعت های q_i. از یک دستگاه دریک لحظه شتاب های آن دستگاه یعنی $\ddot{q}_i$ ها را در همان لحظه تعیین خواهد کرد. این امر به این معناست که در یک لحظه بی نهایت کوچکِ بعد به فاصله ϵ، می توان مختصات و سرعت ها را بدست آورد، زیرا:

$$\begin{aligned} q_i(t+\epsilon) &= q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t) \\ \dot{q}_i(t+\epsilon) &= \dot{q}_i(t) + \epsilon \ddot{q}_i(t). \end{aligned} \tag{۱}$$

بنابراین هرگاه هیئت یک دستگاه فیزیکی در یک لحظه از زمان معلوم شود، می توان هیئت این دستگاه را در همه لحظات آینده به طور یکتا تعیین کرد. بنابراین دانستن هیئتِ $(q(0), \dot{q}(0))$، هیئت های $(q(t), \dot{q}(t))$ را درهمه لحظات آینده یا به عبارت دیگر مسیر حرکت را به طور یکتا تعیین خواهد کرد.

[۱] ریاضی دانان نامی، نوشته اریک تمپل بل، ترجمه حسن صفاری.

توجه به این مسئله مهم است که آنچه که دربالا گفتیم یک خاصیت مهم از طبیعت و دنیای ماست و نمی توان آن را براساس بنیادی تری توضیح داد. مثلا می شد دنیا چنان باشد که درآن تنها مختصات یک دستگاه در هرلحظه می توانست سرعت ها را درهمان لحظه تعیین کند. ولی جهانی که ما درآن زندگی می کنیم چنین نیست و درآن مختصات و سرعت ها در هر لحظه مستقل از یکدیگرند و نمی توان با دانستن مختصات در یک لحظه سرعت ها را درهمان لحظه تعیین کرد. حال سوال اساسی این است که مسیر یک دستگاه در فضای پیکربندی چگونه تعیین می شود؟ پاسخ این سوال توسط یک اصل مهم مکانیک داده می شود که آن را اصل کمترین عمل می گویند.

۳ اصل کمترین عمل

فرض کنید که درلحظه t_1 دستگاه درپیکربندی $(q_a, \dot{q}_a)$ باشد و دینامیک دستگاه درلحظه t_2 آن را درپیکربندی $(q_b, \dot{q}_b)$ قرارداده باشد. دراین صورت می پرسیم که این دستگاه برای تحول از پیکربندی اولیه به نهایی چه مسیری را درفضای پیکربندی ها طی کرده است. به عبارت ساده تر می پرسیم که مسیرحرکت آن از $(q_a, \dot{q}_a)$ به $(q_b, \dot{q}_b)$ چه بوده است. مطابق با اصل کمترین عمل یا $Principle\ \ of\ \ least\ \ action$ تابعی موسوم به لاگرانژی وجود دارد که آن را با $L(q, \dot{q})$ نشان می دهیم و مسیر حرکت دستگاه چنان است که انتگرال این تابع در طول مسیر که آن را کنش می گوییم و با S نشان می دهیم، در فضای همه مسیرهای ممکن یک اکسترمم موضعی است. معنای این حرف آن است تغییرات درجه اول این کمیت نسبت به تغییرات کوچک دراطراف آن برابر با صفراست.

$Principle\ \ of\ \ least\ action$ مسیر حرکت می بایست چنان باشد که کمیت زیر موسوم به کنش

$$S = \int_{t_1}^{t_2)} L(q(t), \dot{q}(t))dt \tag{۲}$$

در ادامه درباره این که تابع لاگرانژی، چه تابعی از مختصات و سرعت هاست صحبت خواهیم کرد. فعلا می خواهیم ببنیم نتایج اصل کمترین عمل چیست. مسیر دلخواهی مثل $q(t)$ رادرنظرمی گیریم که درلحظه t_1 برابربا q_a ودرلحظه t_2 برابربا q_b باشد. به عبارت دیگر مسیری درنظرگرفته ایم که نقطه q_a را به نقطه q_b وصل کند. برای این مسیر، کنش به شکل زیراست:

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{۳}$$

اگراین مسیر، واقعاً مسیر حرکت باشد می بایست تغییرات درجه اول کنش حول آن برابرباصفرباشد یعنی

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0. \tag{۴}$$

به زبان ساده تراگرمسیردیگری مثل $q'(t) = q(t) + \eta(t)$ درنظربگیریم که درآن $\eta(t)$ بی نهایت کوچک باشد می بایست تغییرات درجه اول کنش برابرباصفرباشد:یعنی تامرتبه اول از η باید داشته باشیم:

$$S[q+\eta] - S[q] = 0. \qquad (۵)$$

ازاین رابطه بدست می آوریم (در روابط زیر از قرارداد جمع استفاده شده است یعنی روی اندیس های تکراری جمع زده می شود)

$$\begin{aligned} S[q+\eta] &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i+\eta_i, \dot{q}_i+\dot{\eta}_i, t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\eta}_i\right] dt \\ &= S + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i) - \eta_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial q_i})\right] dt \\ &= S + \int_{t_1}^{t_2} \eta_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial q_i})\right] dt \end{aligned} \qquad (۶)$$

ازآنجاکه تغییرات S می بایست برای هرنوع تغییر بی نهایت کوچک مسیر برابرباصفرباشد نتیجه می‌گیریم که شرط زیرمی بایست برقرارباشد.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \qquad (۷)$$

این معادلات معادلات اویلر–لاگرانژ نامیده می شوند.

