کوانتش میدان های کلاسیک

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۶ آبان ۱۳۹۶

۱ مقدمه

در درس قبل با میدان های کلاسیک آشنا شدیم. یک میدان کلاسیک را می توان به صورت حد پیوسته ای از یک دستگاه با تعداد زیادی درجه آزادی در نظر گرفت که در آن تعداد درجات آزادی به سمت بی نهایت میل کرده و پیوسته شده است. سرراست ترین نحوه کوانتش یک میدان این است که تصویر شرودینگر را برای کوانتش انتخاب کنیم. خواهیم دید که کوانتش یک میدان کلاسیک منجر به ظهور حالت های کوانتومی ای می شود که خاصیت های ذره گونه دارند. این حالت ها همان هایی هستند که کوانتوم های میدان نامیده می شوند و بسته به نوع میدان نام هایی از قبیل فوتون یا فونون یا نظایر آن دارند. خواهیم دید که چگونه خواص میدان نظیر تعداد درجات آزادی اش، حقیقی یا مختلط بودن اش و تقارن هایش در خواص این ذرات یا کوانتم های آن تصویر می شود.

۲ کوانتش کانونیک یک میدان - تصویر شرودینگر

یک قرارداد برای نمادها: درتمام این درس و درس های آینده نماد های سیاه $\mathbf{x}$ و یا $\mathbf{k}$ برای بردارهای فضایی بکارمی رود و نماد ها ی نازک برای بردارهای فضا زمانی، بنابراین $x := (x^0, \mathbf{x})$ یا $k := (k^0, \mathbf{k})$. هم چنین $kx = k^0x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$.

با توجه به آنچه که از مکانیک کوانتومی می دانیم می توانیم تصور کنیم که کوانتش یک میدان نیز تعمیم سرراست کوانتشِ یک سیستم است که تعداد متغیرهای دینامیکی آن آنقدر زیاد شده که می توان آنها را به صورت یک پیوستار در نظر گرفت. خوب است که آنچه را از مکانیک کوانتومی آموخته ایم به یاد بیاوریم. یک سیستم مکانیک کلاسیک با متغیرهای دینامیکی $\{q_n, \quad i=1,\cdots N\}$ و $\{p_n, \quad i=1,\cdots N\}$ در نظر می گیریم. به عنوان مثال q_i می تواند اندازه جابجایی جرمی باشد که در نقطه ای با مختصات $x_n = na$ روی یک خط قرار گرفته اند، شکل (۲) . در مکانیک کلاسیک می دانیم که سینماتیک این سیستم با روابط کروشه پوآسون زیر توصیف می شود:

$$\{q_i,\ q_j\} = \{p_i,\ p_j\} = 0, \qquad \{q_i,\ p_j\} = \delta_{ij}. \tag{۱}$$

برای کوانتش چنین سیستمی کافی است که روابط فوق را به روابط جابجایی زیر بین عملگرهای هرمیتی $\hat{q}_i$ و $\hat{p_j}$ تبدیل کنیم:

$$[\hat{q}_i,\ \hat{q_j}] = [\hat{p_i},\ \hat{p_j}] = 0, \qquad [\hat{q}_i, \hat{p_j}] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{۲}$$

ساختمان ریاضی مکانیک کوانتومی با ساختن فضای هیلبرتی شروع می شود که این روابط در آن نمایش داده شوند.

این فضا فضای توابع مجذورمربعی [1] یعنی فضای توابعی است که در شرط زیر صدق می کنند:

$$\int Dq|\psi(q_1, q_2, \cdots q_N)|^2 < \infty. \tag{۳}$$

این فضا به ضرب داخلی زیر نیز مجهز است:

$$\langle\psi_1,\ \psi_2\rangle := \int \psi_1^*(q_1, \cdots q_N)\psi_2(q_1, \cdots q_N) Dq. \tag{۴}$$

در هر دوی این رابطه ها Dq عبارت است از:

$$Dq := \prod_{i=1}^{N} dq_i. \tag{۵}$$

برای این فضا می توان یک پایه از توزیع های حدی در نظر گرفت که اگر چه خود در فضای توابع مجذور مربعی قرار ندارند ولی کار با آن ها راحت است. این پایه تشکیل شده از ویژه بردارهای مشترک تمام عملگرهای $\hat{q}_i$ یعنی:

$$\hat{q}_i|q\rangle = q_i|q\rangle. \tag{۶}$$

[1] Square Integrable

هرگاه‌که لازم باشد حالت ِ $|q\rangle$ را به شکل مفصل تر ِ $|q\rangle = |q_1, \cdots q_N\rangle$ می نویسیم. این پایه متعامد ِیکه وکامل است به این معناکه :

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q-q') := \prod_{i=1}^{N} \delta(q_i - q_i'), \tag{۷}$$

و

$$\int Dq|q\rangle\langle q| = I. \tag{۸}$$

آنچه راکه در باره سینماتیک‌کوانتومی می دانیم بدون اثبات می توانیم بنویسیم چراکه خواننده از درس های مکانیک‌کوانتومی با نحوه استخراج این روابط آشناست. می دانیم‌که یک پایه دیگر برای همان فضای هیلبرت از ویژه بردارهای مشترک تمام عملگرهای $\{\hat{p}_i\}$ تشکیل می شود‌که دارای خواص زیر هستند:

$$\hat{p_j}|p\rangle = p_j|p\rangle, \tag{۹}$$

این پایه نیز متعامد وکامل است.

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p-p') := \prod_{j=1}^{N} \delta(p_j - p_j'), \qquad \int Dp|p\rangle\langle p| = I \tag{۱۰}$$

هم چنین رابطه بردارهای این دو پایه به شکل زیر بدست می آید.

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^N}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} q_j p_j}. \tag{۱۱}$$

$$\langle q|\hat{p}_i|q'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}\delta(q-q'). \tag{۱۲}$$

یک بردار دلخواه در فضای هیلبرت به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle = \int Dq|q\rangle\langle q|\psi\rangle \equiv \int Dq|q\rangle\psi(q). \tag{۱۳}$$

در این رابطه $\psi(q)$ تابع موج در پایه مختصات نامیده می شود و $|\psi(q)|^2$ چگالی احتمال این است‌که ذره در نقطه q باشد. همان بردار در پایه تکانه به شکل زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle = \int Dp|p\rangle\langle p|\psi\rangle \equiv \int Dp|p\rangle\tilde{\psi}(p). \tag{۱۴}$$

در این رابطه $\tilde{\psi}(p)$ تابع موج در پایه تکانه نامیده می شود و $|\tilde{\psi}(p)|^2$ چگالی احتمال این است که ذره دارای تکانه q باشد. معمولا در پایه مختصات کار می‌کنیم و در این پایه داریم:

$$\hat{q}_i\psi(q) = q_i\psi(q), \qquad\qquad \hat{p}_i\psi(q) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}\psi(q). \tag{۱۵}$$

تا اینجا ساختار فضای هیلبرت و مشاهده پذیرها و تعابیر تابع موج را بررسی‌کردیم. دینامیک سیستم‌کوانتومی البته با هامیلتونی مشخص می شود که به صورت معادله شرودینگر بیان می شود:

$$H\left(\{q_i\}, \{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}\}\right)\psi_t(q) = i\hbar\frac{d}{dt}\psi_t(q). \tag{۱۶}$$

برای‌کوانتش میدان‌کافی است به ترتیب زیر عمل‌کنیم: با توجه به شکل (۲) براحتی تعمیم های روابط فوق را به حالت پیوسته یعنی به میدان ها می نویسیم. در این تعمیم تغییرات زیر اتفاق می افتد:

$$\begin{aligned} i &\longrightarrow x \\ \hat{q}_i &\longrightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x}) \\ \hat{p}_i &\longrightarrow \hat{\pi}(\mathbf{x}) \\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i} &\longrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \\ \psi(q_1, q_2, \cdots q_N) &\longrightarrow \Psi[\phi]. \end{aligned} \tag{۱۷}$$

به این ترتیب $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ یک میدان‌کوانتومی می شود به این معنا که در هر نقطه از فضا یک عملگر‌کوانتومی $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ وجود دارد. دقت‌کنید‌که x دیگر یک متغیر دینامیکی نیست بلکه تنها یک پارامتر و برچسب است‌که نقاط مختلف فضا را مشخص می‌کند. حال به یاد می آوریم‌که روابط کروشه پوآسون برای میدان های‌کلاسیک به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\} &= \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = 0 \\ \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{۱۸}$$

مطابق اصول موضوع مکانیک‌کوانتومی نخستین قدم درکوانتش آن است‌که متغیر های دینامیکی‌کلاسیک را به عملگرهایی با روابط جابجایی کانونیک به شکل زیر جایگزین می‌کنیم:

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{y})] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = 0$$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \qquad (۱۹)$$

تذکر: باید دقت کنیم که دراین روابط $\mathbf{x}$ فقط به مختصات فضایی اشاره دارد و نه مختصات فضازمانی . یادآوری می کنیم که درتصویر شرودینگر عملگرها هیچ گونه بستگی زمانی ندارند و تمام بستگی زمانی در حالت ها نهفته است.

