گروه لورنتز و نمایش های آن

وحید کریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۲۸ آبان ۱۳۹۶

۱ مقدمه

همانطور که در درس های پیشین گفتیم یکی از خاستگاه های مهم نظریه میدان کوانتومی نیاز به هماهنگ کردن نسبت خاص با مکانیک کوانتومی است. این هماهنگ کردن نخست به تعمیم معادله شرودینگر به معادله کلاین گوردون و دیراک منجر شد و سپس برای رفع اشکالاتی که این دو معادله در خود داشتند منجر به ابداع میدان های کوانتومی نسبیتی شد. در دو درس آینده ما به معرفی معادله کلاین گوردون و معادله دیراک خواهیم پرداخت . قبل از آن لازم است که با گروه لورنتز و نمایش های آن به اختصار اشنا شویم.

۲ گروه لورنتز

در یک فضازمان $d+1$ بعدی، بردار فضا زمان به صورت زیر است:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3 \cdot x^d) \equiv (ct, x, y, \cdots z) \quad (۱)$$

متریک فضازمان نیز به صورت زیر است:

$$\eta_{\mu\nu} = diagonal(1, -1, -1, \cdots -1) \quad (۲)$$

اندازه یک چاربردار در فضای مینکوسکوی به صورت زیر تعریف می شود و همواره وقتی صحبت از اندازه می‌کنیم منظور ما همین نوع اندازه است:

$$x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - \cdots z^2. \tag{۳}$$

اغلب اوقات ضریب c را برابر با یک می‌گیریم. معکوس این متریک نیز همین شکل را دارد:

$$\eta^{\mu\nu} = diagonal(1, -1, -1, \cdots - 1) \tag{۴}$$

داریم:

$$\eta^{\mu,\nu}\eta_{\nu,\alpha} = \delta^\mu_\alpha. \tag{۵}$$

با این متریک می توان اندیس ها را پایین و بالا برد:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu = (ct, -x, -y, \cdots - z) = (x_0, x_1, x_2, \cdots x_3). \tag{۶}$$

هم چنین داریم:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{۷}$$

تبدیل لورنتز

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{۸}$$

تبدیلی است که اندازه نسبیتی چاربردار ها را حفظ می‌کند، یعنی

$$x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu \tag{۹}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\mu{}_\beta x^\beta = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \tag{۱۰}$$

و یا

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{۱۱}$$

هر ماتریسی که در شرط بالا صدق کند یک تبدیل لورنتر را نشان می دهد.

هرگاه تبدیل را به شکل ماتریسی نشان دهیم روابط بالا به شکل فشرده زیر در می آیند:

$$x' = \Lambda x, \qquad x'^T\eta x' = x^T\eta x, \qquad \Lambda^T\eta\Lambda = \eta. \tag{۱۲}$$

بنابراین می توانیم بگوییم که هر ماتریسی که در شرط

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta \tag{۱۳}$$

صدق کند یک تبدیل لورنتز است.

- الف: نشان دهید که مجموعه تبدیلات لورنتز تشکیل یک گروه می دهند.

- تمرین: الف: ثابت کنید که در فضازمان $1+1$ بعدی هر تبدیل لورنتز را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sin\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{۱۴}$$

پارامتر θ را بر حسب سرعت بین دو دستگاه بنویسید. این تبدیل را به صورت آشنایی که در درس نسبیت خوانده اید در آورید.