از ابتدای کار لاگرانژ به آنالیز توجه یافت و هیچگاه توجه او به هندسه جلب نشد. ترجیحی که وی برای آنالیز قایل بود به خصوص در شاهکار وی به نام « مکانیک تحلیلی» هویداست که از نوزده سالگی در شهر تورن نقشه آن را طرح کرده بود و حال آنکه اثر بزرگ او فقط در سال ۱۷۸۸ در پاریس انتشار یافت و در آن هنگام لاگرانژ پنجاه و دو ساله بود. در مقدمه این کتاب می نویسد: « دراین کتاب اصلا شکلی وجود ندارد» و درعین حال که با لحنی نیمه شوخی از خدایان هندسه قدردانی می‌کند یادآوری می‌کند که مکانیک را می توان هندسه فضایی شامل چهار بعد دانست زیرا مختصات سه گانه هر نقطه در فضا بعلاوه زمان که می تواند بعنوان مختص چهارمی در نظر گرفته شود مجموعاً برای تعیین وضع یک نقطه که در فضا و زمان در حرکت است کفایت می‌کند.[۲]

[۲] تاریخ علوم، نوشته پیر روسو، ترجمه حسن صفاری

سوالی که در برابر ما قرار دارد آن است که لاگرانژین چه نوع تابعی است. برای یک دستگاه بسته، لاگرانژی عبارت است از تابع زیر:

$$L = T(q,\dot{q}) - V(q_1, q_2, \cdots q_N), \tag{۸}$$

که درآن T انرژی جنبشی ذرات موجود در دستگاه و V تابعی موسوم به تابع پتانسیل است که بستگی به نوع برهم‌کنش ذرات موجود درآن دستگاه را تعیین می‌کند.

■ **مثال ۱: ذره ای که در پتانسیل V قرار دارد.** مختصات تعمیم یافته را همان مختصات دکارتی ذره می‌گیریم. بنابراین داریم

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x,y,z). \tag{۹}$$

برای این لاگرانژی، معادلات اویلر و لاگرانژ منجر می شوند به:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{۱۰}$$

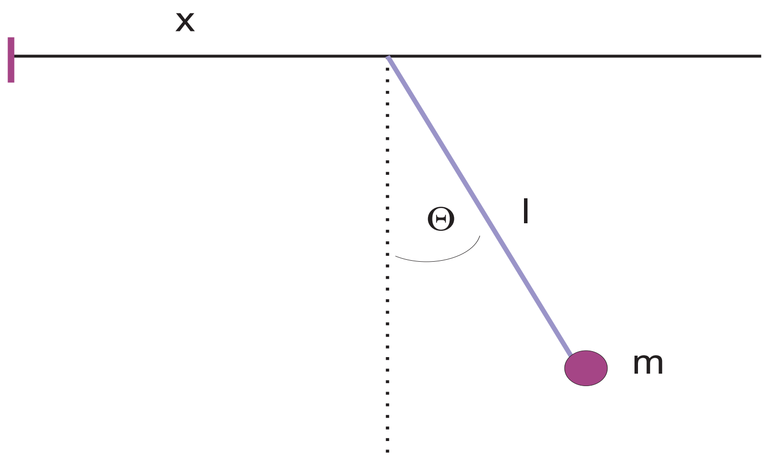
که همان معادلات نیوتن هستند.

■ **مثال ۲: پاندول با نقطه اتکای لغزان** : شکل ؟؟، یک پاندول را نشان می دهد که نقطه اتکای آن روی یک میله بدون اصطکاک می لغزد. جرم پاندول را با M و جرم نقطه اتکای آن را با m نشان می دهیم. برای این پاندول مختصات تعمیم یافته را (x,θ) می‌گیریم که درآن X فاصله نقطه اتکای پاندول با یک نقطه مرجع و θ زاویه پاندول با راستای قائم است. برای آنکه لاگرانژی را بنویسیم از این مطلب استفاده می‌کنیم که:

$$x = X + l\sin\theta, \qquad y = -l\cos\theta, \tag{۱۱}$$

و درنتیجه

$$\dot{x} = \dot{X} + l\cos\theta\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = l\sin\theta\dot{\theta}, \qquad V = -gl\cos\theta. \tag{۱۲}$$



شکل ۱: پاندولی که نقطه اتکای آن لغزان است .

بنابراین لاگرانژی عبارت خواهد بود با:

$$L = \frac{1}{2} m \cos X^2 + \frac{1}{2} M(\dot{X}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \cos\theta \dot{X} \dot{\theta}) + gl \cos\theta. \tag{۱۳}$$

- **مثال ۳ : ذره دریک پتانسیل با تقارن کروی:** دراین حالت مختصات ذره را با (r, θ, ϕ) نشان می دهیم. داریم $V = V(r)$ و $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$ بنابراین لاگرانژی عبارت است از:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2) - V(r). \tag{۱۴}$$

- **تمرین:** با استفاده از لاگرانژی بالا معادلات حرکت یک ذره در پتانسیل کروی را بدست آورید. نشان دهیدکه اولا حرکت یک ذره حتماً در یک صفحه رخ می دهد، ثانیا تکانه‌ی زاویه‌ای ذره ثابت باقی می ماند.

- **مثال ۴ : دو نوسانگر هارمونیک جفت شده:** برای سادگی فرض می‌کنیم‌که دو نوسانگر جرم مساوی دارند. این دو نوسانگر با یک فنر با ثابت فنر k به یکدیگر متصل شده ا ند و هرکدام از آنها نیز با فنر مشابهی به دیواره وصل شده اند، شکل (؟؟).

اگر طول فنرها را درحالت عادی صفر فرض‌کنیم (فنرهای بسیارکشسان) و اگر انحراف هر جرمِ m_i را از نقطه تعادل آن با x_i نشان دهیم آنگاه داریم

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x_1}^2 + \frac{1}{2} \dot{x_2}^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2. \tag{۱۵}$$

شکل ۲: نوسانگرهای هارمونیک جفت شده.

■ **مثال ۵ : ذره بار دار درمیدان الکترومغناطیسی:** این مثال بدلیل کلیت آن اهمیت دارد زیرا نشان می دهد که چگونه می توان برهم کنش ذره بار دار را با میدان الکترومغناطیسی توصیف کرد. می دانیم که یک میدان الکترومغناطیسی را می توان با پتانسیل اسکالرِ ϕ و پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ توصیف کرد. میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی به ترتیب زیر از این پتانسیل ها بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

برای ذره بارداری که با بارالکتریکیِ q درچنین میدانی قرارگرفته است، لاگرانژی عبارت است از:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}. \qquad (۱۷)$$

■ **تمرین:** با استفاده از معادلات اویلر–لاگرانژ نشان دهید که معادله حرکتی که از این لاگرانژی بدست می آید همان معادله لورنتزاست یعنی

$$\frac{d}{dt}m\mathbf{v} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \qquad (۱۸)$$

