تقارن پیمانه ای و معرفی کوتاهی از مدل استاندارد

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۹ بهمن ۱۳۹۶

۱ مقدمه

دراین درس با تقارن پیمانه ای آشنا می شویم. تقارن پیمانه ای مفهومی است که نخستین بار در نظریه الکترومغناطیس مشاهده شد. اما بعد ها وقتی که در دهه هفتاد میلادی این تقارن به تقارن پیمانه ای غیر آبلی تعمیم داده شد معلوم شد که می توان از تقارن پیمانه ای به عنوان یک اصل راهنما برای صورت بندی برهم کنش های جدید و بنیادی طبیعت استفاده کرد. امروزه می دانیم که برهم کنش قوی کوارک ها را می توان به صورت یک نظریه تعمیم یافته از الکترودینامیک موسوم به کرومودینامیک توصیف کرد. دراین نظریه تقارن پیمانه ای آبلی [۱] جای خود را به تقارن پیمانه ای غیرآبلی [۲] و بارالکتریکی جای خود را به بارهای جدیدی که آنها را بدلیل نداشتن یک اسم بهتر بارهای رنگی [۳] می نامیم، داده است. برخلاف الکترومغناطیس که درآن بار الکتریکی فقط دونوع مثبت و منفی به خود می گیرد، بارهای رنگی می توانند در ۳ نوع متفاوت ظاهر شوند.

خواننده می تواند برای مطالعه کاملتری درباره نتایج ناشی از نظریه های پیمانه ای به کتاب های ذرات بنیادی مراجعه کند. هدف ما دراین درس تنها مطالعه ساختمان کلی این نظریه ها به عنوان یک نظریه میدان کلاسیک است. کوانتش این میدان ها چه از روش کانونیک و چه از روش انتگرال مسیر، اگرچه طبیعتاً با پیچیدگی های فنی بیشتر، مطابق با همان اصول شناخته شده انجام می شود. در این درس به کوانتش این میدان ها نخواهیم پرداخت.

---

[۱] Abelian Gauge Symmetry

[۲] Non-Abelian Gauge Symmetry

[۳] Color Charge

۲ نظریه پیمانه ای آبلی

لاگرانژی دیراک را که توصیف‌کننده الکترون است در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi \qquad (۱)$$

این لاگرانژی دارای تقارن زیر است:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) := e^{ie\alpha}\psi(x) \qquad (۲)$$

باید دقت‌کنیم که α یک ثابت است که برای همه نقاط فضا زمان یکسان است به همین جهت این تقارن را تقارن پیمانه ای سرتاسری می نامند. ضریب ثابت e تنها برای راحتی اضافه شده است. این تقارن حتی وقتی که پتانسیلی به صورت $V(\overline{\psi}\psi)$ هم به این لاگرانژی اضافه‌کنیم وجود خواهد داشت. بنا بر قضیه نوتر این تقارن منجر به جریان پایسته زیر می شود:

$$J^{\mu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \qquad (۳)$$

از روی معادله حرکت نیز می توان دید که این جریان پایسته است و درمعادله $\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$ صدق می‌کند. از جمله چگالی احتمال نیز برابر است با $\rho(x) = \psi^{\dagger}\psi$ و این چگالی احتمال که یک مشاهده پذیر فیزیکی است نسبت به تبدیل (۲) ناورداست. حال فرض‌کنید که فاز α را درمعادله (2) را ثابت نگیریم . برای توجیه این خواسته خود می توانیم بگوییم که مشاهده پذیرهایی مثل $\rho(x)$ حتی اگر فاز α تابعی از x باشند، بازهم ناوردا باقی می مانند. یعنی اینکه مشاهده پذیرهایی مثل $\rho(x)$ یا به طورکلی تر $J^{\mu}(x)$ نسبت به تبدیل

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \qquad (۴)$$

تابع موج $\psi(x)$ خود یک مشاهده پذیر نیست بلکه یک مشاهر مشاهده پذیری مثل جریان (۳) نسبت به این تغییر فاز ناورداست و بنابراین تبدیل (۴) نیز می بایست یک تبدیل تقارنی باشد چراکه اگر بجای $\psi(x)$ تابع موج $\psi'(x)$ را داشته باشیم با هیچ نوع اندازه‌گیری نمی توانیم آن ها را از هم تشخیص دهیم. اما با نگاه دقیق تر متوجه می شویم که در این حالت‌کلی تر دیگر $\psi(x)$ و $\psi'(x)$ در یک معادله حرکت صدق نمی‌کنند، چراکه این تبدیل لاگرانژی را تغییر می دهد. بنابراین به نظر می رسد که یک تقارنِ از نظر فیزیکی کاملا موجه داریم که معادله حرکت آن را نمی فهمد و آن را بهم می زند!

آیا ممکن است که معادله حرکت اشتباه یا ناکامل باشد؟ آیا ممکن است که این ناهماهنگی معادله حرکت با تقارن نشانه ای از یک معادله کامل تر باشد که ما می بایست آن را پیداکنیم؟ بیایید به تقارن بها بدهیم و آن را اصل بدانیم و ببینیم به‌کجا می رسیم. می خواهیم کاری‌کنیم که معادله دیراک یعنی معادله حرکت الکترون نه تنها تحت تبدیلات پیمانه ای سرتاسری [۴] بلکه تحت تبدیلات موضعی [۵] نیز شکل خود را حفظ

[۴] Global Gauge Transformation

[۵] Local Gauge Transformation

کند. اگر کمی دقت کنیم متوجه می شویم که نکته اصلی در تقارن پیمانه ای سرتاسری آن بود که ψ و $\partial_\mu\psi$ هر دو به یکسان تبدیل می شدند. یعنی

$$\psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha}\partial_\mu\psi(x) \tag{۵}$$

و هرگاه α وابسته به x باشد رابطه بالا دیگر صحیح نخواهد بود. ایده اصلی تقارن پیمانه ای موضعی آن است که می توان با جایگزینی مشتق های هموردا به جای مشتق های معمولی کاری کرد که رابطه (5) کماکان معتبر باقی بماند. این کار نیازمند معرفی یک میدان برداری است که آن را با A_μ نشان می دهیم . خواهیم دید که درنظریه جدیدی که این تقارن موضعی را دارد A_μ نقش چهاربردار میدان الکترومغناطیسی را بازی می کند . مشتق هموردا رابه شکل زیر تعریف می کنیم :

$$D_\mu\psi := (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \tag{۶}$$

ضریب ie تنها به خاطر راحتی دراین جا قرارداده شده است. حال می بایست تبدیل میدان A_μ را چنان تعیین کنیم که رابطه (5) همچنان برقرارباقی بماند یعنی

$$\psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \quad \longrightarrow \quad D'_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha}D_\mu\psi(x) \tag{۷}$$

که درآن $D'_\mu = \partial_\mu - ieA'_\mu$ و A'_μ تبدیل یافته میدان A_μ است . هرگاه رابطه بالا را بازکنیم و طرفین را ساده کنیم خواهیم دید که تبدیل میدان A_μ به شکل زیر است :

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha \tag{۸}$$

بنابراین روابط زیر مجموعاً تبدیلات پیمانه ای را تشکیل می دهند.

