میدان کلاین گوردون

وحید کریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۲۸ آبان ۱۳۹۶

۱ مقدمه

همانطور که در درس های پیشین گفتیم یکی از دلایل پیدایش نظریه میدان کوانتومی لزوم هماهنگ سازی نسبیت خاص و مکانیک کوانتومی بود. برای آنکه نظریه میدان کوانتومی را از این منظر بفهمیم می بایست نخست با مکانیک کوانتومی نسبیتی آشنا شویم. خواننده می بایست با تبدیلات لورنتز و نمایش های گروه لورنتز از قبل آشنایی داشته باشد. در اینجا تنها به یادآوری تعاریف و نکات اصلی بسنده می کنیم.

معادله شرودینگر به آن صورتی که می شناسیم بوضوح تحت تبدیلات نسبیتی شکل خود را حفظ نمی کند زیرا مشتق زمانی در آن با درجه اول و مشتقات مکانی با درجه دوم ظاهر شده اند و همین کافی است که ما را قانع کند تحت تبدیلات لورنتز که زمان و مکان (منهای یک علامت) به یک صورت ظاهر می شوند این معادله ناوردا نیست. البته طبیعی هم هست چرا که این معادله از کوانتش معادله نیوتنی انرژی یعنی رابطه

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{۱}$$

و با جایگزینی های زیر پدید آمده است:

$$E \equiv P^0 \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad\qquad P^i \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial x_i} = -i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۲}$$

بنابراین به نظر می رسد که طبیعی ترین راه برای رسیدن به یک معادله موج نسبتی این است که همان جایگزینی ها را در معادله نسبیتیِ

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{۳}$$

انجام دهیم. با این کار به معادله زیر خواهیم رسید:

$$-{\partial_t}^2\phi = (-\nabla^2 + m^2)\phi \tag{۴}$$

و یا

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0. \qquad (۵)$$

این معادله که آن را معادله کلاین گوردون [۱] می نامیم، با استفاده از نمادهای نسبیتی به شکل زیر در می آید:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0. \qquad (۶)$$

در واقع می توانستیم از همان ابتدا با جایگذاری شرط کوانتش زیر که به صورت هموارده نوشته شده است

$$P_\mu \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad P^\mu \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad (۷)$$

در رابطه هموردای نسبیتی $P_\mu P^\mu = m^2$ به یک مرتبه معادله کلاین گوردون را به دست آوریم.

- معادله فوق در دستگاه واحدهایی نوشته شده است که در آن $\hbar = c = 1$. این معادله را در دستگاه واحدهایی متریک بنویسید.

هرگاه تابع موج ϕ را یک کمیت اسکالر بگیریم، یعنی تحت تبدیلات لورنتز

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \qquad (۸)$$

$$\phi'(x') = \phi(x), \qquad (۹)$$

آنگاه با توجه به اینکه $\partial_\mu \partial^\mu = \partial'_\mu \partial'^\mu$ بوضوح معلوم می شود که این معادله ناوردای نسبیتی است. دقت کنید که این معادله برای ذره آزاد نوشته شده است. هرگاه که در چنین معادله ای پتانسیلی مثل $V(\mathbf{x})$ وارد کنید ، به معنای آن است که در یک دستگاه لخت مشخص معادله کلاین گوردون را نوشته اید.

- تمرین: در این تمرین می خواهیم بفهمیم که چگونه حد غیرنسبیتی معادله کلاین گورودون به معادله شرودینگر منجر می شود. در معادله (۵) قرار می دهیم:

$$\phi(x,t) = \tilde{\phi}(x,t)e^{-imt} \qquad (۱۰)$$

[۱] Klein-Gordon

این جداسازی به این معناست که در تحول زمانی تابع موج آن قسمتی را که مربوط به انرژی در حال سکون است جدا کرده ایم. تغییرات زمانی تابع موج $\tilde{\phi}$ نسبت به m خیلی کوچک است. به عبارت دیگر:

$$\frac{1}{\tilde{\phi}}\frac{d\tilde{\phi}}{dt} << m. \tag{۱۱}$$

الف: معادله حاکم بر $\tilde{\phi}(x,t)$ را بدست آورید و نشان دهید که این تابع موج در معادله شرودینگر صدق می کند.

ب: کارهای بالا را در دستگاه واحدهای متریک انجام دهید تا معنای تقریب های اعمال شده را بهتر متوجه شوید.