قدم بعدی آن است که فضای هیلبرتی بسازیم که عملگرهای $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ و $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ و روابط جابجایی فوق درآن نمایش پیدا کنند. درتشابه با مکانیک کوانتومی این فضا را فضای هیلبرت تابعی های انتگرال مجذوری پذیر روی میدان های ϕ که دراینجا نقش مختصات را ایفا می کنند می گیریم. درواقع اگر این فضای هیلبرت را با L^2 نمایش دهیم داریم :

$$F \in L^2 \longrightarrow \int D\phi F^*[\phi]F[\phi] < \infty \qquad (۲۰)$$

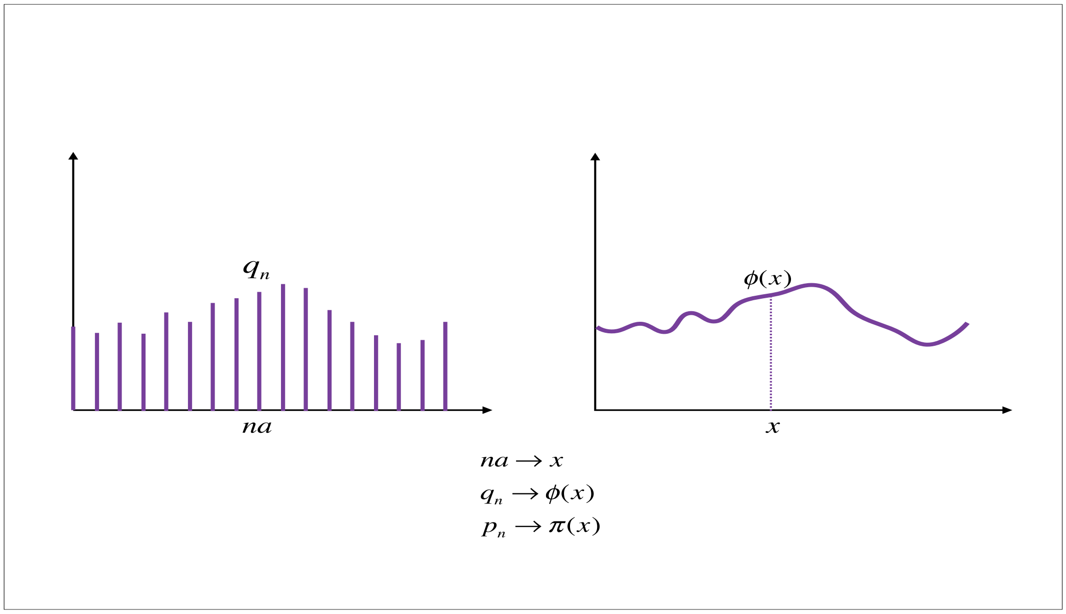
که درآن F یک تابعی است که به هر میدان ϕ مقدار $F[\phi]$ را نسبت می دهد و رابطه بالا به معنای آن است که انتگرال F^*F یک مقدار محدود است. دررابطه بالا می بایست معنای $D\phi$ را روشن کنیم. دراین باره ما تنها می توانیم آن اندازه دقت بخرج بدهیم که درفیزیک مقبولیت یافته است . مسلم است که از دیدگاه ریاضیات دقیق مطالب زیر دارای اشکال است . ولی تجربه نشان داده است که سرانجام برای این مفاهیم یک دستگاه ریاضی دقیق یافته خواهد شد. با این مقدمه می توان گفت که یک راه برای معنا دادن به $D\phi$ که به معنای اندازه انتگرال روی تمام هیئت های میدان است عبارت زیر است:

$$D\phi := \lim_{N\longrightarrow\infty} \prod_{k=1}^{N} d\phi_k \qquad (۲۱)$$

که در آن $\phi_k = \phi(ka)$ و a مقیاس طولی است که در آن میدان ϕ را گسسته کرده ایم.

دراینجا منظور آن است که فضا را تبدیل به یک شبکه گسسته با طول ثابت a می کنیم و پس ازانجام تمام محاسبات درنهایت طول ثابت شبکه را به سمت صفر میل می دهیم.

برای آنکه یک پایه برای این فضا پیدا کنیم درست مثل مکانیک کوانتومی ذرات عمل می کنیم. از آنجا که میدان های $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ همه با هم جابجا می شوند می توان ویژه بردار های مشترک همه آنها را تعیین کرد. این ویژه بردار ها را که ضمناً یک پایه برای فضای هیلبرت نیز تشکیل می دهند با



شکل ۱: یک میدان کوانتومی را می توان به عنوان حد پیوسته یک سیستم کوانتومی با تعداد زیادی درجه آزادی در نظر گرفت.

$$\{|\phi\rangle\} \tag{۲۲}$$

نمایش می دهیم که دارای ویژگی زیر هستند:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x})|\phi\rangle = \phi(\mathbf{x})|\phi\rangle \tag{۲۳}$$

این میدان ها در روابط تعامد و کامل بودن زیر را صدق می کنند:

$$\langle\phi|\phi'\rangle = \delta[\phi - \phi'] \qquad \int D\phi|\phi\rangle\langle\phi| = I \tag{۲۴}$$

که درآن تابع دلتای $\delta[\phi - \phi']$ یک تابعی دیراک روی فضای هیئت هاست و درشرط زیر صدق می کند:

$$\int D\phi'\delta[\phi-\phi']F[\phi'] = F[\phi] \tag{۲۵}$$

می توان هر حالت از میدان مثل $\langle\Psi|$ را برحسب این پایه بسط داد و آن را به صورت زیر نوشت :

$$|\Psi\rangle = \int |\phi\rangle\langle\phi|\Psi\rangle \tag{۲۶}$$

که درآن بنابراصول موضوع مکانیک کوانتومی $|\langle\phi|\Psi\rangle|^2$ چگالی احتمال یافتن میدان درهیئت های نزدیک ϕ است. به عبارت دقیقتر $|\langle\phi|\Psi\rangle|^2 D\phi$ احتمال یافتن میدان درحجم $D\phi$ و حول نقطه ϕ است. تابعی $\Psi[\phi] =: \langle\phi|\Psi\rangle$ درحقیقت تابع موج میدان است .

تمام آنچه که را که دربالا برای ویژه پایه مشترک عملگرهای میدان $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ گفتیم می توان بدون کم و کاست برای ویژه پایه مشترک عملگرهای $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ نیزگفت و روابط زیر رانوشت :

$$\hat{\pi}(\mathbf{x})|\pi\rangle = \pi(\mathbf{x})|\pi\rangle \tag{۲۷}$$

$$\langle\pi|\pi'\rangle = \delta(\pi-\pi') \qquad \int |\pi\rangle\langle\pi| D\pi = I \tag{۲۸}$$

$$\int D\phi|\phi\rangle\langle\phi|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \tag{۲۹}$$

با استفاده از روابط جابجایی اپراتورهای میدان یعنی روابط (19) می توان روابط زیر را با استدلال هایی کاملا مشابه آنچه که درمکانیک کوانتومی دیده ایم، بدست آورد.

$$\langle\phi|\pi\rangle = Ae^{\frac{i}{\hbar}\int d\mathbf{x}\phi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})} \tag{۳۰}$$

$$\langle\phi|\hat{\pi}(\mathbf{x})|\phi'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})}\delta(\phi-\phi') \quad (۳۱)$$

که درآنها A یک عدد ثابت است و $\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})}$ مشتق‌گیری تابعی است.

رابطه بالا را می توان به این شکل نیز بیان‌کردکه در نمایش مختصات عملگر های $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ و $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ به ترتیب شکل های زیر را پیدا می‌کنند:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) \longrightarrow \phi(\mathbf{x}) \qquad \hat{\pi}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \quad (۳۲)$$

و درنیتجه معادله تحول میدان‌که توسط هامیلتونی $H = \int \mathcal{H}\left(\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}$ آن داده می شود درنمایش مختصات به شکل زیر نوشته می شود:

$$\int d\mathbf{x}\mathcal{H}\left(\phi(\mathbf{x}), \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})}\right)\Psi[\phi] = i\hbar\frac{d}{dt}\Psi[\phi] \quad (۳۳)$$

اگر چه این نوع نگاه به‌کوانتش میدان ها از نظر مفهومی و تشابه‌کاملی‌که با مکانیک‌کوانتومی دارد از نظر مفهومی شفاف و روشن است ولی به چند دلیل نگاهی مفید و موثر نیست. نخست آنکه خیلی از عناصر ریاضی ای‌که در این روش تعریف می شود مثل مشتق های تابعی، انتگرال روی میدان ها، حالت های $|\phi\rangle$ و ضرب داخلی آنها و بسیاری از عناصر دیگر از نظر ریاضی خوش تعریف نیستند. درست است‌که در مکانیک‌کوانتومی نیز با عناصر نه چندان خوش تعریفی مثل بردارهای تکینِ $|q\rangle$ بر می خوریم ولی در نظریه میدان این عناصر به چیزهایی تعمیم می یابند، مثل $|\phi\rangle$که فاصله شان از عناصر خوش تعریف ریاضی بسیار بیشتر می شود. هم چنین معلوم نیست‌که چگونه می بایست بین چیزهایی مثل $\Psi[\phi]$ که تابعی موج میدان است وکوانتاهای میدان (مثل فوتون ها یا فونون ها) رابطه ایجادکرد و سرانجام این‌که آن سوالاتی‌که در این رهیافت به میدان های‌کوانتومی می پرسیم، مثل احتمال بودن میدان در یک حوزه معین‌که توسط $|\Psi[\phi]|^2 D\phi$ داده می شود، سوالاتی نیستندکه در آزمایشگاه پرسیده می شوند. در واقع سوالاتی‌که در آزمایشگاه می پرسیم این ها هستندکه چه نوع برخوردهایی بین ذرات رخ می دهد، سطح پراکندگی این برخوردها چقدر است و طول عمر ذرات چقدر است و این ها سوالاتی هستندکه در این رهیافت پاسخگویی به آنها آسان نیست .