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) := e^{i\alpha(x)}\psi(x) \qquad A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \tag{۹}$$

با توجه به رابطه (7) می توان فرم جدید لاگرانژی را که دارای تقارن پیمانه ای موضعی است نوشت :

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi \tag{۱۰}$$

هرگاه این لاگرانژی را بازکنیم می بینیم که دارای جملات زیر است :

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi - e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi - J^\mu A_\mu. \tag{۱۱}$$

جمله $A_\mu J^\mu$ نشان می دهد میدان برداری A_μ با جریان J^μ جفتیده شده است و این جفتیدگی به همان شکلی است که ما از جفتیدگی چهاربردار جریان الکتریکی و چهاربردار پتانسیل الکترومغناطیسی انتظار داریم. بنابراین تقاضای تقارن پیمانه ای موضعی ما را به طور طبیعی به

معرفی چهاربردار الکترومغناطیسی و تنظیم برهم‌کنش آن با جریان الکتریکی رهنمون شده است. تنها چیزی که برای کامل کردن این تصویر باقی مانده است آن است که می بایست جملاتی پیمانه ناوردا که درعین حال شامل مشتقات A_μ باشند به لاگرانژی اضافه کنیم زیرا به شکل فعلی هرگاه از لاگرانژی بخواهیم معادلات حرکت میدان A_μ را بدست آوریم با توجه به این که لاگرانژی شامل هیچ مشتقی از A_μ نیست تنها یک معادله قیدی بدست می آوریم که میدان A_μ را درهر نقطه از فضا زمان برحسب میدان ψ بیان می کند و حال آنکه ما می خواهیم میدان A_μ یک میدان مستقل باشد و دینامیک خاص خود را داشته باشد.

■ با استفاده از لاگرانژی (۱۱) معادله حرکت مربوط به ψ و A_μ را بدست آورید. توضیح دهید که چرا معادله بدست آمده برای میدان پیمانه ای A_μ قابل قبول نیست.

برای اینکه لاگرانژی (۱۱) را تصحیح کنیم، به نکته زیر دقت می کنیم. از رابطه (31) می فهمیم که جمله ای که شامل مشتقات درجه اول میدان A_μ باشد و درعین حال ناوردای پیمانه ای باشد به شکل زیر است :

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (۱۲)$$

مسلم است که خود $F_{\mu\nu}$ را نمی توان به لاگرانژی اضافه کرد زیرا با ناوردایی نسبیتی ناسازگار است . ساده ترین جمله ای که هم ناوردای نسبیتی و هم ناوردای پیمانه ای باشد جمله ای است با ضریبی از $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. بنابراین لاگرانژی کامل را به صورت زیر می نویسیم :

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (۱۳)$$

این لاگرانژی به طورکامل میدان مادی ψ و میدان الکترومغناطیسی A_μ و برهم‌کنش آنها را با یکدیگر توصیف می کند. بنابراین بازهم ناوردایی نسبیتی و ناوردایی پیمانه ای به طور طبیعی ما را به میدان الکترومغناطیسی و چگونگی برهم‌کنش آن با ماده رهنمون شده است.
رابطه (۱۲) را به صورت بهتری می توان استخراج کرد که حکمت آن ممکن است الان چندان روشن نباشد اما در آینده وقتی به گروه های غیرآبلی می پردازیم روشن خواهد شد. نشان داده ایم که تحت تبدیل پیمانه ای تابع موج و مشتق هموردا به شکل زیر تبدیل می شوند:

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \qquad , \qquad D'_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x). \qquad (۱۴)$$

مقایسه این دو رابطه با هم نشان می دهد که

$$D'_\mu e^{i\alpha(x)}\psi(x) = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x). \qquad (۱۵)$$

از آنجا که این رابطه برای هر تابع موجی برقرار است، به این معناست که بین مشتق ها رابطه زیر برقرار است:

$$D'_\mu e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha(x)}D_\mu. \qquad (۱۶)$$

و یا

$$D'_\mu = e^{i\alpha(x)} D_\mu e^{-i\alpha(x)} \quad (۱۷)$$

به این ترتیب تبدیل مشتق هموردا تعیین می شود. حال می توان دریافت که :

$$[D'_\mu, D'_\nu] = e^{i\alpha(x)} [D_\mu, D_\nu] e^{-i\alpha(x)} \quad (۱۸)$$

- با توجه به شکل صریح D_μ عبارت $[D_\mu, D_\nu]$ را حساب کنید و نشان دهید که متناسب است با $F_{\mu,\nu}$. از آنجا که $e^{i\alpha(x)}$ یک تابع عددی اسکالر است و با توجه به رابطه (۱۸) نتیجه می گیریم که $F_{\mu,\nu}$ یک ناوردای پیمانه ای است.

- با استفاده از لاگرانژی (۱۳) معادله حرکت مربوط به ψ و A_μ را بدست آورید. معادلات بدست آمده را معنا کنید.

- تمرین: لاگرانژی زیر یک میدان کلاسیک و مختلط ϕ را توصیف می کند:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (۱۹)$$

معادله حرکت میدان ϕ برابر است با :

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \quad (۲۰)$$

الف: این لاگرانژی دارای تقارن پیمانه ای سرتاسری است. آن را چنان اصلاح کنید که تقارن پیمانه ای موضعی داشته باشد. سپس معادلات میدان را بدست آورید و آن ها را معنا کنید.

- **کمی ریاضیات:** تبدیل $\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi$ یک تبدیل آبلی و مربوط به گروه $U(1)$ است. اگر دو تبدیل پشت سرهم یکی با $e^{i\alpha}$ و دیگری با $e^{i\beta}$ انجام دهیم معادل با یک تبدیل با $e^{i\alpha+i\beta}$ است . مجموعه این فازها گروه $U(1)$ را تشکیل می دهند و نظریه های میدانی که دارای این نوع تقارن هستند، نظریه های با تقارن پیمانه ای $U(1)$ [۶] خوانده می شوند.

۱.۲ تقارن پیمانه ای برای میدان اسکالر

از آنجا که برهم کنش الکترومغناطیسی بین الکترون ها و کوارک ها صورت می گیرد که همگی فرمیون هستند و در معادله دیراک صدق می کنند، ما تقارن پیمانه ای $U(1)$ را برای معادله دیراک و میدان دیراک توضیح دادیم. اما می توان به همان شکل تقارن پیمانه ای را برای یک میدان

[۶] U(1) Gauges Symmetry

اسکالر نیز بررسی کرد. نکته اساسی همواره این است که می خواهیم مشتق معمولی میدان را تبدیل به مشتق هموردا کنیم، آنچنان که هم میدان و هم مشتق همموردای آن هر دو به یک صورت تبدیل شوند. بنابراین برای یک میدان اسکالر هم باید داشته باشیم:

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x) \qquad , \qquad D_\mu\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi(x) \qquad , \tag{۲۱}$$

و این کار با تعریف مشتق هموردا به همان صورتی که در بالا گفتیم انجام می شود. به این ترتیب تعریف مشتق هموردا ربطی به میدانی که روی آن اثر می‌کند ندارد. در نتیجه وقتی با یک میدان اسکالر سر و کار داریم و می خواهیم آن را تحت تبدیل پیمانه ای موضعی ناوردا کنیم، نهایتا به این جا می رسیم

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi^* D_\mu\phi - m^2\phi^*\phi - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu,\nu}F^{\mu,\nu}. \tag{۲۲}$$