در پنجاه و یک سالگی لاگرانژ این احساس را داشت که به پایان قدرت خویش رسیده است. وضع او مثال بارزی از ایجاد ناتوانی کامل اعصاب در نتیجه کار فکری ممتد و مداوم بوده است. پاریسی ها او را هنگام معاشرت و مصاحبت آرام و مطبوع می دیدند اما هرگز پیشقدم مباحثه و اقدامی نمی شد. بندرت حرف می زد و غالباً گیج و مبهوت و غوطه ور در مالیخولیایی عمیق به نظر می رسید. در اجتماعات دانشمندان که در منزل لاوازیه تشکیل می شد غالباً درکنار پنجره‌ای می ایستاد و بخارج می نگریست و پشت به مهمانهایی می کرد که برای ادای احترام به او آمده بودند. هنگامی که به او اطلاع می دادند که فلان ریاضی دان به فلان تجسس مهم پرداخته‌است جواب می داد: « چه خوب شد، من اینکار را شروع کرده بودم و مجبور نیستم آن را خاتمه دهم». [۳]

[۳] تاریخ علوم، نوشته پیر روسو، ترجمه حسن صفاری

■ تمرین: نشان دهید که اگر برای توصیف موقعیت ذره یک مختصات دلخواه دیگر به‌کار ببرید مثل

$$q'_i := f_i(q_1, \cdots q_N, \dot{q}_1, \cdots \dot{q}_N) \tag{۱۹}$$

معادلات اویلر–لاگرانژ شکل شان به همان شکل قبلی باقی می ماند و تغییری نمی‌کند یعنی بازهم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial L}{\partial q'_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q'}_i} = 0 \tag{۲۰}$$

■ تمرین: اصل‌کمترین عمل را به‌کار ببرید ولی فرض‌کنیدکه لاگرانژی علاوه بر q_i و $\dot{q}_i$ به $\ddot{q}_i$ ها نیز بستگی داشته باشد. در این صورت شکل معادله اویلر–لاگرانژ را بدست آورید.

۴ صورت بندی هامیلتون از مکانیک

برای یک دستگاه با N درجه آزادی، درصورتبندی لاگرانژ N معادله دیفرانسیل درجه دوم داریم‌که این معادلات با دردست داشتن مختصات و سرعت های اولیه یک حل یکتا به عنوان مسیر درفضای پیکربندی ها بدست می دهند. هامیلتون صورت بندی متفاوت زیررااز‌مکانیک‌کلاسیک بدست داده است‌که ازبسیاری جهات بخصوص برای تعمیم نظری مکانیک‌کلاسیک به چهارچوب‌کوانتومی مناسب است.
برای توصیف این صورتبندی لازم است‌که نخست تکانه یاتکانه تعمیم یافته را تعریف‌کنیم: تکانه مزدوج با مختصه q_i به شکل زیرتعریف می شود:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{۲۱}$$

این تکانه با تکانه خطی لزوماً یکی نیست. متغیرهای (q_i, p_i) را یک جفت مختصه مزدوج بایکدیگر می‌گوییم. هامیلتونی دستگاه به صورت زیرتعریف می شود:

$$H := \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L. \tag{۲۲}$$

باید تاکید کنیم که در فرمول بندی هامیلتون متغیرهای مستقل q_i ها و p_i ها هستند. برای فهم این نکته می نویسیم

$$dH = \sum_{i=1}^{N} d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - dL = \sum_{i=1}^{N} d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i. \tag{۲۳}$$

اما جمله اول و آخر با توجه به تعریف تکانه مزدوج یعنی $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ یکدیگر را حذف می‌کنند و باقی می ماند:

$$dH = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i, \tag{۲۴}$$

که درجمله آخر از معادله اویلر–لاگرانژ استفاده کرده ایم. این رابطه نشان می دهد که اولاً متغیرهای مستقل ِ H برابرند با q_i و p_i، ثانیاً

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{۲۵}$$

این معادلات که $2N$ معادله دیفرانسیل درجه یک هستند معادلات هامیلتون نامیده می شوند و معادلات حرکت در صورت بندی هامیلتونی نامیده می شوند.

بامشخص کردن شرایط اولیه یعنی $(q(t_0), p(t_0))$ معادلات بالایک حل یکتا بدست می دهند که همان مسیرحرکت کلاسیک است.

حال سوال می‌کنیم که عبارت هامیلتونی چه ربطی به انرژی جنبشی و پتانسیل دارد. برای پاسخ به این سوال دقت می‌کنیم که لاگرانژی به صورت زیراست:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q). \tag{۲۶}$$

بنابراین

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - (T - V). \tag{۲۷}$$

دربسیاری از موارد انرژی جنبشی یک تابع درجه دو از سرعت هاست. یک قضیه ریاضی که اثبات آن را درضمیمه‌ی انتهای این درس می توانید ببنید، بیان می‌کند که برای چنین تابعی داریم .

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

درنتیجه برای این سیستم ها خواهیم داشت:

$$H = T + V. \tag{۲۸}$$

مثال : نوسانگر هارمونیک برای نوسانگرهارمونیک به جرم m و فرکانس ω، هامیلتونی برابراست با:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{۲۹}$$

q و p دو مختصه مزدوج هستند. معادلات هامیلتون عبارت خواهند بود از:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}\ , \qquad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 q. \tag{۳۰}$$

با ترکیب این دو معادله بدست می آوریم

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q^2 = 0, \tag{۳۱}$$

که معادله حرکت یک نوسانگر هارمونیک است.

■ **تمرین:** با استفاده از لاگرانژی یک ذره در پتانسیل کروی یعنی رابطه‌ی ۱۴، هامیلتونی و سپس معادلات هامیلتون را برای حرکت در چنین پتانسیلی بدست آورید.