ب: نشان دهید که سه نوع تبدیل دیگر لورنتز به شکل زیر نیز وجود دارد:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ \sin\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ -\sin\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sin\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix}. \tag{۱۵}$$

هرکدام از این تبدیلات از ضرب یک یا هر دوی ماتریس های زیر در ماتریس تبدیل لورنتز (۱۴) بدست می آیند:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \tag{۱۶}$$

معنای این تبدیلات را مشخص کنید. نشان دهید که تبدیل (۱۴) به صورت زیر نیز قابل نوشتن است:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sin\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} = e^{\theta\sigma_x}. \qquad (۱۷)$$

دقت کنید که در $1+1$ بعد، تنها خیز وجود دارد و دورانی در کار نیست. هم چنین این گروه آبلی است و داریم:

$$\Lambda(\theta)\Lambda(\theta') = \Lambda(\theta+\theta'). \qquad (۱۸)$$

تمرین فوق تقریبا تمام آنچیزی را که ما می بایست از گروه لورنتز بدانیم به ما می آموزد. اکنون به فضازمانی که در آن زندگی می کنیم می پردازیم و تحقیق در باره فضا-زمان های دیگر مثل $3+1$ بعد را بعنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم. خواننده خود می تواند آنچه را که در بخش بعدی یاد می گیرد به فضازمان های دلخواه تعمیم دهد.

۱.۲ گروه لورنتز در چهاربعد

دیدیم که هرتبدیل لورنتز دررابطه $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$ صدق می کند. اگر ازطرفین این رابطه دترمینان بگیریم متوجه می شویم که $\det\Lambda = \pm 1$. بنابراین گروه لورنتز به دوناحیه مجزا تقسیم می شود که با تغییر پیوسته پارامترها نمی توان از یک ناحیه به ناحیه دیگر رفت.
حال به یک قید دیگر توجه می کنیم. اگر عنصر 00 را برای هردوطرف رابطه (؟؟) حساب کنیم بدست می آوریم:

$$\sum_{\mu=0,\nu=0}^{3} \Lambda_{\mu 0}\eta_{\mu\nu}\Lambda_{\nu 0} = 1 \qquad (۱۹)$$

حال بااستفاده از قطری بودن η و فرم صریح آن در (؟؟) طرف چپ تبدیل می شود به

$$\Lambda_{00}^2 = 1 + {\Lambda_{10}}^2 + {\Lambda_{20}}^2 + {\Lambda_{30}}^2. \qquad (۲۰)$$

این رابطه نشان می دهد که یا $1 \geq \Lambda_{00}$ و یا $-1 \leq \Lambda_{00}$. بنابراین هرکدام از دو ناحیه قبلی به نوبه خود به دو دو ناحیه‌مجزا تقسیم می شوند. درنتیجه گروه لورنتز از چهارناحیه مجزا تشکیل می شود ، که می توان آنها را به شکل زیر نام گذاری کرد. دلیل نامگذاری $O(1,3)$ نیز این است که این ماتریس ها نسبت به متریک $\eta = diagonal(1,-1,-1,-1)$ متعامد هستند:

$$O(1,3)^+_\uparrow \quad = \quad \{\Lambda \in O(1,3) |\det\Lambda = 1, \ \ \Lambda_{00} \geq 1\}$$

$$
\begin{aligned}
O(1,3)^{+}_{\downarrow} &= \{\Lambda \in O(1,3)|\det\Lambda = 1, \;\; \Lambda_{00} \leq -1\} \\
O(1,3)^{-}_{\uparrow} &= \{\Lambda \in O(1,3)|\det\Lambda = -1, \;\; \Lambda_{00} \geq 1\} \\
O(1,3)^{-}_{\downarrow} &= \{\Lambda \in O(1,3)|\det\Lambda = -1, \;\; \Lambda_{00} \geq -1\}.
\end{aligned} \tag{۲۱}
$$

مسلم است که از این چهار ناحیه دو ناحیه آخر نمی توانند زیرگروه باشند زیرا دترمینان هر عضو آنها برابر با منهای یک است و هر دو عضوی از آنها که درهم ضرب شود، دترمینان یک خواهد داشت. ناحیه دوم نیز زیرگروه نیست زیرا شامل عنصر واحد نیست. به شرط $\Lambda_{00} \leq -1$ دراین ناحیه توجه کنید. تنها ناحیه اول زیرگروه است که آن را گروه تبدیلات ویژه لورنتز می نامیم. [۱]

■ تمرین: نشان دهید که از میان نواحی بالا $O(1,3)^+$ یک زیرگروه است. مهم ترین مسئله این است که نشان دهید این قسمت نسبت به عمل ضرب و عمل وارون بسته است.