از نظر تاریخی کشف معادلات الکترومغناطیس توسط ماکسول در قرن نوزدهم صورت گرفت. اما کشف تقارن پیمانه ای به شکلی که بیان کردیم محصول قرن بیستم و فیزیک مدرن است. می شد این تقارن را فقط یک اتفاق زیبا دانست که در گوشه از قوانین طبیعت وجود دارد اما پیشرفت های بعدی در فیزیک نیمه دوم قرن بیستم نشان داد که تقارن پیمانه ای نه یک اتفاق بلکه یک اصل بنیادین است که مبنای برهم‌کنش های طبیعی در عمیق ترین لایه های آن است. این ادارک فوق العاده عمیق ناشی از کاربرد ریاضیات جدید در فیزیک و تعمیم تقارن پیمانه ای از گروه آبلی $U(1)$ به گروه های غیر آبلی بود که در سال ۱۹۵۴ توسط چن نینگ یانگ فیزیکدان چینی الاصل امریکایی [۷] و میلز [۸] انجام شد. ده سال بعد از کار یانگ و میلز معلوم شد که نظریه های پیمانه ای غیر آبلی با انتخاب گروه های مناسب می توانند معادلات و روابط حاکم بر برهم‌کنش های بنیادین طبیعت بیان کنند. به بیان دیگر با شروع از یک گروه پیمانه ای مناسب می توانیم به تعمیمی از معادلات ماکسول برسیم که نشان دهنده برهم‌کنش میدان های تعمیم یافته ای باشند که ذرات را با این بار نه با نیروی الکترومغناطیسی بلکه با نیروهای هسته ای ضعیف و قوی به هم پیوند می دهند. در ادامه همین نوع نگاه بود که سرانجام توسط عبدالسلام [۹] ، واینبرگ [۱۰] و گلاشو [۱۱] نظریه ای تدوین شد که قادر بود نیروی هسته ای ضعیف را با نیروی الکترومغناطیسی پیوند دهد و مدل استاندارد ذرات بنیادی را پدید آورد که امروزه مبنای توصیف و تبین همه برهم‌کنش ها در دنیای ذرات است. تئوری یانگ–میلز داستان نظریه های پیمانه ای غیرآبلی است که اکنون به آن می پردازیم.

---

[۷] Chen Ning Yang
[۸] Robert Mills
[۹] Mohammad Abdus Salam
[۱۰] Steven Weinberg
[۱۱] Sheldon Glashow

۳ نظریه پیمانه ای غیر آبلی

تقارن پیمانه ای که در بخش قبلی ازآن سخن گفتیم تقارن پیمانه ای آبلی خوانده می شود. حال به تعمیم این تقارن به گروه های غیر آبلی می پردازیم. برای سادگی یک میدان N مولفه ای اسکالر درنظر می گیریم. این میدان را به شکل

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ \phi_N \end{pmatrix} \tag{۲۳}$$

لاگرانژی میدان نیز به شکل زیر است:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi \tag{۲۴}$$

معادلات حرکت این میدان به شکل زیر خواهد بود:

$$(\Box + m^2)\Phi = 0 \tag{۲۵}$$

که نشان دهنده این است که هر N مولفه میدان درمعادله کلاین گوردون با جرم m صدق می کنند.

حال می دانیم که این لاگرانژی تحت تبدیل زیر ناوردا ست :

$$\Phi(x) \longrightarrow g\Phi(x) \tag{۲۶}$$

که درآن $g \in SU(N)$ یک عضو دلخواه ازگروه‌است که بستگی فضا زمانی ندارد. مسلم است که این تقارن متکی به ثابت بودن عنصر g است. بنابرقضیه نوتر می توان جریان های پایسته ناشی از این تقارن را بدست آورد. هرگاه عنصر g را به شکل زیر بنویسیم

$$g = e^{iq\theta_a T_a} \tag{۲۷}$$

که درآن T_a ها مولد های گروه و θ_a ها پارامترهای گروه و q یک ثابت است که برای راحتی بعدی اضافه شده است. مقدار q درحقیقت مقیاس بار ناشی از این تقارن و یا بار الکتریکی گونه ای است که شدت این نوع برهم کنش را تعیین می کند. از قضیه نوتر براحتی بدست می آوریم که جریان های ناشی از این تقارن عبارتند از :

$$J_a^\mu = iq(\partial_\mu \Phi^\dagger T_a \Phi - \Phi^\dagger T_a \partial_\mu \Phi). \qquad (۲۸)$$

برای آنکه این تقارن سرتاسری را موضعی کنیم درست مثل حالت آبلی مشتق های معمولی را به مشتق های هموردا تبدیل می کنیم بدین صورت که قرار می دهیم :

$$D_\mu \Phi := (\partial_\mu - iqA_\mu)\Phi, \qquad (۲۹)$$

که در آن q یک پارامتر است که مقیاس عددی بارهای رنگی یا به عبارت بهتر شدت برهم کنش آنها را با میدان پیمانه ای تعیین می کند. باید دقت کنیم که دراین جا A_μ یک ماتریس هرمیتی N بعدی است و درکنار ∂_μ نیز یک ماتریس واحد N بعدی قرار دارد که صراحتاً نوشته نشده است. حال می بایست تبدیل میدان A_μ را چنان تعیین کنیم که مشتق هموردا ی میدان نیز مثل خود میدان تبدیل شود یعنی

$$\Phi'(x) = g(x)\Phi(x) \quad \longrightarrow \quad D'_\mu \Phi'(x) = g(x) D_\mu \phi(x). \qquad (۳۰)$$

که درآن $D'_\mu = \partial_\mu - iqA'_\mu$ و A'_μ تبدیل یافته میدان A_μ است . هرگاه رابطه بالا را بازکنیم و طرفین را ساده کنیم خواهیم دید که تبدیل میدان A_μ به شکل زیر است :

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} - \frac{i}{q}(\partial_\mu g)g^{-1} \qquad (۳۱)$$

بنابراین تبدیل غیر آبلی به شکل زیراست :

$$\Phi \longrightarrow g\Phi \qquad A_\mu \longrightarrow gA_\mu g^{-1} - \frac{i}{q}(\partial_\mu g)g^{-1}. \qquad (۳۲)$$

رابطه

$$D'_\mu g\Phi = gD_\mu \Phi$$

را به این شکل نیز می توان بیان کرد که

$$D'_\mu = gD_\mu g^{-1}$$

و یا

$$D_\mu \longrightarrow gD_\mu g^{-1}$$

. این رابطه به ماکمک می کند که مشابه تانسور شدت میدان رادرحالت غیر آبلی براحتی بنویسیم :

$$F_{\mu\nu} := -[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\nu - iqA_\nu, \partial_\mu - iqA_\mu] = iq\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + iq[A_\mu, A_\nu]\right) \qquad (۳۳)$$

با توجه به تبدیل D_μ واضح است که $F_{\mu,\nu}$ ماتریسی است که به شکل ساده زیر تبدیل می شود:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow gF_{\mu\nu}g^{-1} \tag{۳۴}$$

که درنتیجه آن درمی یابیم عبارت $tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ کمیت مربعی و اسکالر و پیمانه ناوردایی است که می توانیم به لاگرانژی اضافه کنیم. بنابراین لاگرانژی میدان Φ به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\mathcal{L} = D^\mu\Phi^\dagger D_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{1}{4}tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{۳۵}$$

دقت کنید که در اینجا $F_{\mu,\nu}$ یک ماتریس است و دیگر ناوردای پیمانه ای نیست بلکه به صورت (۳۴) تبدیل می شود. $F_{\mu,\nu}F^{\mu,\nu}$ هم اگر چه ناوردای لورنتزی است ولی ناوردای پیمانه ای نیست چرا که به همان شکل (۳۴) تبدیل می شود، ضمن این که یک ماتریس است و نمی تواند در لاگرانژی وارد شود. ولی وقتی که از آن رد می گیریم هم تبدیل به عدد می شود و هم ناوردای پیمانه ای می شود. نکته مهمی که باید به آن توجه کنیم این است که A_μ ها نیز ماتریس اند، در واقع ماتریس هایی هستند در جبر گروه G.