۳ انتخاب یک پایه بهتر

حال نشان می دهیم که چگونه می توان اشکالات بالا را با انتخاب یک پایه بهتر برای فضای هیلبرت برطرف کرد. نخست سعی می کنیم که میدان پیوسته $\hat{\phi}$ را با کمیت های گسسته جایگزین کنیم. برای این کار فرض می کنیم که حجمی که میدان در آن محصور یا تعریف شده است یک حجم متناهی است. به این ترتیب می توانیم برای آن یک تبدیل فوریه شمارش پذیر و گسسته بکار ببریم. برای سادگی نخست فرض می کنیم که میدان در یک بعد و در فاصله ی $[0,\ L]$ تعریف شده است. در ادامه براحتی می توانیم میدان را در فضای d بعدی نیز در نظر بگیریم. تبدیل فوریه میدان های $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ و $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k \hat{\phi}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\\ \hat{\pi}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k \hat{\pi}_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

به چند نکته مهم در این جا باید اشاره کنیم:

یک – میدان های $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ و $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ تنها تابع مختصات فضا هستند و هیچ گونه بستگی زمانی ندارند. این ها در واقع مختصات و تکانه های تعمیم یافته ای هستند که با مختصه فضایی x مشخص شده اند. بنابراین این میدان ها کاملا از هم مستقل هستند و یکی از دیگری بدست نمی آید.

دو – شرایط مرزی را تناوبی در نظر گرفته ایم به این معنا که

$$\hat{\phi}(L) = \hat{\phi}(0), \qquad \hat{\pi}(L) = \hat{\pi}(0), \qquad (۳۵)$$

در نتیجه پارامتر k در شرط $kL = 2\pi n,$ صدق می کند که در آن n یک عدد صحیح مثبت یا منفی است.

سه – این که در رابطه دوم از $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ بجای $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ استفاده کرده ایم با توجه به اینکه $\mathbf{k}$ همه مقادیر مثبت و منفی را اختیار می کند از کلیت این بسط نمی کاهد و فقط برای راحتی بعدی این انتخاب انجام شده است.

از هرمیتی بودن میدان ها یعنی شرط های

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{x}), \qquad \hat{\pi}(\mathbf{x}) = \hat{\pi}^\dagger(\mathbf{x}), \tag{۳۶}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{\phi}^\dagger_{\mathbf{k}} = \hat{\phi}_{-\mathbf{k}}, \qquad \hat{\pi}^\dagger_{\mathbf{k}} = \hat{\pi}_{-\mathbf{k}}. \tag{۳۷}$$

از روابط (۳۴) بدست می آوریم که

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L d\mathbf{x}\hat{\phi}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ \hat{\pi}_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L d\mathbf{x}\hat{\pi}(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{۳۸}$$

■ تمرین: از روابط جابجایی بین میدان ها استفاده کنید و نشان دهید که روابط زیر برقرارند:

$$[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}, \hat{\phi}_{\mathbf{k}'}] = 0, \qquad [\hat{\pi}_{\mathbf{k}}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}] = 0, \qquad [\hat{\phi}_{\mathbf{k}}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \tag{۳۹}$$

به این ترتیب با استفاده از تبدیل فوریه میدان های کوانتومی پیوسته را به مجموعه بی نهایت و شمارش پذیری از عملگرهای کوانتومی جایگزین کرده ایم. تا همینجا هم می توان گفت که کمی از مشکلاتی که در مورد خوش تعریف بودن مفاهیم و عناصر ریاضی داشتیم برطرف شده است. اگر از این به بعد همان روش گذشته را در پیش بگیریم به این معنا که پایه ای برای فضای هیلبرت انتخاب کنیم که ویژه حالت مشترک همه عملگرهای $\hat{\phi}_{\mathbf{k}}$ یا $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}$ باشد، رهیافت ما، بخصوص برای وقتی که می خواهیم با تصویر ذره ای ارتباط برقرار کنیم کامل نخواهد بود. برای این که چنین ارتباطی برقرار کنیم می بایست یک سیستم مشخص را در نظر داشته باشیم چرا که تنها با داشتن یک سیستم مشخص است که می توانیم از انرژی و تکانه و دیگر مشاهده پذیرها صحبت کنیم و ببینیم که آیا حالت های فضای هیلبرت را می توان به این صورت تعبیر و تفسیر کرد که نشان دهنده ذراتی با انرژی و تکانه مشخص هستند یا خیر؟ در غیاب این مشاهده پذیرها هر نوع تلاشی برای تفسیر ذره ای بی حاصل است. در ضمن می بایست یک سیستم بدون برهم کنش را در نظر بگیریم زیرا تنها در این صورت است که می توانیم ویژه حالت های انرژی را حساب کنیم و انرژی و تکانه کل را به صورت مجموع انرژی و تکانه تک تک ذرات تفسیر و تعبیر کنیم.

۴ میدان اسکالر حقیقی

برای فهم این موضوع به صورت دقیق تر لاگرانژی زیر را در نظر می‌گیریم که ساده ترین میدان یعنی یک میدان اسکالر حقیقی را در یک بعد نشان می دهد. :

$$L = \int dx \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{۴۰}$$

هامیلتونی این سیستم برابر است با :

$$H = \int dx \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\frac{d\phi}{dx}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{۴۱}$$

■ تمرین: با استفاده از رابطه (۳۴) نشان دهید که هامیلتونی به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \pi_k\pi_{-k} + (k^2+m^2)\phi_k\phi_{-k}. \tag{۴۲}$$

با تعریف کمیت زیر را که بعد انرژی دارد

$$\epsilon_k := \sqrt{k^2+m^2}$$

هامیلتونی به شکل کاملا آشنایی در می آید که یادآور مجموعه ای از نوسانگرهای بدون برهم‌کنش است:

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \pi_k\pi_{-k} + \epsilon_k^2\phi_k\phi_{-k}. \tag{۴۳}$$

بنابراین با دانشی که از مطالعه نوسانگرهای هارمونیک کسب کرده ایم عملگرهای زیر را تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &:= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}}(\pi_k - i\epsilon_k\phi_{-k}) \\ \hat{a}_k^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}}(\pi_{-k} + i\epsilon_k\phi_k). \end{aligned} \tag{۴۴}$$

■ تمرین: الف: نشان دهید که روابط زیر برقرارند:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0, \qquad [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \qquad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}. \tag{۴۵}$$

ب: با تعریف $\hat{n}_k := \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k,$ نشان دهید که روابط زیر برقرارند:

$$[\hat{n}_k, \hat{a}_{k'}] = \delta_{k,k'}\hat{a}_k, \qquad [\hat{n}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}\hat{a}_k^\dagger, \qquad [\hat{n}_k, \hat{n}_{k'}] = 0. \tag{۴۶}$$

از روابط (۹۶) می توانیم ساختار فضای هیلبرت را به طور کامل بفهمیم. این فضا از ویژه بردارهای مشترک تمام عملگرهای $\hat{n}_k$ که باهم جابجا می شوند ساخته می شود. ویژه مقدارهای این عملگرها هم اعداد صحیح مثبت هستند. بنابراین فضای هیلبرت به شکل زیر است:

$$\mathcal{F} := Span\{|n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots\rangle, \quad n_i = 0, 1, 2, \cdots\} \tag{۴۷}$$

این فضا را به نام ر فیزیکدان روس ولادیمیر الکساندرویچ فوک [۲] فضای فوک [۳] می‌گوییم. روی این فضا عملگرها به ترتیب زیر عمل می‌کنند:

$$\begin{aligned}
\hat{n}_k|n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots\rangle &= n_k|n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots\rangle, \\
\hat{a}_k|n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots\rangle &= \sqrt{n_k}|n_1, n_2, \cdots n_k - 1, \cdots\rangle, \\
\hat{a}_k^\dagger|n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots\rangle &= \sqrt{n_k + 1}|n_1, n_2, \cdots n_k + 1, \cdots\rangle.
\end{aligned} \tag{۴۸}$$

یادآوری می‌کنیم که این حالت ها بهنجار و کامل هستند به این معنا که

$$\begin{aligned}
&\langle n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots |n_1', n_2', \cdots n_k', \cdots\rangle = \delta_{n_1,n_1'}\delta_{n_2,n_2'}\cdots\delta_{n_k,n_k'}\cdots \\
&\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty}\cdots|n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots\rangle\langle n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots| = I_{\mathcal{F}}.
\end{aligned} \tag{۴۹}$$

اما معنای فیزیکی این حالت ها چیست؟ آیا مجاز هستیم تنها به این دلیل که عملگرهای $\hat{a}_k$ و $\hat{a}_k^\dagger$ اعداد n_k را یکی یکی کم یا زیاد می‌کنند به آنها عملگر فنا و خلق بگوییم و n_k ها را نیز تعداد ذرات تلقی‌کنیم؟ مسلما بدست آوردن چنین تصویری نیازمند استدلال های فیزیکی خیلی بیشتری است. این استدلال ها را در بخش بعدی می آوریم.

۵ کوانتوم های میدان

پاسخ به این سوالات فیزیکی تنها وقتی ممکن است که ما اطلاعاتی در باره کمیت های فیزیکی نظیر انرژی، تکانه و نظایر آنها داشته باشیم.