حال می خواهیم توابع موج ذره آزاد را پیدا کنیم. از آنجا که معادله کلاین گوردون خطی است قرار می دهیم:

$$\phi(\mathbf{x},t) = Ae^{i(Et-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{۱۲}$$

قرار دادن این تابع در معادله کلاین گوردون نشان می دهد که هر موج تخت از نوع فوق در معادله کلاین گوردون صدق می کند مشروط بر آنکه رابطه زیر برقرار باشد

$$E = \pm\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}. \tag{۱۳}$$

به عبارت دیگر انرژی (یا فرکانس) این امواج و تکانه (یا بردار موج) آنها می بایست همان رابطه ای را با هم داشته باشند که ذره نسبیتی دارد. از این به بعد عبارت مثبت $\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}$ را با $\mathcal{E}$ نشان می دهیم:

$$\mathcal{E} := \sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}. \tag{۱۴}$$

به این ترتیب برای هر تکانه $\mathbf{k}$ دو جواب با انرژی مثبت و منفی وجود دارد که آنها را به ترتیب زیر نشان می دهیم:

$$\phi_+ = Ae^{-i\mathcal{E}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad \phi_- = Ae^{i\mathcal{E}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{۱۵}$$

این دو تابع موج نشان دهنده دو ذره هستند که هر دو با تکانه ی $\mathbf{k}$ حرکت می کنند ولی یک انرژی $\mathcal{E}$ دارد و دیگری انرژی $-\mathcal{E}$. شکل (۱) نیز طیف انرژی ذرات را نشان می دهد که از بالا و پایین نامحدود است. در نگاه اول کراندار نبودن انرژی از پایین قابل پذیرش نیست چرا که نشان می دهد ذره در هیچ کدام از حالت انرژی است پایدار نیست و با گسیل انرژی می تواند به سطوح پایین و پایین تر سقوط کند و این سقوط را تا بی

نهایت ادامه دهد. در چارچوب مکانیک کوانتومی این اشکال از نظر مفهومی یک اشکال عمیق است که پذیرش معادله کلاین گوردون را به عنوان یک معادله نسبیتی غیرممکن می کند. اما فعلا چشم خود را بر این اشکال عمده می بندیم و خود معادله را بیشتر مطالعه می کنیم. نخستین سوال این است که چگونه توابع موج را می بایست بهنجار کرد؟ آیا بازهم عبارت $\phi^*\phi$ نشان دهنده چگالی احتمال ذره در یک نقطه است؟ برای پاسخ به این سوال می بایست ببینیم که تابع موج کلاین گوردون در چه معادله پایستگی ای صدق می کند. برای این کار مزدوج معادله (۵) را نوشته و دو معادله را از هم کم می کنیم تا به رابطه زیر برسیم:

$$\phi^*(\partial_\mu\partial^\mu)\phi - \phi(\partial_\mu\partial^\mu)\phi^* = 0. \tag{۱۶}$$

این معادله را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\partial_\mu(J^\mu) = 0 \tag{۱۷}$$

که در آن

$$J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*). \tag{۱۸}$$

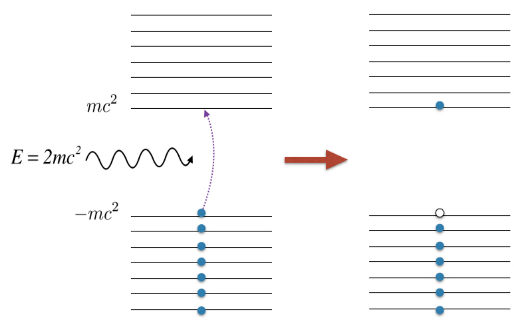
بنابراین J^μ یا هر ضریبی از آن یک جریان پایسته است. عدد مختلط i به این دلیل قرار داده شده است که جریان یک عبارت حقیقی باشد. چگالی احتمال ناشی از این جریان همان مولفه صفرم است که برابر است با:

$$\rho = \phi^*\partial^0\phi - \phi\partial^0\phi^*. \tag{۱۹}$$

این چگالی جریان را برای حالت های با انرژی مثبت و منفی حساب می کنیم. به ترتیب بدست می آوریم:

$$\rho(\phi^+) = 2\mathcal{E} \qquad\qquad \rho(\phi^-) = -2\mathcal{E}. \tag{۲۰}$$

به این ترتیب به دشواری بازهم مهم تری می رسیم و آن چگالی احتمال منفی برای توابع موج با انرژی منفی است و طبیعی است که احتمال منفی از نظر فیزیکی قابل پذیرش نیست.