اگر مولدهای گروه را با T_a نمایش دهیم می توانیم A_μ را بر حسب این مولدها بسط دهیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$A_\mu = A^a{}_\mu T_a \tag{۳۶}$$

که در آن $A^a{}_\mu$ ها مولفه های میدان برداری A^a هستند. در واقع به تعداد بعد گروه (یا جبر) میدان برداری داریم. می دانیم که مولدهای جبر در رابطه جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[T_a, T_b] = iC^c_{ab}T_c \tag{۳۷}$$

که در آن C^c_{ab} ها ثابت های ساختاری جبر خوانده می شوند. به این ترتیب تانسور $F_{\mu,\nu}$ به صورت زیر در می آید:

$$F_{\mu,\nu} = F^a{}_{\mu,\nu}T_a \tag{۳۸}$$

که در آن

$$F^a{}_{\mu,\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu - iqC^a{}_{bc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu. \tag{۳۹}$$

■ کمی ریاضیات: در آنچه که تا کنون گفته ایم کمی ساده سازی کرده ایم. فرض کرده ایم که Φ یک بردار N مولفه ای مختلط است که تحت نمایش اصلی [۱۲] از گروه $SU(N)$ تبدیل می شود و حال آنکه امکانات ما برای تعریف نظریه میدان پیمانه ای بیش از این هاست. فرض کنید که G یک گروه لی [۱۳] و $U : G \longrightarrow M_N$ یک نمایش یکانی ماتریسی N بعدی از آن باشد. به عنوان مثال اگر G را گروه $SU(2)$

[۱۲] Fundamental Representation
[۱۳] Lie Group

بگیریم، می دانیم که نمایش های یکانی این گروه می تواند هر بعد صحیحی داشته باشد. این نمایش ها با یک عدد صحیح یا نیمه صحیح j مشخص می شوند . به عدد j اصطلاحا نمایش اسپین j می گوییم و نمایش اسپین j یک نمایش $2j+1$ بعدی است. در نتیجه تعداد میدان های N ربطی به بعد خود گروه ندارد بلکه به بعد نمایش آن گروه ربط دارد. بنابراین درست تر این است که تبدیل میدان Φ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = U(g)\Phi \tag{۴۰}$$

که در آن $U(g)$ نمایش یکانی مشخصی از عنصر $g \in G$ است. مثلا گروه G می تواند گروه $SU(2)$ باشد و $\Phi\rangle$ در نمایش ۴ بعدی آن قرار گرفته باشد. یا اینکه گروه G برابر با $SU(4)$ باشد و Φ در نمایش ۴ بعدی آن قرار داشته باشد. این دو نظریه میدان به کلی با هم متفاوتند. چند مثال متفاوت را در زیر مطالعه می کنیم.

- مثال یک: گروه پیمانه ای را $SU(2)$ می گیریم و Φ را نیز یک میدان مختلط دو مولفه ای می گیریم که تحت نمایش $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ دو بعدی این گروه تبدیل می شود. در این صورت تبدیل میدان به صورت $\Phi \longrightarrow \Phi' = U(g)\Phi$ است که $U(g)$ نیز همان نمایش اصلی و دوبعدی گروه است. به عبارت بهتر $U(g) = g$ است. لاگرانژی میدان می تواند به صورت زیر باشد:

$$\mathcal{L} = D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) \tag{۴۱}$$

- مثال دو: گروه پیمانه ای را $SO(2)$ می گیریم و Φ را نیز یک میدان حقیقی دو مولفه ای می گیریم که تحت نمایش دو $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ بعدی این گروه تبدیل می شود. در این صورت تبدیل میدان به صورت $\Phi \longrightarrow \Phi' = U(g)\Phi$ است که $U(g)$ نیز همان نمایش اصلی و دوبعدی گروه است. به عبارت بهتر $U(g) = g = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ است. لاگرانژی میدان می تواند به صورت زیر باشد:

$$\mathcal{L} = D_\mu \Phi^T D^\mu \Phi - m^2 \Phi^T \Phi - V(\Phi^T \Phi) \tag{۴۲}$$

دقت کنید که میدان ها حتما باید حقیقی باشند، زیرا در غیر این صورت جمله $\Phi^T\Phi$ حقیقی نخواهد بود.

- مثال سه : گروه پیمانه ای را $SU(2)$ می گیریم ولی حالا می خواهیم که سه میدان مختلط داشته باشیم که تحت این میدان تبدیل می شوند.

یک راه این است که Φ را به صورت یک بردار سه مولفه ای $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ بگیریم و $U(g)$ را نیز نمایش سه بعدی یا اسپین یک گروه $SU(2)$ بگیریم. راه دیگرش که البته با راه اول هم ارز است اما سادگی و زیبایی بیشتری دارد این است که Φ را به صورت یک ماتریس هرمیتی بدون رد در نظر بگیریم:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix}. \qquad (۴۳)$$

در این صورت $U(g) = g$ همان نمایش دوبعدی یا تعریف کننده [۱۴] از گروه خواهد بود و میدان ها نیز به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = g\Phi g^\dagger \qquad (۴۴)$$

و لاگرانژی نیز به صورت زیر خواهد بود:

لاگرانژی میدان می تواند به صورت زیر باشد:

$$\mathcal{L} = Tr(D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi) - V(Tr(\Phi^\dagger \Phi)) \qquad (۴۵)$$

۴ کوانتوم کرومودینامیک

پروتون، نوترون و دیگر ذرات سنگین که آنها را هادرون می نامیم که البته طول عمر بسیار کمی دارند همه از کوارک ها تشکیل شده اند که به واسطه بارهای خاصی که دارند به شدت با هم برهم کنش می کنند. این برهم کنش قوی همان چیزی است که هسته اتم ها را علیرغم نیروی دافعه الکتریکی پروتون ها نگاه می دارد و مانع از هم پاشیدن آن می شود. این برهم کنش همان چیزی است که کوارک های درون پروتون و نوترون را نیز به هم پیونده داده است. ساختار کوارکی یک پروتون و نوترون و پاد ذره های آن به صورت زیر است:

$$p = (uud) \quad , \quad n = (ddu(\quad , \quad \overline{p} = (\overline{u}\overline{u}\overline{d} \quad , \quad \overline{n} = (\overline{d}\overline{d}\overline{u}). \qquad (۴۶)$$

خواننده می تواند با نگاهی به جدول (۱) بار الکتریکی این ذرات را حساب کند. اما کوارک ها علاوه بر بار الکتریکی که عامل نیروی الکترومغناطیسی است ، بار رنگی نیز دارند که عامل برهم کنش هسته ای قوی است . کرومودینامیک کوانتومی یا کوانتومی کرومودینامیک [۱۵]