■ تمرین: نشان دهید که هامیلتونی (۴۳) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$H = \sum_k \epsilon_k \left(\hat{a_k}^\dagger \hat{a_k} + \frac{1}{2}\right) \tag{۵۰}$$

[۲] Vladimir Alexandrovich Fock, December 22, 1898 – December 27, 1974

[۳] Fock Space

اگر از مقدار ثابت $\sum_k \frac{1}{2}$ صرف نظرکنیم یا اینکه همه انرژی ها را با تفاوت شان با این مقدار بسنجیم آنگاه به این نتیجه می رسیم که انرژی هر حالت مثل $|n_1, n_2, \cdots\rangle$ برابر است با

$$E(n_1, n_2, \cdots) = n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \cdots = \sum_k n_k\epsilon_k. \tag{۵۱}$$

با توجه به این رابطه می توانیم بگوییم که واقعا n_k تعداد ذرات با انرژی ϵ_k را می شمارد و در نتیجه درست خواهد بود که بگوییم $\hat{n_k}$ عملگر شمارشِ ذرات از نوع k با انرژی ϵ_k است و عملگرهای $\hat{a_k}^\dagger$ و $\hat{a_k}$ به ترتیب عملگرهای خلق و فنای این نوع ذرات هستند.

برای آنکه معنای این تصویر ذره ای را بهتر بفهمیم تکانه میدان را حساب می‌کنیم. می دانیم که هامیلتونی () دارای یک تفارن انتقالی است. بنابر قضیه نوتر این تقارن در بعد $1+1$ منجر به 2 کمیت پایسته می شود.

■ تمرین: با استفاده از قضیه نوتر و تقارن تحت انتقال

$$\begin{aligned} x^\mu \longrightarrow x'^\mu &= x^\mu + \epsilon^\mu \\ \phi(x) \quad \longrightarrow & \quad \phi'(x') = \phi(x), \end{aligned} \tag{۵۲}$$

نشان دهید که کمیت های زیر جریان پایسته تشکیل می دهند:

$$(J_\nu)^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}}\partial^\mu\phi - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu. \tag{۵۳}$$

دقت کنید که در اینجا اندیس ν نوع جریان پایسته را نشان می دهد. در این جا به تعداد بعد فضازمان جریان های پایسته داریم که عبارتند از $J_0^\mu,\ J_1^\mu,\ J_2^\mu, \cdots J_{D+1}^\mu.$

به همین تعداد نیز کمیت پایسته داریم که عبارتند از :

$$Q_\nu := \int J^0_\nu d^D x. \tag{۵۴}$$

از این کمیت ها Q_0 همان انرژی یا هامیلتونی است و بقیه کمیت ها مولفه های تکانه میدان هستند. که می توانیم آنها را به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L}\right) d^D x \\ \mathbf{P} &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\nabla\phi\right) d^D x = \int \left(\pi(x)\nabla\phi(x)\right) d^D x. \end{aligned} \tag{۵۵}$$

■ تمرین: تکانه ی میدان یعنی P را برحسب عملگرهای $\hat{a}_k$ و $\hat{a}_k^\dagger$ بنویسید و نشان دهیدکه به شکل زیر در می آید:

$$\mathbf{P} = \sum_k k\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \tag{۵۶}$$

معنای این رابطه این است‌که

$$\mathbf{P}|n_1, n_2, \cdots n_j, \cdots\rangle = (n_1k_1 + n_2k_2 + \cdots n_jk_j + \cdots)\,|n_1, n_2, \cdots n_j, \cdots\rangle. \tag{۵۷}$$

رابطه های (۵۱) و (۵۷) مجموعا به این معنا هستندکه n_j تعداد ذرات با تکانه ی k_j و انرژی ϵ_j است و نکته مهم این است‌که رابطه تکانه و انرژی این ذرات به شکل $\epsilon_j - k_j^2 = m^2$ است‌که نشان می دهد جرم این ذرات برابر با m است.

به این ترتیب می توانیم ساختار فضای هیلبرت را بهتر بفهمیم. از این به بعد می توانیم براحتی از تعداد ذرات صحبت‌کنیم. حالت خلاء حالتی است‌که تمام n_j ها صفر هستند. این حالت یک زیرفضای یک بعدی درست می‌کندکه آن را با F_0 نمایش می دهیم. زیر فضای تک ذره ای زیرفضای حالت هایی است‌که در آن ها تنها یک ذره وجود دارد. این زیر فضا را با F_1 نشان می دهیم :

$$F_1 := Span\{|1, 0, 0, \cdots\rangle,\ |0, 1, 0, 0, \cdots\rangle, \cdots\} \tag{۵۸}$$

زیر فضای دو ذره ای از حالت هایی تشکیل می شودکه تنها دو ذره دارند. این دو ذره می توانند دو ذره با یک تکانه یکسان یا دو ذره متفاوت باشند:

$$F_2 := Span\{|2, 0, 0, \cdots\rangle,\ |1, 1, 0, 0, \cdots\rangle, \cdots\} \tag{۵۹}$$

فضای فوک عبارت است از

$$F = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \tag{۶۰}$$

از همه این حالت ها به عنوان حالت های میدان حرف می زنیم. وقتی می‌گوییم‌که میدان در حالت $|n_j = 1, 0,\ 0, 0\cdots\rangle$ است یعنی یک ذره از نوع j در فضا وجود دارد یا یک‌کوانتوم میدان با مشخصات k_j و ϵ_j در فضا وجود دارد.

۶ میدان اسکالر مختلط

مفهوم کوانتوم میدان را می توان با مطالعه میدان های پیچیده ترگسترش داد و آن را بهتر فهمید. تا کنون یک میدان اسکالر حقیقی را بررسی کردیم. می توانیم یک میدان کمی پیچیده تر در نظر بگیریم و کوانتوم های آن را بررسی کنیم. این بار میدان اسکالر مختلط را در نظر می گیریم. از آنجا که دیدیم کوانتوم های میدان را تنها برای میدان آزاد می توان دید از همان ابتدا لاگرانژی میدان آزاد را در نظر می گیریم که به شکل زیر است:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \tag{۶۱}$$

دقت کنید که دو میدان ϕ و ϕ^* را باید مستقل از هم در نظر گرفت . این امر معادل این است که میدان را به صورت $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ نوشته و دو میدان حقیقی ϕ_1 و ϕ_2 را مستقل بگیریم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \pi &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \\ \pi^* &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}. \end{aligned} \tag{۶۲}$$

بنابراین هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = \int dx \left(\pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - \mathcal{L} \right) = \int dx \left(\pi^*\pi + \frac{\partial \phi^*}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + m^2 \phi^* \phi \right). \tag{۶۳}$$

- یک نکته در باره نمادگذاری: از نماد $*$ هم برای نشان دادن مزدوج مختلطِ یک عدد و هم برای نشان دادن الحاقی یک عملگر استفاده می کنیم. بنابراین برای یک عدد c $c*$ به معنای مزدوج مختلف و برای یک عملگر C C^* به معنای $C^\dagger$ است.

مطابق معمول کروشه های پوآسون به جابجاگر عملگرهای کوانتومی تبدیل می شوند یعنی پس از کوانتش داریم:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x-y), \qquad [\hat{\phi}^*(x), \hat{\pi}^*(y)] = i\delta(x-y). \tag{۶۴}$$

بقیه جابجاگرها برابر با صفر هستند. از جمله دقت کنید که

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^*(y)] = [\hat{\phi}^*(x), \hat{\pi}(y)] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}^*(y)] = \cdots = 0. \tag{۶۵}$$

در این روابط بازهم دقت کرده ایم که دو میدان $\hat{\phi}$ و $\hat{\phi}$ مستقل از یکدیگرند.

از آنجا که دیگر نیاز به اعمالی مثل مشتق گیری نداریم و هم چنین از آنجا که این دو رابطه با این که ϕ^* واقعا عملگرالحاقی ϕ باشد سازگار هستند،

از این به بعد تنها یکی از این دو رابطه را می نویسیم. تبدیل فوریه را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k e^{ikx}\,\hat{\phi}_k\\ \hat{\pi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k e^{-ikx}\,\hat{\pi}_k,\end{aligned} \tag{۶۶}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_k &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int dx\, e^{-ikx}\,\hat{\phi}(x)\\ \hat{\pi}_k &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int dx\, e^{ikx}\,\hat{\pi}(x).\end{aligned} \tag{۶۷}$$

دقت کنید که از آنجا که $\phi(x) \neq \phi^*(x)$ دیگر هیچ رابطه ای بین ϕ_k و ϕ_{-k} وجود ندارد. این امر برای π_k و π_{-k} هم صدق می کند.

از روابط (۶۷) بدست می آوریم:

$$[\hat{\phi}_k, \hat{\pi}_{k'}] = i\delta_{k.k'}, \qquad [\hat{\phi}^*_k, \hat{\pi}^*_{k'}] = i\delta_{k.k'}. \tag{۶۸}$$

بقیه روابط جابجایی صفر هستند به عنوان مثال داریم:

$$[\hat{\phi}_k, \hat{\pi}^*_{k'}] = [\hat{\phi}^*_k, \hat{\pi}_{k'}] = 0. \tag{۶۹}$$

■ حال: نشان دهید که هامیلتونی برحسب مودهای فوریه به شکل زیر نوشته می شود:

$$H = \sum_k \pi^*_k\pi_k + \epsilon_k^2\phi^*_k\phi_k, \tag{۷۰}$$

که در آن $\epsilon_k := \sqrt{m^2+k^2}$.