■ **مثال : حرکت یک ذره در میدان الکترو مغناطیسی** دیدیم که لاگرانژی یک ذره در میدان الکترومغناطیسی به شکل زیراست:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}. \tag{۳۲}$$

بنابراین تکانه تعمیم یافته مزدوج با x_i برابرخواهد بود با:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + \frac{q}{c}A_i, \tag{۳۳}$$

و یا به شکل برداری

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}. \tag{۳۴}$$

بنابراین

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}}{m}, \tag{۳۵}$$

ودر نتیجه

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{p} - L = \mathbf{v}\cdot\left(m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right) - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\phi - \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} \qquad (۳۶) \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\phi. \qquad (۳۷) \end{aligned}$$

ازآنجاکه هامیلتونی می بایست تابعی از مختصات و تکانه ها باشد، شکل نهایی هامیلتونی عبارت خواهد بود از:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 + q\phi. \tag{۳۸}$$

۱.۴ کروشه پوآسون

برای هردوتابع $f,\ g$ که درروی فضای فاز تعریف می شوند می توان کروشه پواسون را به شکل زیرتعریف کرد:

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}. \tag{۳۹}$$

خواننده می تواند براحتی خواص زیر را برای کروشه پواسون ثابت کند:

$$\begin{aligned} &\{f,g\} = -\{g,f\} \\ &\{f,g+h\} = \{f,g\} + \{f,h\} \\ &\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\} \\ &\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{h,\{f,g\}\} = 0. \qquad (۴۰) \end{aligned}$$

هم چنین داریم

$$\{q_i,q_j\} = \{p_i,p_j\} = 0 \qquad \{q_i,p_j\} = \delta_{ij}. \tag{۴۱}$$

■ **تمرین:** درستی روابط زیر را نشان دهید. برای هر تابعِ $A(q,p)$:

$$\{q_i, A\} = \frac{\partial A}{\partial p_i}, \qquad \{p_i, A\} = -\frac{\partial A}{\partial q_i}. \tag{۴۲}$$

تمرین: مختصات و تکانه های یک ذره در دستگاه مختصات دکارتی را با (x, y, z, p_x, p_y, p_z) نشان می دهیم. هرگاه $L_x,\ L_y,\ L_z$ مولفه های تکانه زاویه ای باشند، نشان دهید که:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{i,j,k} L_k, \tag{۴۳}$$

$$\{L_i, x_j\} = \epsilon_{i,j,k} x_k, \tag{۴۴}$$

$$\{L_i, p_j\} = \epsilon_{i,j,k} p_k. \tag{۴۵}$$

بااستفاده ازکروشه پوآسون می توان معادلات حرکت را به شکل زیرنوشت:

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}$$
$$\frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}. \tag{۴۶}$$

هرگاه کمیتی (مشاهده پذیری) مثل $f(q,p,t)$ روی فضای فازتعریف شده باشد می توان تغییرات آن را روی مسیر حرکت بصورت زیربدست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \end{aligned} \tag{۴۷}$$

که درخط آخر از معادلات حرکت برحسب کروشه پوآسون استفاده کرده ایم. درصورتی که مشاهده پذیر f بستگی جداگانه ای به زمان نداشته باشد وتغییرات آن تنهابه دلیل تغییرات حالت دستگاه ایجادشود رابطه بالا تبدیل به رابطه زیرمی شود:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \tag{۴۸}$$

■ **تمرین:** $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ بردارهای مختصه و تکانه یک ذره هستند. نشان دهید که برای هر تابع $A(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ روابط زیر برقرارند:

$$\{\mathbf{p}, A\} = -\nabla_r A =: -\frac{\partial A}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial A}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial A}{\partial z}\hat{z} \tag{۴۹}$$

$$\{\mathbf{r}, A\} = \nabla_p A =: \frac{\partial A}{\partial p_x}\hat{x} + \frac{\partial A}{\partial p_y}\hat{y} + \frac{\partial A}{\partial p_z}\hat{z}. \tag{۵۰}$$

حال فرض کنید که تابع A را یک بار در نقطه $(\mathbf{r},\mathbf{p})$ و یک بار هم درنقطه $(\mathbf{r}+\mathbf{a},\mathbf{p})$ حساب کنیم. دراین صورت داریم

$$A(\mathbf{r}+\mathbf{a},\mathbf{p}) = A(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \mathbf{a}\cdot\nabla_r A = A(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \{\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}, A\}. \tag{۵۱}$$

اصطلاحاً می گوییم که $\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{p}$ مولد انتقال درمکان درجهت بردار یکه $\hat{\mathbf{a}}$ است.

به طریق مشابه می توانیم بگوییم که $\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r}$ مولد انتقال در تکانه درجهت بردارِ $\hat{\mathbf{a}}$ است.

■ **تمرین:** درهمان مسئله قبل اگر $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times p$ بردار تکانه زاویه ای باشد نشان دهید که

$$\{\mathbf{L}, A\} = -(\mathbf{r}\times\nabla_r + \mathbf{p}\times\nabla_p)A. \tag{۵۲}$$

حال فرض کنید که تابع A را یک بار در نقطه $(\mathbf{r},\mathbf{p})$ و یک بار هم درنقطه ای که نسبت به آن به اندازه کوچکی چرخیده است حساب می کنیم. فرض می کنیم که که دوران حول محور $\mathbf{n}$ به اندازه زاویه کوچک θ چرخیده است. دراین صورت نقطه ای که چرخیده است دارای مختصاتِ $(\mathbf{r}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}, \mathbf{p}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{p})$ است. بنااراین بدست می آوریم

$$\begin{aligned}
&A(\mathbf{r}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{r},\mathbf{p}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}) = A(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}A + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}A\\
= \quad & A(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \theta\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}\times\nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})A\\
= \quad & A(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \theta\mathbf{n}\cdot\{\mathbf{L}, A\}.
\end{aligned} \tag{۵۳}$$

بنابراین نشان دادیم که

$$A(\mathbf{r}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{r},\mathbf{p}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}) = A(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \theta\mathbf{n}\cdot\{\mathbf{L}, A\}. \tag{۵۴}$$

اصطلاحاً می گوییم $\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}$ مولد دوران حول محور $\mathbf{n}$ است.

۵ تقارن و نتایج آن

جهان اطراف ما و پدیده های فیزیکی که درآن اتفاق می افتند، از بعضی جهات متقارن است. به عنوان مثال اگر آزمایشی را امروز انجام دهیم و سپس فردا آن را تکرار کنیم، همان نتیجه ای را به دست خواهیم آورد که امروز بدست می آوریم. این امر ناشی از همگنی زمان است و یک