برای آنکه ساختمان گروه لورنتز را بهتربشناسیم و از لحاظ فیزیکی نیز معنای تبدیلات این چهارناحیه را بهتر بفهمیم ماتریس های زیر را درنظر می گیریم.

$$
T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{۲۲}
$$

این دو تبدیل هردو متعلق به گروه لورنتز هستند. T تبدیل وارونی زمان را ایجاد می کند و π تبدیل انعکاس فضایی حول مبداء مختصات فضا را بوجود می آورد. حال اگر $\Lambda \in O(1,3)^+{}_{\uparrow}$، آنگه براحتی می توان دید که

$$
T\Lambda \in O(1,3)^-{}_{\downarrow}, \qquad \pi\Lambda \in O(1,3)^-{}_{\uparrow}, \qquad (\pi T)\Lambda \in O(1,3)^-{}_{\downarrow}. \tag{۲۳}
$$

درنتیجه قسمت های مختلف چهارگانه فوق هم‌مجموعه های عناصر π, T, I و πT هستند. هرگاه Λ یک تبدیل ویژه لورنتز باشد، آنگاه $T\Lambda$، $\pi\Lambda$ و $\pi T\Lambda$ تبدیل هایی هستند که درآن ها Λ با وارونی زمان، انعکاس فضایی حول مبداء و یا هردو دنبال شده اند. ازاین به بعد ماتوجه خود را به تبدیلات ویژه لورنتز معطوف می کنیم و غالب اوقات نیز صفت ویژه را برای آنها بکارنمی بریم. این تبدیلات تبدیلاتی هستند که به طور پیوسته

[۱] در بسیاری از موارد منظور ازگروه لورنتز همین زیرگروه ویژه است.

به تبدیل همانی I متصل هستند. بهترین کارآن است که تبدیلات بی نهایت کوچک را مطالعه کنیم. هرتبدیلی از این نوع به شکل زیراست:

$$\Lambda \approx I + b \tag{۲۴}$$

که درآن درایه های b کوچکند. شرط (13) درمورد این ماتریس تبدیل می شود به

$$\eta b + b^t \eta = 0. \tag{۲۵}$$

درنتیجه b می بایست به فرم زیرباشد:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ \epsilon_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \epsilon_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ \epsilon_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۲۶}$$

می توان این ماتریس را به صورت زیرنوشت:

$$b = \epsilon_1 K_1 + \epsilon_2 K_2 + \epsilon_3 K_3 + \theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3, \tag{۲۷}$$

که درآن

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{۲۸}$$

و

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۲۹}$$

بدلایلی‌که بزودی خواهیم دید K ها مولد های خیز و J ها مولد های دوران نامیده می شوند. این‌که J ها مولد های دوران هستند باتوجه به آنکه روی زمان هیچ‌کاری نمی‌کنند و هم چنین باتوجه به آنچه‌که درمورد‌گروه دوران در درس مکانیک‌کوانتومی مقدماتی دیده ایم واضح است. برای K ها‌کافی است‌که بدون نقض‌کلیت تبدیل زیررا درنظربگیریم:

$$\Lambda_1 := I + \epsilon K_1. \tag{۳۰}$$

براحتی دیده می شود‌که Λ_1 نقطه $x = (t, x, y, z)$ از فضا زمان را تبدیل به نقطه $x' = (t', x', y', z')$ می‌کند‌که درآن:

$$\begin{aligned} t' &= t + \epsilon x \\ x' &= \epsilon t + x \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{۳۱}$$

که فرم بی نهایت‌کوچک یک تبدیل لورنتز درراستای x با پارامتر ϵ و یا سرعت $v = \tanh \epsilon$ است. درواقع یک خیز محدود درراستای x را می توان به شکل زیربدست آورد:

$$\Lambda = \lim_{N \longrightarrow \infty} (I + \frac{\epsilon}{N} K_1)^N = e^{\theta K_1}. \tag{۳۲}$$