حال با توجه به استقلال ϕ_k و ϕ^*_k و هم چنین مودهای تکانه عملگرهای زیر را تعریف کنیم:

$$\begin{aligned}\hat{a}_k &:= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}}(\pi_k - i\epsilon_k\phi^*_k) & \hat{b}_{-k} &:= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}}(\pi_k + i\epsilon_k\phi^*_k)\\ \hat{a}^*_k &:= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}}(\pi^*_k + i\epsilon_k\phi_k) & \hat{b}_{-k} &:= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}}(\pi^*_k - i\epsilon_k\phi_k).\end{aligned} \tag{۷۱}$$

■ تمرین: الف: نشان دهید که روابط زیر برقرارند:

$$[\hat{a}_k, \hat{b}_{k'}] = [\hat{a}_k, \hat{b}^*_{k'}] = [\hat{a}^*_k, \hat{b}_{k'}] = [\hat{a}^*_k, \hat{b}^*_{k'}] = 0 \tag{۷۲}$$

ب: نشان دهید که روابط زیر برقرارند:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}^*_{k'}] = \delta_{k,k'}, \qquad [\hat{b}_k, \hat{b}^*_{k'}] = \delta_{k,k'}. \tag{۷۳}$$

پ: با تعریف $\hat{n}_k := \hat{a}^*_k \hat{a}_k,$ نشان دهید که روابط زیر برقرارند:

$$[\hat{n}_k, \hat{a}_{k'}] = \delta_{k,k'} \hat{a}_k, \qquad [\hat{n}_k, \hat{a}^*_{k'}] = \delta_{k,k'} \hat{a}^*_k, \qquad [\hat{n}_k, \hat{n}_{k'}] = 0. \tag{۷۴}$$

■ تمرین: هامیلتونی را بر حسب عملگرهای تعریف شده در بالا بنویسید و نشان دهید که شکل زیر را پیدا می‌کند:

$$H = \sum_k \epsilon_k (a^*_k a_k + b^*_k b_k + 1) \tag{۷۵}$$

■ مسئله: لاگرانژی میدان اسکالر مختلط تحت انتقال متقارن است. جریان های ناشی از این تقارن را بدست آورید. سپس تکانه میدان را مشخص‌کنید و آن را برحسب عملگرهای a_k و b_k و ترانهاده های آنها بنویسید و نشان دهید که فرم زیر را پیدا می‌کند:

$$P = \sum_k k (a^*_k a_k + b^*_k b_k + 1). \tag{۷۶}$$

از آنجا که عملگرهای $a^*_k a_k$ و $b^*_k b_k$ همه با هم جابجا می شوند، حالت های فضای هیلبرت یعنی حالت هایی‌که ویژه بردار تمام عملگر های جابجا شونده هستند، اکنون عبارت اند از:

$$F := Span\{|n_1, n_2, \cdots; n'_1, n'_2, \cdots\rangle\} \tag{۷۷}$$

روابط زیر برای این حالت ها صحیح هستند:

$$\begin{aligned} a^*_k a_k |n_1, n_2, \cdots; n'_1, n'_2, \cdots\rangle &= n_k |n_1, n_2, \cdots; n'_1, n'_2, \cdots\rangle \\ b^*_k a_k |n_1, n_2, \cdots; n'_1, n'_2, \cdots\rangle &= n'_k |n_1, n_2, \cdots; n'_1, n'_2, \cdots\rangle. \end{aligned} \tag{۷۸}$$

بنابراین به نظر می رسد‌که دو نوع ذره در این فضای هیلبرت وجود دارند یک نوع آنهایی هستند‌که توسط عملگرهای a^*_k و a_k خلق و نابود می شوند و نوع دیگر آنهایی‌که توسط عملگرهای b^*_k و b_k خلق و نابود می شوند. از خود می پرسیم‌که فرق این دو نوع ذره چیست؟ برای پاسخ به

این سوال انرژي و تکانه این حالت ها را حساب می‌کنیم. با توجه به () و () بدست می آوریم:

$$H|n_1, n_2, \cdots; n'_1, n'_2, \cdots\rangle = \sum_k \epsilon_k (n_k + n'_k + 1)$$
$$P|n_1, n_2, \cdots; n'_1, n'_2, \cdots\rangle = \sum_k k(n_k + n'_k) \quad (۷۹)$$

بنابراین به نظر می رسدکه این دو نوع ذره هیچ فرقی با هم ندارند و رابطه تکانه و انرژی هر دوی آنها برابر است با $\epsilon_k = \sqrt{k^2+m^2}$ که به این معناست‌که این دو نوع ذره هر دو یک جرم دارند. سوال مهمی‌که پیش می آید این است‌که پس تفاوت این دو نوع ذره در چیست؟ اگر هر دو عملگر a^*_k و b^*_k خلق‌کننده ذراتی با جرم m هستند پس چه تفاوتی بین این ذرات هست و اصولا چرا می بایست از ابتدا بین این عملگرها تفاوتی قایل شد؟

برای پاسخ به این سوال می بایست به یک تقارن مهم دیگرکه در میدان اسکالر حقیقی وجود ندارد توجه‌کنیم. این تقارن، تقارن زیر است:

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\phi(x). \quad (۸۰)$$

به عبارت دیگر این میدان اسکالر مختلط دارای یک تقارن $U(1)$ است. این تقارن پیوسته منجر به یک‌کمیت پایسته جدید می شود.

- مسئله: الف: نشان دهیدکه‌کمیت پایسته مربوط به این تقارن برابر است با:

$$Q := i\int dx(\pi(x)\phi(x) - \pi^*(x)\phi^*(x)) \quad (۸۱)$$

ب: سپس این‌کمیت را برحسب عملگرهای خلق و فنا بنویسید و نشان دهیدکه به فرم زیر در می آید:

$$Q = \sum_k (a^*_k a_k - b^*_k b_k). \quad (۸۲)$$

اگرکمیت Q پایسته باشد، هر ضریبی از آن مثل eQ که در آن e یک عدد مشخص مثلا بار الکترون است ، نیز یک‌کمیت پایسته است . البته ما بعدا در باره چگونگی مطالعه تابع موج الکترون صحبت خواهیم‌کرد چراکه الکترون‌کوانتوم یک میدان مخصوص به خود است ولی فعلا برای این‌که نتایج مختلط بودن یک میدان را بفهمیم به این بحث ساده بسنده می‌کنیم. حال اگر بار یک حالت را حساب‌کنیم خواهیم داشت:

$$eQ|n_1, n_2, \cdots; n'_1, n'_2, \cdots\rangle = \sum_k e(n_k - n'_k) \quad (۸۳)$$

که به این معناست‌که اگر چه هر دو نوع ذره یک جرم دارند ولی بار الکتریکی آنها با هم متفاوت است. به عبارت دیگر این دو ذره پادذره یک دیگر هستند. به این ترتیب میدان مختلط به دلیل تقارن $U(1)$ ای‌که دارد، ذرات وکوانتوم هایش یک نوع بار موسوم به بار $U(1)$ داردکه ما

برای راحتی آن را بار الکتریکی می نامیم و این بار الکتریکی ذرات را از هم متمایز می‌کند. در قسمت بعدی میدان بازهم پیچیده تری در نظر می‌گیریم. این میدان یک میدان سه مولفه ای است و تحت تبدیلات گروه غیر آبلی $SO(3)$ متقارن است.

---

۷ میدان اسکالر سه مولفه ای حقیقی با تقارن $SO(3)$

مفهوم کوانتوم میدان را می توان با مطالعه میدان های پیچیده ترگسترش داد و آن را بهتر فهمید. تاکنون یک میدان اسکالر حقیقی و یک میدان اسکالر مختلط را بررسی کردیم. می توانیم یک میدان کمی پیچیده تر در نظر بگیریم و کوانتوم های آن را بررسی کنیم. این بار میدان اسکالر سه مولفه ای $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم که در آن هرکدام از میدان های ϕ_1 ، ϕ_2 و ϕ_3 یک میدان اسکالر حقیقی هستند. لاگرانژی این میدان برابر است با:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2}m^2 \Phi^T \Phi. \tag{۸۴}$$

که در آن $\Phi^T = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix}$. می توانیم لاگرانژی را به صورت معادل زیر نیز بنویسیم:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - \frac{1}{2}m^2 \phi_a \phi_a, \tag{۸۵}$$

که در آن روی اندیس a جمع زده شده است. با توجه به این شکل می توان تکانه های مزدوج را حساب کرد:

$$\pi_a := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} = \dot{\phi}_a. \tag{۸۶}$$

بنابراین هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = \int dx \left(\pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}\right) = \frac{1}{2}\int dx \left(\pi_a \pi_a + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi_a}{\partial x} + m^2 \phi_a \phi_a\right), \tag{۸۷}$$

و یا به طور فشرده تر

$$H = \frac{1}{2}\int dx\left(\Pi^T\Pi + \frac{\partial\Phi^T}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + m^2\Phi^T\Phi\right), \tag{۸۸}$$

که در آن $\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$. پس ازکوانتش داریم:

$$[\hat{\phi}_a(x), \hat{\pi}_b(y)] = i\delta_{a,b}\delta(x-y), \tag{۸۹}$$

بقیه جابجاگرها برابر با صفر هستند.