خاصیت مهم طبیعت است. البته فردا با امروز از بسیاری جهات مثل دماو رطوبت، میزان تابش آفتاب و وزش باد متفاوت است، به همین دلیل وقتی‌که از همگنی زمان سخن می‌گوییم می بایست توجه خود را به یک آزمایش ایده آل‌که عوامل فوق درآن موثر نیستند معطوف‌کنیم و یا اینکه آزمایش را درهمان شرایط دماو رطوبت و غیرآن تکرارکنیم. بنابراین می توانیم بگوییم رفتار یک سیستم تحت انتقال در زمان مطلق و یا رفتار یک سیستم بسته تحت انتقال در زمان متقارن است و تغییر نمی‌کند. این تقارن آنقدر واضح و بدیهی است‌که اهمیت آن راکمتر حس می‌کنیم، بااین وجود این تقارن بسیار مهم است و درواقع دلیل اصلی قانون بقای انرژی است. به همین ترتیب دنیای اطراف ما تحت انتقال در فضای مطلق متقارن است (می توان فضای بین‌کهکشان ها را فضای مطلق در نظرگرفت‌که درآن تقریبا هیچ عاملی روی یک آزمایش‌که انجام می دهیم اثر ندارد)، یا اینکه بگوییم رفتار یک سیستم بسته تحت انتقال در فضا متقارن است. اگر آزمایشی را در تهران انجام دهیم همان نتیجه ای را بدست می آوریم‌که درتبریز. خواهیم دید‌که این تقارن منجر به یک قانون بقای مهم یعنی قانون بقای تکانه خطی می شود. و بالاخره دنیای اطراف ما تحت دوران در فضای مطلق نیز متقارن است یا رفتار یک سیستم بسته تحت دوران در فضا متقارن است. اگر آزمایشی را رو به شمال انجام دهیم همان نتیجه ای را بدست می آوریم‌که رو به جنوب. البته اگر میدان مغناطیسی زمین دراین آزمایش تاثیرگذار باشد، دو نتیجه متفاوت بدست خواهند آمد، ولی دراین صورت سیستم بسته نیست. این تقارن منجر به قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای می شود. این خواص تقارنی هستند‌که تکرار پذیری آزمایش ها و اساساً قدرت پیش بینی علم فیزیک را امکان پذیر می‌کنند. دراین بخش هدف ما آن است‌که ارتباط تقارن و قوانین بقا را بفهمیم . نخست تبدیلاتی راکه ازآنها سخن‌گفتیم با دقت بیشتری معرفی می‌کنیم، سپس به معرفی مولد های این تبدیلات می پردازیم و دست آخر به رابطه تقارن و قوانین بقا می پردازیم.

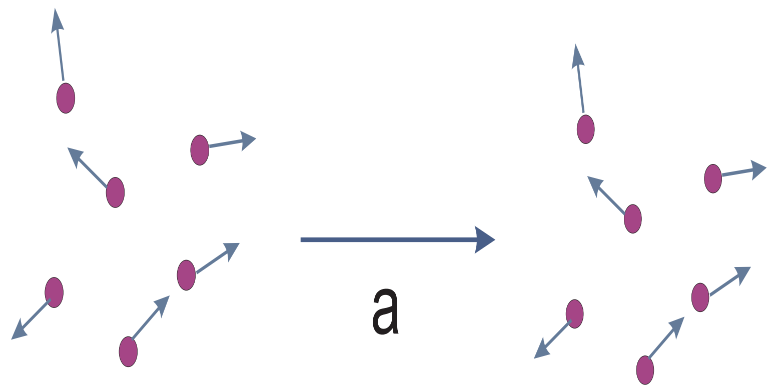
۱.۵ همگنی زمان و قانون بقای انرژی

برای یک سیستم بسته هامیلتونی تنها تابع مختصات و تکانه هاست و به طور مستقل به زمان بستگی ندارد. این امر ناشی از همگنی زمان است. بنابراین تغییرات هامیلتونی در طول زمان برابراست با:

$$\frac{dH}{dt} = \{H\ ,\ H\} = 0, \qquad (۵۵)$$

یعنی H یا همان انرژی یک ثابت حرکت است. بنابراین بقای انرژی ناشی از همگنی زمان است.

■ **تمرین:** با استفاده از صورت بندی لاگرانژی نیز رابطه همگنی زمان و بقای انرژی را نشان دهید. فرض‌کنید‌که لاگرانژی وابستگی صریحی به زمان ندارد و نشان دهید‌که‌کمیت $T+V$ ثابت حرکت خواهد بود.



شکل ۳: تقارن یک دستگاه تحت انتقال به این معناست که $H(\mathbf{r}+\mathbf{a},\mathbf{p}) = H(\mathbf{r},\mathbf{p})$. دقت کنید که تکانه ها تغییرنمی کنند.

۲.۵ همگنی فضا و قانون بقای اندازه حرکت خطی

دستگاهی در نظر بگیرید متشکل از N ذره که با مختصات $\mathbf{r}_1, \cdot\mathbf{r}_N$ و تکانه های $\mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N$ توصیف می شود. همگنی فضا به این معناست که اگر مکان همه ذرات را به اندازه بردارِ دلخواهِ $\mathbf{a}$ جابجا کنیم، ولی تکانه های آنها را دست نزنیم، (شکل ؟؟) هامیلتونی هیچ تغییری نمی کند، یعنی

$$H(\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N) = H(\mathbf{r}_1+\mathbf{a}, \cdots \mathbf{r}_N+\mathbf{a}; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N). \tag{۵۶}$$

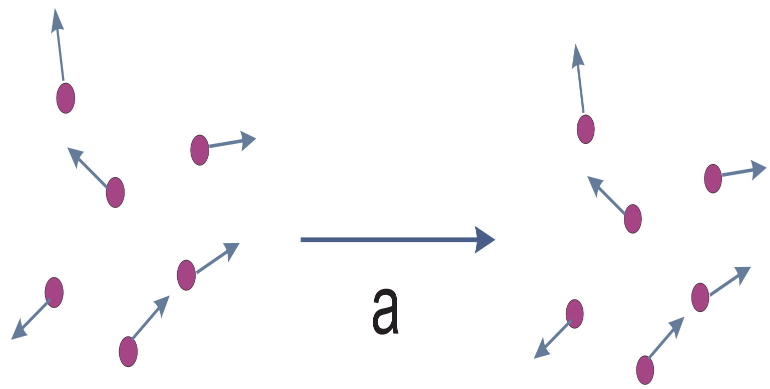
ازآنجا که تساوی فوق برای هر بردارِ $\mathbf{a}$ برقراراست، بردار $\mathbf{a}$ را بی نهایت کوچک می گیریم و طرف دوم را تا مرتبه اول برحسب $\mathbf{a}$ بسط می دهیم. بدست می آوریم

$$\begin{aligned} 0 &= H(\mathbf{r}_1+\mathbf{a}, \cdots \mathbf{r}_N+\mathbf{a}; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N) - H(\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N) = \mathbf{a}\cdot\sum_{i=1}^{N}\nabla_{\mathbf{r}_i}H \\ &= -\mathbf{a}\cdot\sum_{i=1}^{N}\{\mathbf{p}_i, H\} \end{aligned} \tag{۵۷}$$

بدلیل آنکه این تقارن برای تمام $\mathbf{a}$ ها برقراراست نتیجه می گیریم که

$$\{P, H\} = 0, \tag{۵۸}$$

که درآن $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i$ تکانه کل است. بنابراین تقارن تحت انتقال در مکان به این معناست که تکانه زاویه ای کل با هامیلتونی جابجا می شود.