[۱۴] Defining Representation

[۱۵] Quantum Chromodynamics

داستان دینامیک رنگ هاست. البته در این جا هیچ رنگی درکار نیست بلکه با نوعی بار سر وکار داریم که به جای آنکه منفی و مثب باشد سه نوع است که بنا بر قواعد ریاضی و فیزیکی مشخصی با یک دیگر بر هم کنش می کنند و نام رنگ تنها به خاطر طبع شاعرانه فیزیکدانهایی که کاشف این نوع بار بوده اند به آنها داده شده است. پروتون ها، نوترون ها و دیگر ذرات سنگین که آن ها را هادرون [۱۶] می نامیم ، همگی از ذرات بنیادی تری به نام کوارک [۱۷] ساخته شده اند. اکنون می دانیم که شش نوع کوارک داریم که بازهم به خاطر همان طبع شاعرانگی آن ها را طعم ها [۱۸] ی مختلف کوارک می خوانیم. این طعم ها عبارت اند ازکوارک های

$$u \text{ (up)} \quad , \quad d \text{ (down)} \quad , \quad c \text{ (charm)} \quad , \quad s \text{ (strange)} \quad , \quad \tau \text{ (top)} \quad , \quad b \text{ (bottom).} \tag{۴۷}$$

این کوارک ها همگی بار الکتریکی، بار الکتریکی آنها همگی کسری است و جرم هایشان نیز متفاوت است. جدول (۱) این کوراک ها را را به همراه لپتون ها [۱۹] نشان می دهد. لپتون که ازکلمه یونانی به معنای سبک آمده است به ذراتی مثل الکترون و نوترینو گفته می شود. کوارک ها و لپتون ها در سه نسل مستقل از هم مرتب شده اند. در جدول (۱) درکنار هر ذره مشخصات آن مثل جرم، بار الکتریکی و اسپین آن نیز نوشته شده است. مثلا ذره موئون با علامت μ [۲۰] دارای بار -1 اسپین $\frac{1}{2}$ و جرم $105.7Mev$ است. هرکدام از این ذرات پاد ذره ای نیز دارند که همان جرم و همان اسپین را دارد اما بار الکتریکی اش با بار الکتریکی آن ذره متضاد است. البته فوتون (γ) ، ذره Z^0 وگوئون ها (g) پاده ذره خودشان هستند. در این بخش و برای فهم کرومودینامیک کوانتومی یعنی برهم کنش های هسته ای قوی، به بقیه ذراتی که در این جدول وجود دارد توجه نمی کنیم و توجه خود را تنها به کوارک ها معطوف می کنیم.

هرکدام ازکوارک ها راکه در نظر بگیریم به تنهایی در معادله دیراک صدق می کند. به عنوان مثال کوارک u در معادله ی

$$(i\not{\partial} - m_u)\psi_u = 0 \tag{۴۸}$$

صدق می کند که از لاگرانژی

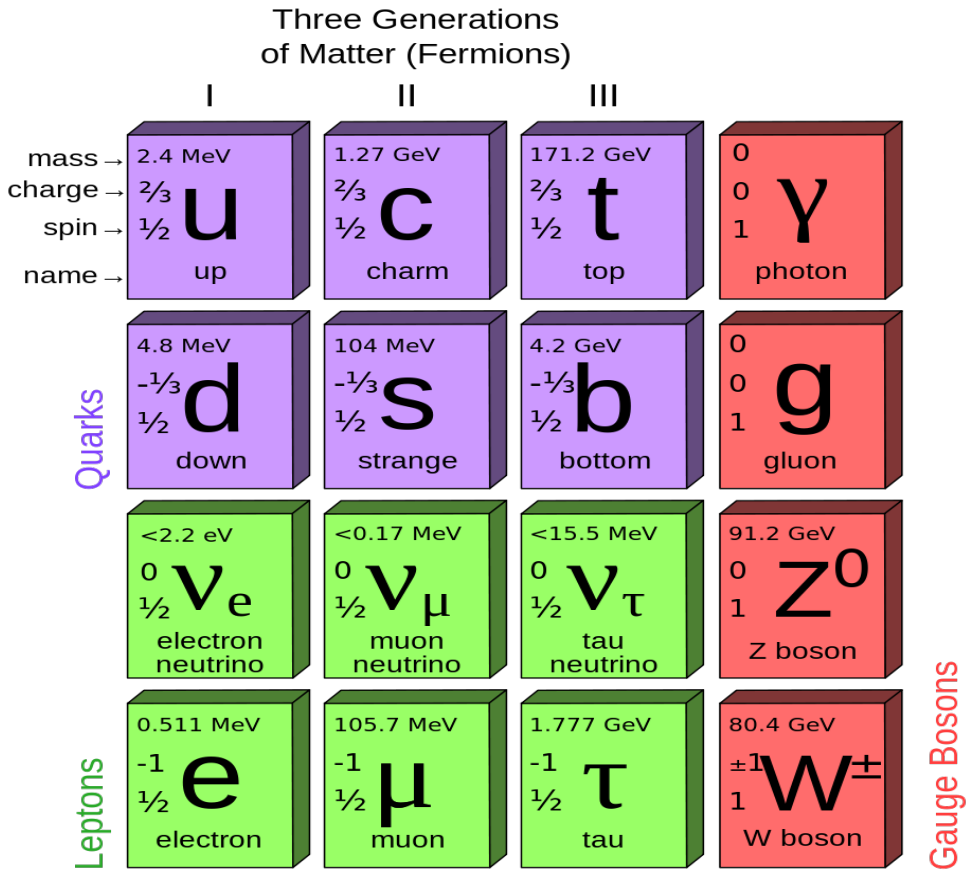
$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_u(i\not{\partial} - m_u)\psi_u \tag{۴۹}$$

بدست می آید. . اما آزمایشهای بسیار نشان داده است که یک کوارک مثل کوارک u در سه نوع متفاوت ظاهر می شود و لاگرانژی صحیح آن را می بایست به شکل زیر نوشت:

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}_u(i\not{\partial} - m_u)\Psi_u \tag{۵۰}$$

---

[۱۶] Hadron
[۱۷] Quark
[۱۸] Quark Flavor
[۱۹] Leptons
[۲۰] Muon



شکل ۱: جدول ذرات بنیادی. تمام دنیای ما از این ذرات، و پادذرات آنها به علاوه ذره هیگز ساخته شده است.

که در آن $\Psi_u = \begin{pmatrix} {\psi_u}^R \\ {\psi_u}^G \\ {\psi_u}^B \end{pmatrix}$ یک تابع موج سه مولفه ای است که مولفه های آن را با اندیس R, G, B مشخص کرده ایم. می توانستیم صرفا آنها را با اندیس $1, 2, 3$ یا α, β, γ مشخص کنیم. به این معناست که می گوییم نامگذاری این سه نوع کوارک به نام رنگ ها هیچ نوع معنای خاصی مربوط به رنگ ها ندارد و تنها یک نامگذاری است. نکته مهم این است که آزمایشهای گوناگون نشان داده است، یک نوع تقارن بین این سه نوع کوارک دیده می شود و همه نتایج آزمایشها تحت تبدیلِ

$$\Psi_u \longrightarrow \Psi'_u = U(g)\Psi_u \qquad (۵۱)$$

که در آن $U(g)$ یک نمایش سه بعدی گروه $SU(3)$ است، متقارن اند. نشان داده شده که تبدیل این تقارن پیمانه ای سرتاسری به یک تقارن پیمانه ای موضعی منجر به تعریف برهم‌کنش های صحیح بین کوارک ها یعنی برهم‌کنش هسته ای قوی می شود. به عبارت دیگر کافی است که لاگرانژی (۵۰) را به صورت زیر تصحیح کنیم:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_u(i\not{D} - m_u)\psi_u \qquad (۵۲)$$

که در آن

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu\lambda_a \qquad (۵۳)$$

، و λ_a ها مولدهای جبر $su(3)$ هستند. پارامتر g نیز مقیاس بار هسته ای قوی را نشان می دهد.