تبدیل فوریه را به صورت ماتریسی زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k e^{ikx}\hat{\Phi}_k \\ \hat{\Pi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k e^{-ikx}\hat{\Pi}_k, \end{aligned} \tag{۹۰}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_k &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int dx e^{-ikx}\hat{\Phi}(x) \\ \hat{\Pi}_k &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int dx e^{ikx}\hat{\Pi}(x). \end{aligned} \tag{۹۱}$$

بدلیل حقیقی بودن میدان ها بازهم شرط های $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$ و $\Pi_k^* = \Pi_{-k}$ برقرار هستند. از روابط (۸۹) بدست می آوریم:

$$[\hat{\phi}_{a,k}, \hat{\pi}_{b,k'}] = i\delta_{a,b}\delta_{k.k'}. \tag{۹۲}$$

■ تمرین : نشان دهیدکه هامیلتونی برحسب مودهای فوریه به شکل زیر نوشته می شود:

$$H = \sum_k \Pi_k^\dagger\Pi_k + \epsilon_k^2\Phi_k^\dagger\Phi_k, \tag{۹۳}$$

که در آن $\epsilon_k := \sqrt{m^2+k^2}$.

هم چنین می توان عملگرهای خلق و فنا را به صورت زیر نوشت. دقت‌کنید‌که این روابط به صورت فشرده و ماتریسی نوشته شده اند:

$$\hat{A}_k := \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}}(\Pi_k - i\epsilon_k\Phi_{-k}) \qquad \hat{A}_k^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k}}(\Pi_{-k} + i\epsilon_k\Phi_k) \tag{۹۴}$$

که در آن $A_k := \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ a_{3,k} \end{pmatrix}$.

- تمرین: الف: نشان دهید‌که روابط زیر برقرارند:

$$[\hat{a}_{\alpha,k}, \hat{a}^\dagger_{\beta,k'}] = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,k'}, \tag{۹۵}$$

پ : با تعریف $\hat{n}_{\alpha,k} := \hat{a}^\dagger_{\alpha,k}\hat{a}_{\alpha,k}$, نشان دهید‌که روابط زیر برقرارند:

$$[\hat{n}_{\alpha,k}, \hat{a}_{\beta,k'}] = -\delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,k'}\hat{a}_{\alpha,k}, \qquad [\hat{n}_{\alpha,k}, \hat{a}^\dagger_{\beta,k'}] = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,k'}\hat{a}^\dagger_{\alpha,k}, \qquad [\hat{n}_{\alpha,k}, \hat{n}_{\beta,k'}] = 0. \tag{۹۶}$$

- تمرین: هامیلتونی را بر حسب عملگرهای تعریف شده در بالا بنویسید و نشان دهید‌که شکل زیر را پیدا می‌کند:

$$H = \sum_k \epsilon_k(A_k^T A_k + \frac{3}{2}) \tag{۹۷}$$

- مسئله: لاگرانژی میدان اسکالر مختلط تحت انتقال متقارن است. جریان های ناشی از این تقارن را بدست آورید. سپس تکانه میدان را مشخص‌کنید و آن را برحسب عملگرهای خلق و فنا بنویسید و نشان دهید‌که فرم زیر را پیدا می‌کند:

$$H = \sum_k k A_k^T A_k. \tag{۹۸}$$

به این ترتیب درست مثل میدان اسکالر حقیقی معلوم می شود‌که‌کوانتوم های این میدان نیز سه نوع ذره ی $1, 2$ و 3 هستند‌که همگی جرم m دارند . به حالت های تک ذره ای توجه می‌کنیم. این حالت ها عبارتند از:

$$a_1{}^\dagger(k)|\Omega\rangle, \qquad a_2{}^\dagger(k)|\Omega\rangle, \qquad a_3{}^\dagger(k)|\Omega\rangle, \tag{۹۹}$$

که در آن $|\Omega\rangle$ حالت خلاء است. این حالت ها همه حالت یک ذره هستند‌که داری تکانه k است اما این ذره در سه حالت مختلف داخلی می تواند قرار داشته باشد. برای درک تفاوت این حالت ها و این‌که چه مشاهده پذیری این حالت ها را از هم متمایز می‌کند می بایست به یک تقارن

مهم دیگر یعنی یک تقارن داخلی که میدان ها را به هم تبدیل می‌کند توجه کنیم. این تقارن، تقارن زیر است:

$$\Phi(x) \longrightarrow g\Phi(x), \qquad\qquad g \in SO(3) \tag{۱۰۰}$$

این تقارن پیوسته منجر به یک کمیت پایسته جدید می شود. برای پیدا کردن این کمیت پایسته تبدیلات بی نهایت کوچک $SO(3)$ را در نظر می گیریم:

$$\Phi \longrightarrow (I + \theta_a T_a)\Phi, \tag{۱۰۱}$$

که در آن θ_i $a = 1\ ,2\ ,3$ ها پارامترهای $g \in SO(3)$ هستند و T_i ها مولدهای این گروه هستند.

می دانیم که این مولدها ماتریس های پادمتقارن هستند. بنابراین :

$$T_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix}, \tag{۱۰۲}$$

یا به طور فشرده تر

$$(T_a)_{b,c} = \epsilon_{a,b,c}. \tag{۱۰۳}$$

بنابراین تبدیلات بی نهایت کوچک را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\phi_m \longrightarrow \phi_m + \theta_a(T_a\Phi)_m = \phi_m + \theta_a\epsilon_{a,m,n}\phi_n \tag{۱۰۴}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\phi_m \longrightarrow \phi_m + \delta\phi_m \tag{۱۰۵}$$

که در آن

$$\delta\phi_m = \theta_a\epsilon_{a,m,n}\phi_n. \tag{۱۰۶}$$

این رابطه با توجه به قضیه نوتر منجر به کمیت پایسته زیر می شود:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_m)}\delta\phi_m = \partial^\mu \phi_m \theta_a \epsilon_{a,m,n}\phi_n. \qquad (۱۰۷)$$

با توجه به دلخواه بودن پارامترهای θ_a نتیجه می گیریم که سه جریان پایسته به شکل زیر داریم:

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \qquad J_a^\mu := \epsilon_{a,m,n}\partial^\mu \phi_m \phi_n \qquad (۱۰۸)$$

و یا به صورت فشرده

$$\mathbf{J}^\mu := \partial^\mu \mathbf{\Phi} \times \mathbf{\Phi} \qquad (۱۰۹)$$

که در آن از نماد برداری برای میدان سه مولفه ای Φ استفاده کرده ایم. بنابراین سه نوع بار پایسته داریم که عبارتند از:

$$Q_m := \int dx\, J_m^0 = \int dx\, \epsilon_{m,i,j}\pi_i \phi_j \qquad (۱۱۰)$$

و یا به صورت فشرده

$$\mathbf{Q} := \int dx\, \mathbf{J}^0 = \int dx\, \Pi \times \Phi. \qquad (۱۱۱)$$

به بیان دیگر بارهای پایسته این ها هستند:

$$Q_1 := \int dx\,(\pi_2\phi_3 - \pi_3\phi_2), \quad Q_2 := \int dx\,(\pi_3\phi_1 - \pi_1\phi_3) \quad Q_3 := \int dx\,(\pi_1\phi_2 - \pi_2\phi_1). \qquad (۱۱۲)$$

■ مسئله: الف: روابط جابجایی این بارها را پیدا کنید.

ب: نشان دهید که این بارها با هامیلتونی جابجا می شوند.

پ: نشان دهید که این بارها با تکانه نیز جابجا می شوند.

بنابراین می توان ویژه حالت های مشترک انرژی، تکانه و یکی از این بارها که آن را Q_3 می گیریم پیدا کنیم.

■ مسئله: بارهای $Q_1,\ Q_2$ و Q_3 را بر حسب عملگرهای خلق و فنا بنویسید.

اگر تمرین قبلی را درست انجام داده باشید به این نتیجه رسیده اید که :

$$Q_1 = i\sum_k b_k^\dagger c_k - c_k^\dagger b_k, \qquad Q_2 = i\sum_k c_k^\dagger a_k - a_k^\dagger c_k, \qquad Q_3 = i\sum_k a_k^\dagger b_k - b_k^\dagger a_k, \qquad (۱۱۳)$$

که در آن برای سادگی از نمادهای (a,b,c) بجای (a_1,a_2,a_3) و نظایر آن استفاده کرده ایم. دقت کنید که عملگرهای بالا همگی هرمیتی هستند.

■ تمرین: با استفاده از نمایش این عملگرها برحسب عملگرهای خلق و فنا نشان دهید که :

$$[Q_i, Q_j] = \epsilon_{ijk} Q_k. \qquad (114)$$

برای سادگی سه عملگر زیر را در نظر می گیریم که در آن ها از جمع روی تکانه صرف نظر کرده ایم و فقط به خواص جبری عملگرهای نوسانگر توجه کرده ایم:

$$Q_1 = i(b^\dagger c - b\, c^\dagger), \qquad Q_2 = i(c^\dagger a - c\, a^\dagger), \qquad Q_3 = i(a^\dagger b - a\, b^\dagger). \qquad (115)$$

حال حالت های تک ذره ای زیر را در نظر می گیریم.

$$|1\rangle := a^\dagger|\Omega\rangle, \qquad |2\rangle := b^\dagger|\Omega\rangle, \qquad |1\rangle := c^\dagger|\Omega\rangle, \qquad (116)$$

که در آن $|\Omega\rangle$ حالت خلاء است و توسط همه عملگرهای فنا به صفر تبدیل می شود:

$$a|\Omega\rangle = b|\Omega\rangle = c|\Omega\rangle = 0. \qquad (117)$$

برای سادگی از تکانه ی k صرف نظر کرده ایم. بدست می آوریم که:

$$Q_3|1\rangle = -i|2\rangle, \qquad Q_3|2\rangle := i|1\rangle, \qquad Q_3|3\rangle = 0. \qquad (118)$$

به همین ترتیب اگر عمل Q_2 و Q_3 را روی این حالت ها را بدست بیاوریم متوجه می شویم که در این پایه هیچ کدام از این عملگرها قطری نیستند. معنای این حرف این است که هیچ کدام از این حالت ها ویژه مقدار یا همان بار پایسته مشخصی ندارند. اما می توانیم حالت های جدیدی تشکیل دهیم که در آن یکی از عملگرها قطری باشد. این امر می بایست همواره امکان پذیر باشد.