شکل ۴: تقارن یک دستگاه تحت دوران به این معناست که $H(r,p) = H(r',p')$ که درآن r' و p' دوران یافته r و p است.

نتیجه این رابطه این است که

$$\frac{dP}{dt} = \{P, H\} = 0, \tag{۵۹}$$

یعنی تکانه خطی کل یک ثابت حرکت است.

۳.۵ همسانگردی فضا و قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای

دستگاهی در نظر بگیرید متشکل از N ذره که با مختصات $\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N$ و تکانه های $\mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N$ توصیف می شود. همسانگردی فضا به این معناست که اگر این دستگاه را به اندازه زاویه θ بچرخانیم، هامیلتونی هیچ تغییری نمی‌کند. چرخش دستگاه به این معناست که هم بردارهای مکان و هم بردارهای تکانه به اندازه زاویه θ می چرخند. (شکل ؟؟)

تقارن تحت دوران به این معناست که هامیلتونی تحت دوران مختصات و تکانه ها تغییر نمی‌کند. یعنی

$$\begin{aligned} 0 &= H(\mathbf{r}_1 + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1 + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}_N) - H(\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N) \\ &= \theta\hat{\mathbf{n}}\cdot(\sum_i \mathbf{r}_i \times \nabla_{\mathbf{r}_i} + \mathbf{p}_i \times \nabla_{\mathbf{p}_i})H \\ &= -\theta\mathbf{n}\cdot\{\mathbf{L}, H\}. \end{aligned} \tag{۶۰}$$

این امر به این معناست که

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \{\mathbf{L}, H\} = 0. \tag{۶۱}$$

بنابراین بقای تکانه زاویه ای نتیجه مستقیم همسانگردی فضاست.

۶ مودهای نوسانی و برانگیختگی ها

این بخش مدخل مناسبی است هم برای فهمیدن میدان کلاسیک و هم برای فهمیدن مفهوم برانگیختگی های شبه ذره ای [۴]. برانگیختگی های جمعی [۵]. همان چیزهایی هستند که پس از کوانتش خاصیت های ذره ای از خود نشان می دهند و فونون یا فوتون یا ذرات دیگر نامیده می شوند.

شکل ۷

یک دستگاه از جرم و فنر را نشان می دهد. پارامترها همه روی شکل مشخص شده اند. شرایط مرزی برای سادگی پریودیک در نظر گرفته شده اند. یعنی در همه جا نقطه $N+n$ ام همان نقطه n ام است. این دستگاه مدل ساده ای از اتم های یک جامد یک بعدی است. از دید میکروسکوپی جامد خیلی پیچیده تر از یک سیستم جرم و فنر است اما این مدل به عنوان تقریب اولیه خیلی خوب است. خیلی از خصوصیات یک جامد مثل ظرفیت گرمایی ویژه اش یا قابلیت اش را برای انتشار صوت یا دیگر خواص مکانیکی اش را می توان با چنین مدل ساده ای توضیح داد و لازم نیست نگران جزییات میکروسکوپی و اتمی جامد باشیم. لاگرانژی این دستگاه چنین است:

$$L = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} m\dot{x}_n^2 - \frac{1}{2} k(x_{n+1} - x_n - a)^2. \tag{۶۲}$$

هرگاه محل تعادل جرم n ام $\overline{x}_n = na$ باشد می توانیم میزان جابجایی این جرم را از محل تعادل اش با q_n نشان دهیم و بنویسیم

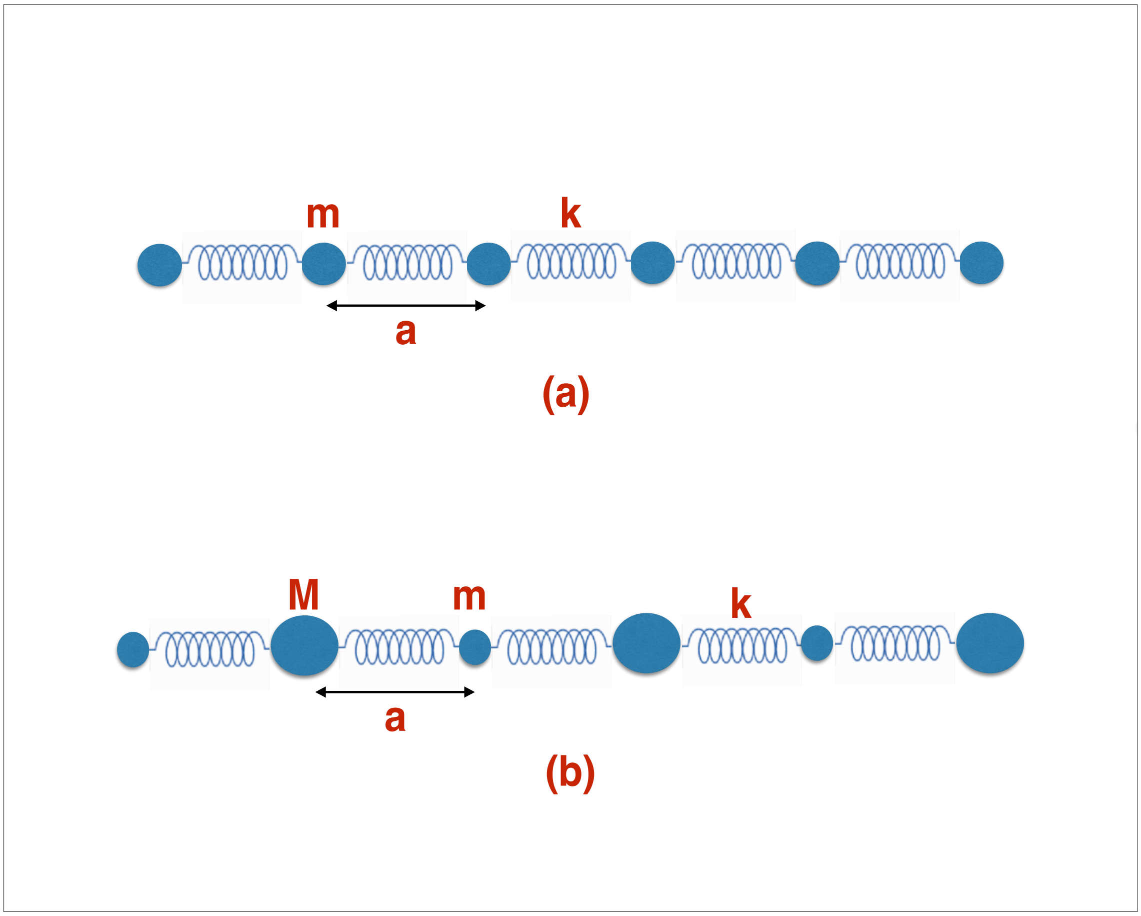
$$q_n := x_n - \overline{x}_n = x_n - na \tag{۶۳}$$