در این رابطه اندیس a به تعداد مولدهای جبر $su(3)$ و برابر با 8 است. به این ترتیب نیروی هسته ای قوی یک نیروی پیمانه ای با گروه تقارنی $SU(3)$ است. بنابراین با هشت میدان پیمانه ای یا هشت نوع ذره بوزون واسطه [۲۱] سروکار داریم که به آنها گلوئون [۲۲] می گوییم. نام گلوئون از لغت یونانی به معنای چسب گرفته شده و دلیل اش هم نقشی است که این ذره در پیوند کوارک ها با هم تحت نیروی هسته ای قوی به عهده دارد. البته برای کامل شدن لاگرانژی می بایست مثل همیشه جمله $-\frac{1}{4}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ را به لاگرانژی اضافه کنیم. اما قبل از این کار به سراغ کوارک های دیگر می رویم که هرکدام لاگرانژی شبیه به (۵۲) دارند. بنابراین لاگرانژی کوارک ها را که باهم برهم‌کنش قوی دارند می بایست به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_a \overline{\Psi}_a \left(i\not{D} - m_a\right)\Psi_a - \frac{1}{4}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \qquad (۵۴)$$

[۲۱] Mediating Gauge Boson
[۲۲] Gluon

این لاگرانژی برهم‌کنش های قوی بین‌کوارک ها و در نتیجه برهم‌کنش های قوی بین هادرون ها (پروتون، نوترون و دیگر ذرات سنگین) را توصیف می‌کند. یک نکته خیلی مهم است و آن اینکه این لاگرانژی، مجموع لاگرانژی های کاملا مستقل برای هرکدام از طعم های کوارک هاست و هیچ نوع برهم‌کنشی بین طعم های مختلف وجود ندارد. به این ترتیب برهم‌کنش قوی کوارک ها را به هم تبدیل نمی‌کند اما رنگ کوارک ها تحت این برهم‌کنش تغییر می‌کند. برای درک این نکته توجه خود را تنها به یکی از کوارک ها مثلا کوارک u معطوف می‌کنیم و لاگرانژی مربوط به آن را باز می‌کنیم. برای سادگی از نوشتن جمله $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ صرف نظر می‌کنیم. لاگرانژی مربوط به این کوارک به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L}_u = \overline{\Psi}_u \left(i\not{D} - m\right) \Psi_u = \overline{\Psi}_u \left(i\not{\partial} - m\right) \Psi_u + g\overline{\Psi}_u \not{A} \Psi_u \equiv \mathcal{L}_{u,0} + \mathcal{L}_{u,int} \tag{۵۵}$$

جمله اول در فضای رنگ قطری است به همین دلیل نشان دهنده لاگرانژی دیراک برای کوارک های با رنگ های مختلف است، اما جمله دوم در فضای رنگ قطری نیست و نشان دهنده برهم‌کنش کوارک های با رنگ های گوناگون از طریق گلوئون هاست. به عبارت دقیق تر:

$$\mathcal{L}_{u,0} = \sum_j \overline{\psi}^j \left(i\not{\partial} - m\right) \psi^j \qquad\qquad j \;=\; R,\, G,\, B, \tag{۵۶}$$

و

$$\mathcal{L}_{u,int} = g \sum_{j,k} \overline{\psi}_j \gamma^\mu A^a{}_\mu (\lambda_a)_{jk} \psi^k \qquad\qquad j\;,\; k \;=\; R,\, G,\, B, \tag{۵۷}$$

لاگرانژی $\mathcal{L}_{u,int}$ شامل جمله ای است که برهم‌کنش کوارک ها با رنگ های گوناگون را به واسطه گلوئون ها نشان می دهد. برهم‌کنش قوی طعم کوارک ها را تغییر نمی دهد به همین دلیل هم لاگرانژی (۵۴) مجموع شش لاگرانژی مجزا برای شش طعم کوارک است. هرگاه از لاگرانژی برهم‌کنش هسته ای قوی (۵۴) شروع کنیم، علی القاعده می بایست بتوانیم همه پدیده های مربوط به برهم‌کنش های قوی را توضیح دهیم. مثلا باید بتوانیم حساب کنیم که پروتون که از سه کوارک ساخته شده، چه تراز های انرژی دارد، باید بتوانیم نیروی بین پروتون ها و نوترون ها را حساب کنیم، و سرانجام باید بتوانیم تراز های انرژی هسته های مختلف را حساب کنیم. اما نکته این است که ثابت برهم‌کنش نیروهای هسته ای آنقدر کوچک نیست که بتوان با محاسبات اختلالی تقریب های قابل قبولی از مشاهده پذیرهای فیزیکی بدست آورد. با این وجود پیشرفت های بسیار زیادی در این حوزه انجام شده است که خواننده برای دانستن آنها می بایست به درسهای تخصصی این موضوع مراجعه کند.

۵ مدل استاندارد

همانطور که گفتیم، برهم‌کنش قوی طعم کوارک ها را تغییر نمی دهد، کوارک u همواره کوارک u باقی می ماند و کوارک d هم همواره کوارک d باقی می ماند. اما طعم کوارک ها واقعا به هم تبدیل می شود، چرا که می دانیم نوترون با ساختار (udd) به پروتون با ساختار (uud) تبدیل می شود. به عبارت دقیق تر می دانیم که چنین واکنشی رخ می دهد که آن را واپاشی بتا برای نوترون می خوانیم:

$$n \longrightarrow p + e + \overline{\nu} \tag{۵۸}$$

یعنی یک نوترون به یک پروتون، یک الکترون و یک پادنوترینو [۲۳] تبدیل می شود. این همان کاری است که برهم‌کنش های ضعیف انجام می دهند. در واقع اگر به معادله (۵۸) دقت کنیم می بینیم که واکنش زیر رخ داده است:

$$(udd) \longrightarrow (uud) + e + \overline{\nu} \tag{۵۹}$$

و یا

$$d \longrightarrow u + e + \overline{\nu}, \tag{۶۰}$$

یعنی یک کوارک d به یک کوارک سبک تر یعنی u و یک الکترون و یک پادنوترینو واپاشیده است. واپاشی بتا در مورد دیگر کوارک ها نیز رخ می دهد. به این ترتیب که در هر کدام از نسل های کوارک ها کوارک سنگین تر به کوارک سبک تر وامی پاشد. کوارک های نسل های متفاوت نیز می توانند به هم تبدیل شوند. چه نوع برهم‌کنش یا چه نوع نیرویی باعث این تبدیلات می شود؟ پاسخ این سوال نیروی هسته ای ضعیف [۲۴] است. نیروی الکترومغناطیسی تنها روی ذرات باردار اثر می‌کند (بنابر این روی نوترینو اثری ندارد) و نیروی هسته ای قوی فقط روی کوارک ها اثر می‌کند (بنابراین روی الکترون اثری ندارد) ، اما نیروی هسته ای ضعیف روی همه ذرات جدول (۱) اثر می‌کند. از نظر تاریخی وجود چنین نیرویی را با توجه به شواهد تجربی در سالهای دهه ۶۰ میلادی پیش بینی کرده بودند اما بیش از یک دهه طول کشید تا فرمول بندی دقیق این نیرو یا به عبارت دیگر لاگرانژی دقیقی که این برهم‌کنش را توصیف می‌کند، به شکل نهایی اش تدوین شود.