درحالت‌کلی یک تبدیل خیزخالص به شکل زیراست:

$$\Lambda = e^{\epsilon_1 K_1 + \epsilon_2 K_2 + \epsilon_3 K_3} = e^{\epsilon n \cdot K}. \tag{۳۳}$$

این خیز بااندازه ϵ یا سرعت $v = \tanh \epsilon$ ودرراستای n است. هم چنین یک دوران خالص به شکل زیراست:

$$\Lambda = e^{\theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3} = e^{\theta n \cdot J}, \tag{۳۴}$$

که درآن θ زاویه دوران و n محوردوران است.

■ تمرین: ماتریس مربوط به یک خیز لورنتز را‌که با سرعت v و در راستای $(\theta = 30^\circ, \ \ \phi = 30^\circ)$ انجام می شود پیدا‌کنید.

با استفاده از ماتریس های $E_{ij}=|i\rangle\langle j|$ می توانیم مولدها را به صورت ساده زیر بنویسیم:

$$J_i = -\epsilon_{ijk}E_{jk} \quad , \quad K_i = E_{0i} + E_{i0}. \tag{۳۵}$$

در نتیجه می توان به راحتی روابط زیر را ثابت کرد.

■ تمرین: نشان دهید که مولدها در روابط جابجایی زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk}K_k \\ [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk}J_k. \end{aligned} \tag{۳۶}$$

■

حال می خواهیم نمایش جبر لورنتز را پیدا کنیم. به شکل فعلی پیداکردن نمایش این جبر کار دشواری است. اما می توانیم ترکیب خطی جدیدی از مولدها پیدا کنیم که روابط جابجایی خیلی ساده تری دارند. برای این کار تعریف می کنیم:

$$A_m = \frac{1}{2}(J_m + iK_m) \qquad , \qquad B_m = \frac{1}{2}(J_m - iK_m) \tag{۳۷}$$

براحتی معلوم می شود که این مولدهای جدید روابط جابجایی زیر را دارند:

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= \epsilon_{ijk}A_k \\ [B_i, B_j] &= \epsilon_{ijk}B_k \\ [A_i, B_j] &= 0. \end{aligned} \tag{۳۸}$$

این رابطه نشان می دهد که جبر لورنتز مطابق با دو جبر جداگانه $su(2)$ است، یا به عبارت دیگر جبر تبدیلات لورنتز برابر است با $su(2) \oplus su(2)$ و همین امر یافتن نمایش های گروه لورنتز را بسیار ساده می کند. قبل از تفصیل این موضوع با مفهوم نمایش آشنا می شویم.

■ تمرین: یک تبدیل بی نهایت کوچک لورنتز را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\Lambda = I + \lambda \tag{۳۹}$$

از رابطه

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\eta^{\alpha\beta}=\eta^{\mu\nu} \qquad (۴۰)$$

نشان دهید که

$$\lambda_{\mu\nu}+\lambda_{\nu\mu}=0. \qquad (۴۱)$$

بنابراین λ یک تانسور کاملا پادمتقارن است. چنین تانسوری دارای شش پارامتر آزاد است که آن ها را با $\omega^{\alpha\beta}=-\omega^{\beta\alpha}$ نشان می دهیم. تانسور λ را به صورت زیر بنویسید:

$$\lambda=\omega^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} \qquad (۴۲)$$

که در آن $L_{\alpha\beta}$ تانسورهای پادمتقارنی هستند که هیچ پارامتری ندارند. این ها مولدهای گروه لورنتز هستند. تعداد این تانسورها 6 تاست زیرا $L_{\alpha\beta}=-L_{\beta\alpha}$. مولفه های این تانسورها به صورت زیر هستند:

$$(L_{\alpha\beta})_{\mu\nu}=\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}-\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu}. \qquad (۴۳)$$

الف:رابطه جابجایی $L_{\alpha\beta}$ ها را با هم پیدا کنید.