از ترکیب حالت های $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ حالت های جدیدی به ترتیب زیر می سازیم:

$$|1\rangle\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle), \qquad |0\rangle\rangle := |3\rangle, \qquad |-1\rangle\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle). \qquad (119)$$

براحتی معلوم می شود که

$$Q_3|1\rangle\rangle = |1\rangle, \qquad Q_3|0\rangle\rangle = 0, \qquad Q_3|-1\rangle\rangle = -|-1\rangle\rangle. \qquad (120)$$

به این ترتیب حالت های جدید حالت هایی هستند که یک بار مشخص برای عملگر Q_3 دارند. دقت کنید که با توجه به این که عملگرهای $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ همه باهم جابجا نمی شوند، تنها می توانیم یکی از این عملگرها را قطری کنیم. بنابراین حالت های جدیدی که می سازیم تنها بار مشخصی برای Q_3 دارند و دو عملگر دیگر این بارها را تغییر می دهند.

- تمرین: از ترکیب عملگرهای Q_1 و Q_2 عملگرهای جدیدی بسازید که بار حالت ها را به اندازه یک واحدکم یا زیادکند.

با توجه به این رابطه آخر می توانیم از عملگرهای خلق کننده قدیمی عملگرهای خلق کننده جدیدی به ترتیب زیر بسازیم:

$$a_1^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger - i\, b^\dagger), \qquad a_0^\dagger := c^\dagger, \qquad a_{-1}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + i\, b^\dagger). \tag{۱۲۱}$$

از آنجاکه عملگرهای $a_k^\dagger,\ b_k^\dagger,\ c_k^\dagger$ همه حالت هایی خلق می کنندکه تکانه k و انرژی ϵ_k دارند، عملگرهای $a^\dagger{}_{1,k},\ a^\dagger{}_{0,k},\ a^\dagger -1, k_k$ حالت هایی می سازندکه همان تکانه و همان انرژی را دارند ولی بارهای مشخص $1,\ 0,\ -1$ دارند.

۸ میدان الکترومغناطیس

تاکنون دیده ایم که چگونه خواص کوانتوم های میدان توسط خواص میدان و لاگرانژی آن تعیین می شود. به عنوان یک مثال دیگر میدان الکترومغناطیسی را در نظر می گیریم. مطالعه ما در این مورد یک مطالعه مقدماتی خواهد بود و در آن کمی ساده سازی وجود دارد، بدون اینکه دقت راکنارگذاشته باشیم. این میدان یک چهاربردار است که آن را با A_μ نشان می دهیم. مولفه صفرم این میدان همان پتانسیل اسکالر و سه مولفه دیگر آن پتانسیل برداری هستند. بنابراین داریم:

$$A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A}), \qquad\qquad A_\mu \equiv (\phi, -\mathbf{A}). \tag{۱۲۲}$$

لاگرانژی این میدان در خلاء، در غیاب ماده، به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu,\nu} F^{\mu,\nu}, \tag{۱۲۳}$$

که در آن

$$F_{\mu,\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{۱۲۴}$$

در حضور ماده این لاگرانژی به صورت زیر تعمیم می یابد:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu,\nu} F^{\mu,\nu} + J^\mu A_\mu. \tag{۱۲۵}$$

■ تمرین: الف: مولفه های تانسور $F_{\mu,\nu}$ را برحسب میدان های الکتریکی و مغناطیس بنویسید.

ب: معادلات اویلر- لاگرانژ را برای لاگرانژی $\mathcal{L}$ بنویسید و نشان دهید که این معادلات به معادلات ماکسول منجر می شوند. دقت کنید که دو تا از معادلات ماکسول ناشی از اتحادهای حاکم بر تانسور $F_{\mu,\nu}$ هستند و ربطی به لاگرانژی ندارند.

پ: لاگرانژی را بر حسب میدان های الکتریکی و مغناطیسی بنویسید.

نکته ای که در مورد این میدان وجود دارد و در واقع منشاء پیچیدگی های آن موقع کوانتش آن هستند وجود یک تقارن موسوم به تقارن پیمانه ای است. در واقع می دانیم که اگر میدان A_μ را به شکل زیر تبدیل کنیم:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{۱۲۶}$$

که در آن χ یک میدان اسکالر دلخواه است، آنگاه $F_{\mu,\nu}$ و در نتیجه $\mathcal{L}$ تغییر نمی‌کند. تقارن پیمانه ای هم منشاء بسیاری از خواص عمیق و زیبای الکترومغناطیس است و هم وقتی که نوبت به کوانتش می رسد منشاء مشکلات آن است. برای دیدن این مشکلات تکانه های مزدوج را پیدا می کنیم. تکانه ی مزدوج با A_μ را با π^μ نشان می دهیم. بنابر تعریف داریم:

$$\pi^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}. \tag{۱۲۷}$$

اما می دانیم که لاگرانژی شامل جمله ای مثل $\partial_0 A_0$ نیست و در نتیجه π^0 برابر با صفر است. اما این به این معناست که رابطه کروشه پوآسون $\{\pi^0(x), A_0(y)\} = \delta(x-y)$ هرگز نمی تواند برقرار شود چرا که $\pi^0(x)$ همواره متحد با صفر است. این مشکل در واقع ناشی از این است که همه درجات آزادی A_μ یعنی همه مولفه های میدانِ A مولفه های فیزیکی و واقعی نیستند چرا که با تبدیل پیمانه ای تغییر می کنند بدون اینکه

هیچ‌کدام از میدان های فیزیکی الکتریکی و مغناطیس تغییر کنند. می توان با اعمال قیدهایی این آزادی پیمانه [۴] را از بین برد و به اصطلاح پیمانه را مقید یا تعیین‌کرد [۵]. پیمانه های مختلف هرکدام مزیت های مخصوص به خود دارند و در موقعیت های مختلف به‌کار می روند. یکی از این پیمانه ها با شرط زیر تعیین می شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{۱۲۸}$$

یعنی با تبدیل پیمانه ای مناسب‌کاری می‌کنیم‌که این شرط برقرار شود. این‌کار به این معناست‌که میدان $\chi(\mathbf{x}, t)$ را چنان تعیین می‌کنیم‌که داشته باشیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi = 0 \tag{۱۲۹}$$

و یا

$$\nabla^2 \chi(x, t) = -\nabla \cdot \mathbf{A}. \tag{۱۳۰}$$

همواره می توان در صورت لزوم چنین تابع χ ای را پیداکرد. ولی معمولا الزامی به پیداکردن فرم صریح چنین تابعی نیست و فقط این نکته مهم است‌که همواره می توان چنین تابعی را یافت و پیمانه را چنان انتخاب‌کرد‌که شرط $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ برقرار باشد. این پیمانه را پیمانه‌کولومب [۶] می نامند.بدیهی است‌که این پیمانه تنها پیمانه ممکن نیست و چندین پیمانه دیگر نیز معمولا بسته به شرایط استفاده می شوند. [۷]

■ تمرین: الف: معادلات لاگرانژ و اویلر را برحسب میدان پیمانه ای $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ بنویسید. در پیمانه ی کولومب این معادلات به چه شکلی در می آیند.

ب: هرگاه با میدان الکترومغناطیسی در خلاء سر و کار داشته باشیم، با استفاده از این معادلات نشان دهید‌که می توان ϕ را نیز مساوی صفرگرفت. به عبارت دیگر $\phi(x, t) \equiv 0$ یک حل معادلات حرکت است.

با توجه به این تمرین می توان از همان ابتدا ϕ را مساوی صفرگرفت و در واقع آن را درجات آزادی حذف‌کرد. تحت این شرایط دیگر π^0 نیز وجود نخواهد داشت. بنابراین لاگرانژی تنها شامل میدان برداری $\mathbf{A}$ خواهد بود. در پیمانه‌کولومب شرطِ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ نیز بر این معادلات

[۴] Gauge Freedom

[۵] Gauge Fixing

[۶] Coulomb Gauge

[۷] مثلا در پیمانه لورنتز شرط $\partial_\mu A^\mu = 0$ برقرار است.