و در نتیجه لاگرانژی به شکل زیر در می‌آید:

$$L = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} m\dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} k(q_{n+1} - q_n)^2. \tag{۶۴}$$

[۴] Particle Like Excitations

[۵] Collective Excitations



شکل ۵: a یک سیستم از جرم های یکسان و فنر های یکسان. b یک سیستم از جرم های ناهمسان و فنرهای یکسان. مربوط به مسئله یک.

معادله حرکت جرم ها از معادله اویلر و لاگرانژ بدست می آید و برابر است با:

$$m\ddot{q}_n = K_s(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n). \tag{۶۵}$$

این معادله نشان دهنده این است که حرکت ذره n ام به حرکت ذرات کناری اش مربوط است و همین طور حرکت ذرات کناری هم به حرکت همسایگان آنها مربوط است و الا اخر. اگر چه جرم این ذرات مشخص و برابر با m است اما انرژی و تکانه آنها مشخص نیست و دائما تغییر می کند. حال می توانیم به شیوه دیگری در باره این دستگاه فکر کنیم به این ترتیب که متغیرهای دینامیکی جدیدی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$q_n := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi nk}{N}} Q_k, \qquad k = 0, 1, \cdots N-1. \tag{۶۶}$$

می توان متغیرهای دینامیکی جدید را بر حسب متغیرهای مربوط به ذرات نوشت:

$$Q_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} q_n. \tag{۶۷}$$

متغیرهای Q_k مختلط هستند اما از آنجا که q_n حقیقی است می دانیم که

$$Q_k = Q_{-k} \equiv Q_{N-k}, \tag{۶۸}$$

بنابراین تعداد متغیرها بیشتر از تعداد قبلی نیست. این متغیرها مربوط به یک ذره خاص نیستند بلکه ترکیبی از مکان های همه ذرات به یک شکل خاص هستند. اما یک خاصیت خیلی مهم دارند و آن این که معادله حرکت خیلی ساده ای دارند. در واقع معادله حرکت آنها به شکل زیر است:

$$m\ddot{Q}_k = K_s(e^{\frac{2i\pi k}{N}} + e^{-\frac{2i\pi k}{N}} - 2)Q_k = -4K_s \sin^2(\frac{\pi k}{N})Q_k, \tag{۶۹}$$

یا

$$\ddot{Q}_k = \omega_k^2 Q_k \tag{۷۰}$$

که در آن

$$\omega_k^2 = 4K_s \sin^2(\frac{\pi k}{N}). \tag{۷۱}$$

به این رابطه، رابطه پاشندگی [۶] می گویند و در درس های آینده خواهیم دید که اهمیت خیلی زیادی دارد. تجزیه تحلیلی که تا کنون انجام دادیم نشان می دهد که متغیرهای جدید از هم مستقل هستند. در واقع حل این معادله های مستقل خیلی آسان است و بدست می آوریم:

$$Q_k(t) = A_k e^{i\omega_k t} + B_k e^{-i\omega_k t}, \tag{۷۲}$$

که در آن A_k ها و B_k ها بستگی به شرایط اولیه دارند. شرایط اولیه می تواند به گونه ای باشد که همه A_k ها و B_k به جزی یکی صفر باشد. مثلا تنها می توان داشت:

$$Q_{k_0} = Ae^{i\omega_{k_0} t}. \tag{۷۳}$$

در این صورت با استفاده از رابطه ۷۴ می فهمیم که همه q_n ها با فرکانس ω_{k_0} و به صورت هماهنگ هر کدام با یک دامنه مشغول نوسان هستند. این وضعیت را یک مد جمعی [۷] یا یک حالت برانگیختگی جمعی [۸] می نامیم. در این مُد همه سیستم با یک فرکانس نوسان می‌کند. حال می

[۶] Dispersion Relation
[۷] Collective mode
[۸] Collective Excitation

توانیم از خود بپرسیم که وقتی که سیستم در یک مُد مشخص قرار دارد مقدار انرژی آن چقدر است. برای این کار هامیلتونی دستگاه بس ذره ای را بر حسب متغیرهای جدید می نویسیم. البته می بایست متغیرهای جدید تکانه را نیز به شکل زیر تعریف کنیم:

$$p_n := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} P_k, \qquad k = 0, 1, \cdots N-1. \tag{۷۴}$$

و

$$P_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi nk}{N}} p_n, \tag{۷۵}$$

زیرا تنها در این صورت است که جفت متغیرهای تکانه و مکان جدید همچنان نسبت به هم کانونیک باقی می مانند. یعنی داریم:

$$\{Q_k, Q_{k'}\} = 0, \qquad \{P_k, P_{k'}\} = 0, \qquad \{Q_k, P_{k'}\} = \delta_{k.k'}. \tag{۷۶}$$

براحتی از روی معادله ؟؟ معلوم می شود که:

$$H = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2m}|P_k|^2 + \omega_k^2 |Q_k|^2. \tag{۷۷}$$