ب: ربط این مولدها را با مولدهای J_m و K_m که قبلا پیدا کرده بودیم بدست آورید.

۲.۲ مختصری در باره نمایش های گروه لورنتز

در فضا زمان 4 بعدی ماتریس های Λ نیز چهاربعدی هستند. در مکانیک کوانتومی اثر تبدیل لورنتز Λ می بایست روی یک بردار حالت در یک فضای هیلبرت معین با بعد مشخص اثر کند. این اثر را با ماتریس یکانی $U(\Lambda)$ نشان می دهیم. ماتریس U برای آنکه واقعا نشان دهنده تبدیل لورنتز باشد می بایست در شرط زیر صدق کند:

$$U(\Lambda)U(\Lambda')=U(\Lambda\Lambda'). \qquad (۴۴)$$

در این صورت می گوییم که $U(\Lambda)$ یک نمایش از Λ است. بعد $U(\Lambda)$ الزاما چهار نیست.

■ تمرین: نشان دهیدکه ماتریس های زیر نمایش هستند:

$$U(\Lambda) = (\Lambda^T)^{-1} \quad (۴۵)$$

$$U(\Lambda) = \Lambda \otimes \Lambda \cdots \otimes \Lambda. \quad (۴۶)$$

وقتی‌که با یک تبدیل لورنتز Λ از یک دستگاه به دستگاه دیگر می رویم، هر آن چیزی‌که با ماتریس $U(\Lambda)\Lambda$ تبدیل می شود یک بردار [۲] و هر آنچه‌که با ماتریس $U(\Lambda) = (\Lambda^T)^{-1}$ تبدیل می شود یک هم-بردار [۳] [۴] نامیده می شود. و بالاخره هر آنچه‌که با ماتریس های $U(\Lambda) = \Lambda \otimes \Lambda \otimes (\Lambda)^{-1T} \otimes ...$ تبدیل شود، یک تانسور نامیده می شودکه اندیس هایش مطابق با جای Λ یا $(\Lambda^{-1})^T$ بالا یا پایین است.

به عنوان مثال داریم:

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \quad (۴۷)$$

یا

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu. \quad (۴۸)$$

یا

$$t'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta t^{\alpha\beta} \quad (۴۹)$$

و

$$t'^{\mu\nu\rho} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma t^{\alpha\beta\gamma}. \quad (۵۰)$$

این ها نمایش هایی بودندکه به صورت سیستماتیک یافته نشده اند. از بخش قبلی ما اکنون همه نمایش های‌گروه لورنتز را در اختیار داریم.

---

[۲] vector

[۳] co-vector

[۴] این اصطلاح خیلی‌کم استفاده می شود. معمولا جای اندیس‌که بالا یا پایین باشد مشخص می‌کندکه با بردار سر وکار داریم یا هم-بردار . بنابراین همه را بردار می نامیم.

این نمایش ها با دو شاخص نیمه صحیح (j,j') مشخص می شوند. اگر نمایش اسپین j از $su(2)$ را با D_j نمایش دهیم، آنگاه معنای آنچه که یافته ایم این است که نمایش (j,j') از جبر لورنتز به صورت زیر است:

$$D_{(j,j')}(A_k) = D_j(A_k)\otimes I, \qquad D_{(j,j')}(B_k) = I\otimes D_{j'}(B_k). \tag{۵۱}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$D_{(j,j')}(J_k) = D_j(A_k)\otimes I + I\otimes D_{j'}(B_k), \qquad D_{(j,j')}(K_k) = -i\ D_j(A_k)\otimes I + i\ I\otimes D_{j'}(B_k), \tag{۵۲}$$

بعد این نمایش ها نیز برابر است با $(2j+1)\times(2j'+1)$. موجوداتی را که تحت نمایش $D_{(j,j')}$ تبدیل می شوند می توان با $\Psi_{m,m'}$ نشان داد که در آن $-j\leq m\leq j$ و $-j'\leq m'\leq j'$.