حاکم است. تا این جای بحث ما کامل بوده است. اما از این جا به بعد به دلایل سادگی بحث خود را کوتاه می‌کنیم . خواننده می تواند برای بحث کامل تر در باره کوانتش میدان الکترومغناطیس به یک کتاب نظریه میدان مراجعه کند. به طور معمول انتظار داریم که چون میدان $\mathbf{A}$ یک میدان برداری سه مولفه ای

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{۱۳۱}$$

است، کوانتوم های ان نیز علاوه بر تکانه یک مولفه دیگر نیز داشته باشند. به عبارت دیگر انتظار داریم که عملگرهای خلق و فنای کوانتوم ها به صورت زیر باشند:

$$\hat{a}_{x,k}, \qquad \hat{a}^\dagger_{x,k}, \qquad \hat{a}_{y,k}, \qquad \hat{a}^\dagger_{y,k}, \qquad \hat{a}_{z,k}, \qquad \hat{a}^\dagger_{z,k}. \tag{۱۳۲}$$

یعنی $\hat{a}^\dagger_{x,k}$ کوانتومی را خلق می‌کند که دارای تکانه ی k است و دارای مولفه در راستای x است. اما اما به دلیل شرط پیمانه ای $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ یک قید روی این مولفه ها وجود دارد و آن اینکه این کوانتوم ها می بایست جهت میدان شان عمود بر تکانه باشد، شکل (۲) . بنابراین فقط دو مولفه عمود بر صفحه برای میدان مجاز است. به این ترتیب تنها دو نوع عملگر خلق و فنا داریم که آن ها را به ترتیب زیر نشان می دهیم:

$$\hat{a}_{1,k}, \qquad \hat{a}^\dagger_{1,k}, \qquad \hat{a}_{2,k}, \qquad \hat{a}^\dagger_{2,k}. \tag{۱۳۳}$$

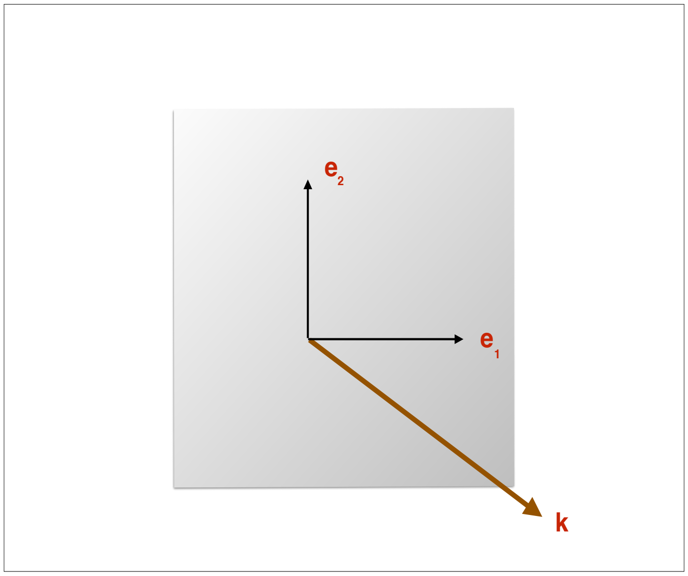
عملگر $\hat{a}^\dagger_{i,k}$ کوانتوم یا فوتونی را خلق می‌کند که در راستای k حرکت می‌کند و جهت قطبش اش در راستای بردار e_i نشان داده شده در شکل (۲) است. حالت $|1,k\rangle := a^\dagger_{1,k}|0\rangle$ فوتونی را نشان می دهد که قطبش اش در راستای بردار e_1 است. حالت $|2,k\rangle := a^\dagger_{2,k}|0\rangle$ فوتونی را نشان می دهد که قطبش اش در راستای بردار e_2 است.

حال از خود سوال می‌کنیم که فوتونی که قطبش اش در راستای دلخواهی مثل $\mathbf{n} = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ است با چه عملگری خلق می شود؟ پاسخ این است که حالت این فوتون برابر است با:

$$|\mathbf{n},\mathbf{k}\rangle = \cos\theta|1,k\rangle + \sin\theta|2,k\rangle \tag{۱۳۴}$$

و توسط عملگر $\cos\theta a^\dagger_{1,k} + \sin\theta a^\dagger_{2,k}$ تولید می شود. فوتونی که قطبش اش عمود بر این است در حالتِ

$$|\mathbf{n}^\perp,\mathbf{k}\rangle = -\sin\theta|1,k\rangle + \cos\theta|2,k\rangle \tag{۱۳۵}$$



شکل ۲: جهت انتشار فوتون و دو جهت قطبش فوتون ها که هر دو بر جهت انتشار عمودند. حالت فوتون در هر قطبش دیگری ترکیبی خطی از این دو حالت است.

قرار دارد و با عملگر $-\sin\theta a^\dagger_{1,k}+\cos\theta a^\dagger_{2,k}$ تولید می شود. این مثال نشان می دهد که داشتن تنها دو نوع عملگر خلق و فنا کافی است که همه قطبش های ممکن را بتوان تولید کرد.

■ تمرین: فوتونی که تکانه اش در راستای k است و دارای قطبش چپ‌گرد یا راست‌گرد است با چه نوع عملگری خلق می شود. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۹ تعمیم به بعد دلخواه و حجم بی نهایت

تاکنون تقریبا همه روابطی که نوشته ایم مربوط به میدانهایی بوده اند که در یک بعد تعریف شده اند. براحتی می توان این روابط را به ابعاد دلخواه تعمیم داد. این تعمیم با انجام تغییرات ساده زیر در همه روابط قبلی صورت می گیرد:

$$x \longrightarrow \mathbf{x}, \qquad k \longrightarrow \mathbf{k} \qquad \int dx \longrightarrow \int d^D\mathbf{x}, \qquad \frac{1}{\sqrt{L}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{L^D}}, \qquad kx \longrightarrow \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}. \qquad (۱۳۶)$$

هم چنین تاکنون همه روابطی که نوشته ایم مربوط به میدان هایی بوده اند که در یک فاصله محدود $[0, L]$ تعریف شده اند. برای آنکه این روابط را به یک ناحیه نامحدودِ $(-\infty, \infty)$ ولی در یک بعد تعمیم دهیم می بایست تغییرات زیر را در همه روابط قبلی اعمال کنیم:

$$\phi_k \longrightarrow \phi(k), \qquad \pi_k \longrightarrow \pi(k), \qquad a_k \longrightarrow a(k), \qquad a_k^\dagger \longrightarrow a^\dagger(k), \qquad \delta_{k,k'} \longrightarrow \delta(k-k'), \qquad (۱۳۷)$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk \qquad (۱۳۸)$$

ترکیب این دو نوع تغییرات روابط صحیح را برای یک محدوده بی نهایت در بعد دلخواه به دست خواهد داد.

۱۰ کوانتش میدان در تصویر هایزنبرگ

در مکانیک کوانتومی گاهی اوقات از تصویر شرودینگر و گاهی نیز از تصویر هایزنبرگ استفاده می کنیم. البته این دوگانگی مختص وقتی است که می خواهیم دینامیک یک ذره را یک مجموعه از ذرات را مطالعه کنیم وگرنه اصول مکانیک کوانتومی (معنای حالت، اندازه گیری و نظایرآن) ثابت هستند و به تصویرهای مختلف بستگی ندارند. بنابراین تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ تنها دو وجه فنی متفاوت برای مطالعه دینامیک یک سیستم هستند. می دانیم که در تصویر شرودینگر روابط بین میدان ها به شکل زیر است:

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')] = 0, \qquad [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = 0 \qquad [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \qquad (۱۳۹)$$

که در آنها همه متغیرهای نشان دهنده مکان هستند. هم چنین می دانیم که رابطه بین عملگرها در تصویر هایزنبرگ و شرودینگر به شکل زیر است:

$$\phi_H(\mathbf{x}, t) = U(t)\phi(\mathbf{x})U^\dagger(t), \qquad \pi_H(\mathbf{x}, t) = U(t)\pi(\mathbf{x})U^\dagger(t). \qquad (۱۴۰)$$

دقت می‌کنیم که به دلیل این تعریف، میدان های هایزنبرگ بستگی زمانی پیدا می‌کنند.

حال به دلیل وجود عملگر $U(t)$ در تعریفِ این میدان ها براحتی معلوم می شود که همه روابط جابجایی همزمان درست مثل روابط میدان ها در تصویر شرودینگر است:

$$[\phi_H(\mathbf{x},t),\phi_H(\mathbf{x}',\mathbf{t})]=0,\qquad [\pi_H(\mathbf{x},t),\pi_H(\mathbf{x}',\mathbf{t})]=0\qquad [\phi_H(\mathbf{x},t),\pi_H(\mathbf{x}',t)]=i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\qquad (۱۴۱)$$

اما روابط جابجایی برای زمان های متفاوت با روابط مربوط به میدان ها در تصویر شرودینگر کاملا فرق دارد و در واقع شکل دقیق آنها را نمی توان تعیین کرد مگر اینکه نوع هامیلتونی و در واقع عملگر تحول $U(t)$ را بدانیم. این دانش را تنها برای میدان های آزاد در اختیار داریم. در واقع اگر میدان های آزاد را در نظر بگیریم می توانیم شکل صریح میدان ها را در تصویر هایزنبرگ بدست آوریم و سپس رابطه جابجایی آنها را برای زمان های متفاوت نیز حساب کنیم. از این به بعد می توانیم نماد خلاصه $\phi(x)$ را به جای نماد $\phi_H(\mathbf{x},t)$ به‌کار ببریم. همین‌که بجای بردار مکانی $\mathbf{x}$ چهار– بردار فضازمانی x به‌کار رفته است نشان دهنده این است‌که این میدان به زمان بستگی دارد و در تصویر هایزنبرگ نوشته شده است، بنابراین نیازی به نوشتن اندیسِ H نیست. یکی از دلایلی‌که در بعضی از حوزه ها به خصوص در فیزیک انرژی های بالا از تصویر هایزنبرگ استفاده می شود این است‌که می خواهیم ناوردایی و تقارن نسبیتی را همواره به صورت آشکار در نظریه حفظ کنیم. در تصویر شرودینگر به دلیل اینکه زمان به وضوح از مکان جدا شده این امر امکان پذیر نیست یا فوق العاده دشوار است اما در تصویر هایزنبرگ وقتی‌که با میدان های $\phi(x)$ و $\pi(x)$ سر وکار داریم‌که بر حسب چهاربردار x نوشته شده اند، این‌کار امکان پذیر است.