معادلات حرکت یعنی

$$\dot{Q}_n = \{Q_n, H\}, \qquad \dot{P}_n = \{P_n, H\}, \tag{۷۸}$$

منجر به روابط زیر می شوند:

$$m\dot{Q}_k = P_k, \qquad \dot{P}_k = -m\omega_k^2 Q_k. \tag{۷۹}$$

بنابراین هامیلتونی برحسب متغیرهای جدید مجموعی از نوسانگرهای هارمونیک مستقل هر کدام با فرکانس مخصوص به خود است. وقتی که فقط یکی از این مُد ها مثلا مُد k_0 تحریک شده است ، داریم:

$$H = \frac{1}{2m}|P_{k_0}|^2 + \omega_{k_0}^2 |Q_{k_0}|^2 = \frac{1}{2}A^2 m^2 \omega_{k_0}^2. \tag{۸۰}$$

این عبارت انرژی کل دستگاه را وقتی که همه ذرات در حال حرکت جمعی هستند و کل دستگاه در یک مُد برانگیخته قرار دارد به دست می دهد. این انرژی بسته به مقدار پارامتر اولیه A هر مقداری می تواند داشته باشد ولی فرکانس نوسان آن مقدار مشخص و کوانتیده ای است.

۷ مسئله ها:

مسئله اول: یک شبکه یک بعدی از جرم و فنر در نظر بگیرید. جرم ها یک درمیان برابرند با m وM و ثابت فنرها همه برابراست با k. رابطه پاشندگی این شبکه را بدست آورید. حد این رابطه وقتی‌که $M \longrightarrow \infty$ چیست؟ از نظر فیزیکی پاسخ خود را در این حد تفسیرکنید.

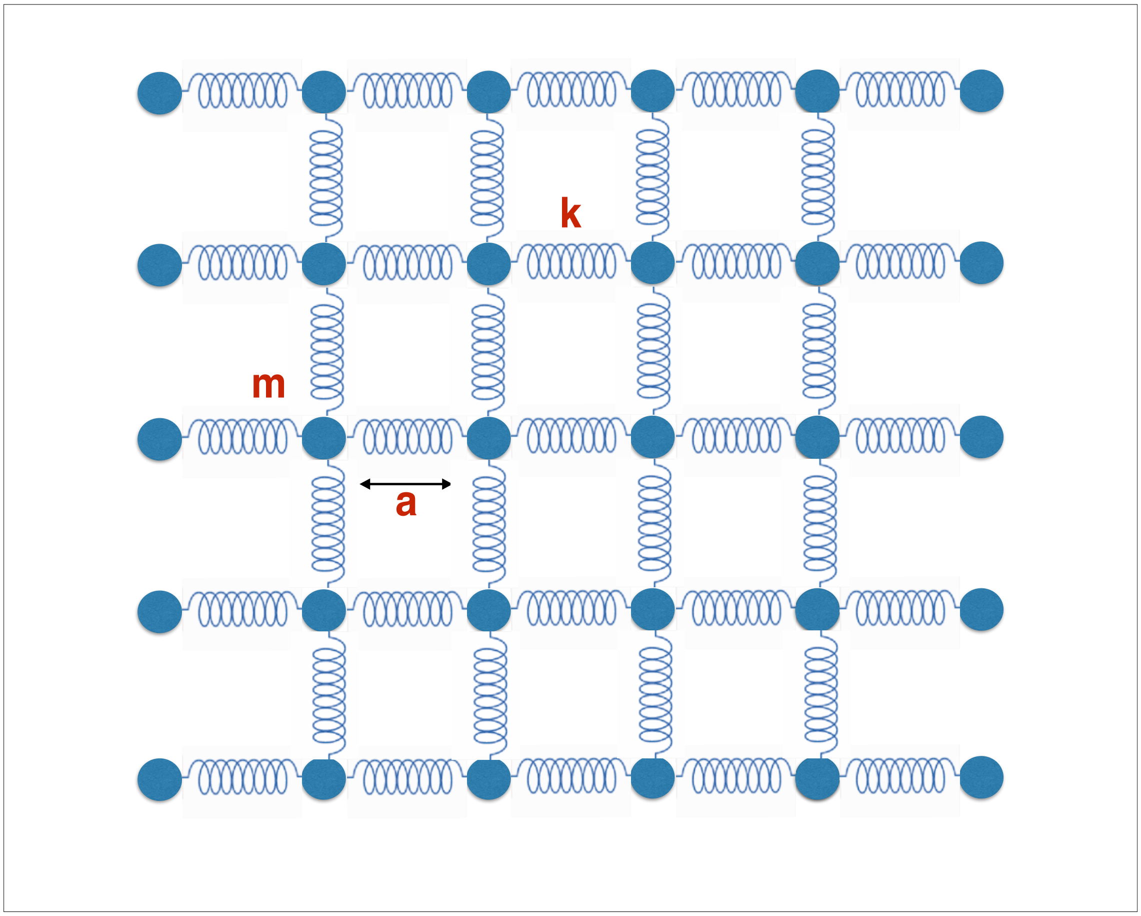
مسئله دوم : یک شبکه یک بعدی از جرم و فنر در نظر بگیرید. جرم ها همه برابربا m ولی ثابت فنرها یک در میان برابرند با k و K. رابطه پاشندگی این شبکه را بدست آورید. حد این رابطه وقتی‌که $K \longrightarrow \infty$ چیست؟ از نظر فیزیکی پاسخ خود را در این حد تفسیرکنید.

حد این رابطه وقتی‌که $K \longrightarrow 0$چیست؟ از نظر فیزیکی پاسخ خود را تفسیرکنید.

مسئله سوم: یک شبکه 2 بعدی مکعبی در نظر بگیرید. در هر نقطه از شبکه یک جرمm قرارگرفته است و هر جرم با فنرهای با ثابت k به نزدیک ترین همسایه هایش جفت شده است. شکل (؟؟).

رابطه پاشندگی را برای این سیستم بدست آورید. در حد k های بزرگ شکل این رابطه پاشندگی به چه صورت است؟

مسئله چهارم : یک شبکه دوبعدی‌که سلول هایش به شکل شش ضلعی منتظم هستند در نظر بگیرید. در هر نقطه از شبکه یک جرمm قرار گرفته است و هر جرم با فنرهای با ثابت k به نزدیک ترین همسایه هایش جفت شده است. رابطه پاشندگی را برای این سیستم بدست آورید. در حد k های بزرگ شکل این رابطه پاشندگی به چه صورت است؟



شکل ۶: یک سیستم از جرم های یکسان و فنر های یکسان در دو بعد.