از این به بعد با دانستن ضمنی اینکه در باره چه نمایشی صحبت می‌کنیم، از نوشتن نماد $D_{(j,j')}$ صرف نظر می‌کنیم و رابطه **(۵۳)** را به صورت ساده زیر می نویسیم:

$$J_k \longrightarrow D_j(A_k)\otimes I + I\otimes D_{j'}(B_k), \qquad K_k \longrightarrow -i\ D_j(A_k)\otimes I + i\ I\otimes D_{j'}(B_k), \tag{۵۳}$$

■ نمایش یک بعدی $(0,0)$

ساده ترین نمایش، نمایش یک بعدی $(0,0)$ است که در آن

$$J_k \longrightarrow 0, \qquad K_k \longrightarrow 0, \tag{۵۴}$$

که در آن منظور از نماد $\longrightarrow$ این است که ماتریس J_k توسط ماتریس 0 نمایش داده می شود . این نمایش طبیعتاً یک بعدی است و در نتیجه هر عضو گروه لورنتز به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\Lambda \longrightarrow 1. \tag{۵۵}$$

این نمایش روی میدان ها اثر زیر را دارد:

$$\phi'(x') = \phi(x). \tag{۵۶}$$

یعنی میدان های اسکالر تحت این نوع نمایش تبدیل می شوند. دو نمایش ساده بعدی به ترتیب نمایش های $(\frac{1}{2},0)$ و $(0,\frac{1}{2})$ هستند.

■ نمایش دوبعدی بعدی $(\frac{1}{2},0)$

در نمایش $(\frac{1}{2},0)$ داریم:

$$A_i \longrightarrow \frac{1}{2}\sigma_i \otimes 1 = \frac{1}{2}\sigma_i, \qquad B_i \longrightarrow I \otimes 0 = 0 \tag{۵۷}$$

و در نتیجه

$$J_k \longrightarrow \frac{1}{2}\sigma_k, \qquad K_k \longrightarrow \frac{1}{2}\sigma_k. \tag{۵۸}$$

در این نمایش عناصر گروه لورنتز به صورت ماتریس های زیر نمایش داده می شوند:

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\epsilon}) \longrightarrow e^{(\boldsymbol{\epsilon}+i\boldsymbol{\theta})\cdot\boldsymbol{\sigma}} \tag{۵۹}$$

■ نمایش دوبعدی $(0,\frac{1}{2})$

در این نمایش داریم:

$$A_i \longrightarrow 0 \otimes I = 0 \quad , \qquad B_i \longrightarrow 1 \otimes \frac{1}{2}\sigma_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \tag{۶۰}$$

و در نتیجه

$$J_k \longrightarrow \frac{1}{2}\sigma_k, \qquad K_k \longrightarrow -\frac{1}{2}\sigma_k, \tag{۶۱}$$

و در نتیجه

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\epsilon}) \longrightarrow e^{(-\boldsymbol{\epsilon}+i\boldsymbol{\theta})\cdot\boldsymbol{\sigma}}. \tag{۶۲}$$

■ نمایش چهاربعدی $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

در نمایشی مثل $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ که چهاربعدی است داریم:

$$J_k \longrightarrow \sigma_k \otimes I + I \otimes \sigma_k, \qquad K_k \longrightarrow -i\sigma_k \otimes I + iI \otimes \sigma_k, \tag{۶۳}$$

و در نتیجه

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon}) \longrightarrow e^{(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\epsilon})\cdot(\boldsymbol{\sigma}\otimes I)+(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\epsilon})\cdot(I\otimes\boldsymbol{\sigma})} = e^{(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\epsilon})\cdot\boldsymbol{\sigma}} \otimes e^{(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\epsilon})\cdot\boldsymbol{\sigma}} \tag{۶۴}$$