در مورد این برهم‌کنش یک خاصیت مهم و شگفت انگیز وجود دارد و آن شکست تقارن آینه ای یا تقارن پاریته است. برهم‌کنش های دیگر همه نسبت به انعکاس آینه ای متقارن اند و حال آنکه برهم‌کنش ضعیف چنین نیست. به عبارت دیگر اگر برهم‌کنش های ضعیف وجود نداشته باشند، برای هر پدیده ای که تصور کنید، انعکاس آینه ای آن نیز پدیده است که در طبیعت قابل مشاهده است. اما در سال ۱۹۵۷ معلوم شد که برهم‌کنش های هسته ای ضعیف چنین نیستند. خواننده شرح این آزمایش جذاب را می تواند از متون تخصصی تر دنبال کند. در مدل استاندارد ذرات بنیادی، ریشه چنین عدم تقارنی نیز این است که ذرات چپ دست و راست دست در دو گروه تقارنی متفاوت قرار می‌گیرند. کشف دقیق این تفاوت رفتار و تدوین یک نظریه پیمانه ای دقیق که تمامی برهم‌کنش های ضعیف را توصیف کند از مهم ترین پیشرفت های فیزیک نظری در نیمه دوم قرن بیستم بوده است. طی همین تلاش ها معلوم شده که نیروی الکترومغناطیس و نیروی هسته ای ضعیف دو نیروی مجزا و نامرتبط نیستند بلکه هر دو در چارچوب یک نظریه واحد پیمانه ای به نام نظریه پیمانه ای الکتروضعیف [۲۵] قابل توصیف اند.

طبیعی است که پرداختن به روند تاریخی تدوین این نظریه در برنامه این درس نمی‌گنجد و ما تنها می توانیم شکل نهایی نظریه را به اختصار توصیف کنیم. مطابق با آنچه که در مورد نظریه های پیمانه ای یادگرفته ایم می بایست نخست گروه تقارن پیمانه ای را معرفی کنیم و سپس تعیین کنیم که ذرات مختلف درکدام نمایش ها از این گروه قرار می‌گیرند. هرگاه که این دو ویژگی مهم را تعیین کنیم، جملات لاگرانژی تقریبا تعیین

[۲۳] Anti-Neutrino
[۲۴] Weak Nuclear Force
[۲۵] Electroweak Theory or Salam-Weinberg-Glashow Theory

می شوند. پیچیدگی های نظریه سلام-گلاشو-واینبرگ یا مدل استاندارد نیز به همین مسئله مربوط است که دقیقا کدام ذرات در کدام نمایش ها از کدام گروه ها قرار می گیرند و این البته یک کار خیلی بزرگ است که آنجام آن تنها پس از سالها پژوهش نظری و تجربی کامل شده است. حاصل نهایی یک نظریه بسیار زیبا و فوق العاده دقیق و موفق است. به اختصار به این مدل نگاه می کنیم: گروه تقارن پیمانه ای $SU(2) \times U(1)$ است. یعنی بخشی از ذرات در نمایش های $SU(2)$ قرار می گیرند و بخشی در نمایش های $U(1)$. هم چنین این امر به این معناست که سه میدان پیمانه ای وجود دارد که مربوط به $SU(2)$ هستند و یک میدان پیمانه ای که مربوط به $U(1)$. میدان های پیمانه ای طبیعتا میدان های برداری هستند و ذرات مربوط به این میدان های برداری (مثل فوتون) واسطه برهم کنش های الکتروضعیف هستند. میدان های برداری مربوط به تقارن $SU(2)$ را با ${W^{\pm}}_{\mu}$ و ${W^3}_{\mu}$ نمایش می دهیم و میدان پیمانه ای مربوط به $U(1)$ را با B_{μ} نمایش می دهیم. بنابراین داریم:

$$W_{\mu} = {W^3}_{\mu}\sigma_3 + {W^+}_{\mu}\sigma_- \ + \ {W^-}_{\mu}\sigma_+, \qquad (۶۱)$$

که در آن $\sigma_{\pm}$ و σ_3 مولدهای جبرهای $su(2)$ هستند و

بنابراین دو نوع تانسور زیر نیز در لاگرانژی وارد می شوند:

حال باید به سراغ ذرات مختلف برویم و ببنیم که در کدام نمایش ها قرار گرفته اند. می دانیم که اسپینور هر ذره اسپین ۱/۲ را می توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = \psi_R + \psi_L \qquad (۶۲)$$

که در آن ψ_R و ψ_L توابع موج دارای پاریته زوج و فرد آن ذره هستند. اصطلاحا به این دو تابع موج تابع موج راست دست و چپ دست می گوییم. د ر دنیای ما تقارن بین چپ و راست به این ترتیب می شکند که توابع موج راست دست و توابع موج چپ دست در دو گروه پیمانه ای متفاوت قرار می گیرند. در واقع اگر برای سادگی از خود ذره به جای تابع موج آن نام ببریم، باید بگوییم که ذرات راست دست گروه تقارنی پیمانه ای شان $U(1)$ است و ذرات چپ دست گروه تقارن پیمانه ای شان $SU(2)$ است. نحوه قرارگرفتن این ذرات در نمایش های این دو گروه نیز به صورت زیر است.

هر کدام از لپتون های راست یعنی الکترون e_R ، موئون ν_R و تاو τ_R و هم چنین نوترینوهای وابسته به آنها یعنی نوترینوی الکترون $(\nu_e)_R$ ، نوترینوی موئون $(\nu_\mu)_R$ و نوترینوی تاو $(\nu_\tau)_R$ در نمایش یک بعدی $U(1)$ قرار می گیرند.

$$\begin{array}{ccccc} (\nu_e)_R & , & (\nu_\mu)_R & , & (\nu_\tau)_R \\ e_R & , & \nu_R & , & \tau_R. \end{array} \qquad (۶۳)$$

اما هر کدام از این لپتون های چپ دست و نوترینوی چپ دست مربوط به آن در نمایش دو بعدی $SU(2) \times U(1)$ قرار می گیرند:

$$\begin{pmatrix} (\nu_e)_L \\ e_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (\nu_\mu)_L \\ \mu_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (\nu_\tau)_L \\ \tau_L \end{pmatrix}. \tag{۶۴}$$

این وضعیت در مورد کوارک ها نیز وجود دارد: یعنی کوارک های راست دست در نمایش یک بعدی $U(1)$ قرار می گیرند

$$u_R \quad , \quad d_R \quad , \quad c_R \quad , \quad s_R \quad , \quad t_R \quad , \quad b_R. \tag{۶۵}$$

و کوارک های چپ دست به صورت زیر در نمایش های دوبعدی $SU(2) \times U(1)$ می نشینند:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}. \tag{۶۶}$$

خواننده می بایست با مراجعه به یک کتاب نظریه گروه یا درسنامه نظریه گروه خود را با مفاهیم لازم در باره نظریه گروه، از جمله ضرب دکارتی دو گروه، نمایش های گروه و مولدهای آن آشنا کند. لاگرانژی مدل استاندارد اگر چه کمی بزرگ است اما اصول نوشتن آن ساده است. این لاگرانژی جمع سه نوع لاگرانژی است که در زیر یک به یک آنها را توضیح می دهیم.

$$\mathcal{L}_{fermions} = \overline{\psi}_R \, i\not{D}_R \psi_R + \overline{\psi}_L \, i\not{D}_L \psi_L. \tag{۶۷}$$

در این لاگرانژی ψ_L هرکدام دوتایی لپتونی چپ دست (۶۴) یا دو تایی های کوارک های چپ دست (۶۶) است و ψ_R نیز یک لپتون راست دست از نوع (۶۳) یا کوارک راست دست از نوع (۶۵) است. برای هرکدام از لپتون ها یا کوارکها چنین لاگرانژی هایی نوشته می شود و لاگرانژی کل مربوط به فرمیون ها جمع همه آنهاست. در اینجا باید این نکته را روشن کنیم که مشتق های هموردا چه هستند. برای فرمیون های راست دست که در نمایش یک بعدی $U(1)$ جای گرفته اند، این مشتق هموردا عبارت ساده زیر است:

$$D_{R\,\mu}\psi_L = (\partial_\mu + igB_\mu)\psi_L \tag{۶۸}$$

که در آن B_μ یک میدان پیمانه ای مربوط به $U(1)$ و g یک ثابت جفتیدگی است. هم چنین برای فرمیون های چپ دست که در نمایش $SU(2) \times U(1)$ جای می گیرند، مشتق هموردا عبارت است از:

$$D_{L\,\mu}\psi_L = (\partial_\mu + ig\frac{B_\mu}{2} - ig'W_\mu)\psi_L \tag{۶۹}$$

دراین عبارت منظور از B_μ ماتریس $B_\mu I_2$ است، که در آن I_2 ماتریس واحد دو بعدی است. توجه کنید که فعلا همه کوارک ها و لپتون ها بدون جرم هستند و حال آنکه در عالم واقع می دانیم که همه این ذرات جرم دارند. ممکن است بپرسیم که چرا نمی توان جملاتی مثل $m\overline{\psi}_L\psi_L + m\overline{\psi}_R\psi_R$ به لاگرانژی (۶۷) یا اضافه کرد و همه این فرمیون ها را جرم دار کرد. نکته این است که جمله ای مثل $m\overline{\psi}_L\psi_L$ به ذرات بالا و پایین هرکدام از دوتایی های (۶۴) یا (۶۶) جرم یکسانی می دهد و حال آنکه می دانیم در عالم واقع چنین نیست. جرم کوارک u با جرم کوارک d و هم چنین جرم الکترون با نوترینوی الکترون خیلی متفاوت است. بنابراین می بایست شیوه خاصی برای جرم دار کردن این فرمیون ها به کار برد که در آینده به آن خواهیم پرداخت. این شیوه جرم دار کردن با مکانیز هیگز انجام می شود که یکی از مهم ترین پیشرفت های فیزیک ذرات و یکی از مهم ترین بخش های مدل استاندارد است.

قسمت دوم لاگرانژی مربوط به میدان های پیمانه ای و به شکل زیر است:

$$\mathcal{L}_{Gauge} = -\frac{1}{4}Tr(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (۷۰)$$

که در آن

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g[W_\mu, W_\nu], \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \qquad (۷۱)$$

اگر لاگرانژی تنها از همین دو قسمت تشکیل شده بود، با ما با دنیایی مواجه بودیم که در آن یک ذرات پیمانه ای یعنی B_μ مثل فوتون و سه ذره پیمانه ای $W^{\pm}{}_\mu$ و W^3 مسئول مبادله نیروهای الکترومغناطیسی و ضعیف بودند. نبود جمله $B_\mu B^\mu$ و جملات مشابه برای W_μ به معنای بدون جرم بودن این ذرات واسطه و در نتیجه به معنای بلندبُرد بودن این نیروهاست. اما ما می دانیم که نیروی هسته ای ضعیف بسیار کوتاه بُرد است و در واقع بُرد این نیرو از ابعاد هسته اتم یعنی $10^{-15}m$ کمتر است. در واقع بُرد نیروها نسبت عکس با جرم ذرات واسط دارد و بنابراین ذرات واسط نیروی هسته ای ضعیف می بایست ذرات خیلی سنگینی باشند. اما نکته این است که نمی توان براحتی جملاتی مثل $W^a{}_\mu W^{a\mu}$ را به لاگرانژی اضافه کرد، چرا که این نوع جملات با تقارن پیمانه ای منافات دارند. چنین جمله ای تحت تبدیل پیمانه ای ناوردا باقی نمی ماند. مکانیزم هیگز [۲۶] مکانیزمی است که اجازه می دهد، ذرات واسطه جرم دار شوند، بدون اینکه نیازی به افزودن چنین جملاتی به لاگرانژی داشته باشیم. فرض مکانیزم هیگز این است که میدان اسکالر مختلطی به اسم ϕ که به آن میدان هیگز می گوییم نیز وجود دارد که با میدان های دیگر برهم کنش می کند. این به این معناست که در جهان ما ذرات دیگری نیز وجود دارند که به آنها ذره هیگز می گوییم که این ذرات با ذرات دیگر، برهم کنش می کنند. تعیین خصوصیات این ذره و نوع برهم کنش آن آنچنانکه نهایتا وجود آن منجر به جرم دار شدن بوزون های واسطه بشود، طبیعتا کار ساده

[۲۶] Mechanism Higgs

ای نیست اما هرچه که هست، آنقدر عمیق و زیبا و مهم هست که پس از کشف ذره هیگز برای پیشنهاد دهندگان اش یعنی پیتر هیگز [۲۷] و فرانسوا انگلرت [۲۸] جایزه نوبل را در سال ۲۰۱۳ به ارمغان آورد. نخست لاگرانژی مربوط به قسمت هیگز [۲۹] را در مدل سلام واینبرگ می نویسیم و سپی به توضیح اجزای آن می پردازیم:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 + g_e(\overline{\psi}_L\phi\psi_R + \overline{\psi}_R\phi\psi_L). \tag{۷۲}$$

در این لاگرانژی ϕ یک میدان مختلط دو مولفه ای است:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{۷۳}$$

که در نمایش دو بعدی $SU(2) \times U(1)$ قرارگرفته است یعنی مشتق هموردایش به شکل زیر تعریف می شود:

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ig\frac{B_\mu}{2} - ig'W_\mu)\phi \tag{۷۴}$$

جمله ϕ^4 نیز نشان دهنده برهم‌کنش ذرات هیگز با یک دیگر است. هم چنین این ذرات به دلیل وجود جمله $D_\mu\phi^\dagger D_\mu\phi$ با ذرات پیمانه ای W و B برهم‌کنش می‌کنند. و بالاخره ذره هیگز با فرمیون ها نیز به دلیل جمله اخر در لاگرانژی (۷۲) برهم‌کنش می‌کنند. به این ترتیب هیگز ذره ای است که با تمامی ذرات عالم و با خودش برهم‌کنش دارد. به صورت شهودی می توان گفت که گویی تمامی ذرات عالم در محیطی حرکت می‌کنند که توسط میدان هیگز پر شده است و حرکت درون این میدان برای ذرات نوعی گرانروی [۳۰] یا اینرسی و جرم ایجاد می‌کند. اما این که چگونه چنین چیزی به صورت دقیق و تحلیلی در لاگرانژی هیگز نشان داده می شود موضوعی است که خارج از چارچوب تعیین شده برای این درس است و خواننده می تواند آن را با مراجعه به کتاب های فیزیک ذرات بنیادی یا نظریه میدان بیاموزد.

---

[۲۷] Peter Higgs
[۲۸] Francois Englert
[۲۹] Higgs Sector
[۳۰] Viscosity