شکل ۱ : طیف انرژی یک ذره آزاد که از معادله کلاین گوردون بدست می آید. این طیف از پایین کراندار نیست و در نتیجه هیچ کدام از حالت های انرژی ذره پایدار نیستند. از طرفی نمی توان حالت های با انرژی منفی را به عنوان جواب های غیرفیزیکی دور ریخت زیرا طیف را ناقص می کند.

۲ برطرف کردن اشکالات: میدان کوانتومی کلاین گوردون

معادله کلاین گوردون با تعبیر فعلی یعنی به عنوان معادله موج یک ذره نسبیتی بوضوح دارای دو اشکال عمده است. این معادله را نمی توان به عنوان معادله موج یک ذره در نظر گرفت. یکی از مهمترین گام ها در تدوین نظریه کوانتومی از همین جا برداشته شده به این معنا که به ذره کلاین گوردون به عنوان کوانتوم یک میدان نگاه کنیم . در واقع به همان معنا که فوتون کوانتوم میدان الکترومغناطیسی است این ذره را نیز به عنوان کوانتوم یک میدان کوانتومی نگاه کنیم. به لحاظ فیزیکی فوتون یک تحریک موضعی از میدان الکترومغناطیسی است به همین معنا می توانیم به ذره کلاین گوردون نیز به عنوان تحریک موضعی یک میدان کوانتومی نگاه کنیم که در همان معادله کلاین گوردون صدق می کند. به عبارت دیگر از این به بعد به $\phi(x,t)$ نه به عنوان تابع موج یک ذره بلکه به عنوان یک میدان کلاسیک نگاه می کنیم که اگر کوانتومی اش کنیم کوانتوم های آن ذراتی نسبیتی هستند که تکانه و انرژی شان در رابطه $E^2 = m^2 + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$ صدق می کند و می توانیم امیدوار باشیم که مشکلاتی نظیر انرژی منفی و احتمال منفی نیز در این رهیافت جدید برطرف شوند. چنانچه خواهیم دید در این رهیافت جدید این مشکلات در واقع ناپدید می شون و همه چیز در یک چارچوب منظم و خالی از اشکال به هم پیوند می خورد و همه چیز در جای خود قرار می گیرد. این امر ریشه تاریخی اصطلاح «کوانتش دوم» را نیز نشان می دهد. به این معنا که تابع موج حاصل از مکانیک کوانتومی ذره یعنی $\phi(\mathbf{x},t)$ نخست به عنوان یک میدان کلاسیک در نظر گرفته شده و سپس کوانتومی شده و به صورت $\hat{\phi}(\mathbf{x},t)$ در آمده که یک میدان کوانتومی است. البته باید توجه داشت که «کوانتش دوم» فقط یک اصطلاح است و انچه که واقعا اتفاق می افتد فقط کوانتش یک میدان کلاسیک است که در معادله $(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0$ صدق می کند. برای این که این راه به طور کامل طی کنیم می بایست مثل همه میدانهایی که دیده ایم نخست لاگرانژی میدان را بدست آوریم و سپس میدانی را که تکانه مزدوج میدان ϕ است بدست آوریم و سپس قواعد کوانتش را بکار ببریم. این کاری است که در درس های گذشته انجام داده ایم یعنی میدان های کوانتومی را در تصویر شرودینگر مطالعه کرده ایم. البته این روش را می توان تا به انتها ادامه داد اما هم از نظر مفهومی و هم از نظر فنی بهتر است که کوانتش را در تصویر هایزنبرگ انجام دهیم. نخستین دلیل این است که در نظریه میدان کوانتومی تصویر شرودینگر از آنجا که به وضوح زمان را به صورت متمایزی از مکان در نظر می گیرد، ناوردایی آشکارِ نسبیتی را لااقل در خیلی از مراحل کوانتش پنهان می کند. دلیل دیگر و شاید مهم تر هم این است که تابع موج میدان در تصویر شرودینگر چندان خوش تعریف نیست. حتی اگر میدان را گسسته کنیم بازهم بردارهای حالت کلی در تصویر شرودینگر و دینامیک آنها پیچیده هستند و ما نیازی به دانستن آنها نداریم. بنابراین اگر علاقمند به حفظ ناوردایی آشکار نسبیتی [۲] هستیم بهتر است بجای تصویر شرودینگر از تصویر هایزنبرگ استفاده کنیم. در این تصویر به جای دینامیک بردارهای حالت می توانیم توجه خود را بر دینامیک عملگرهای میدان متمرکز کنیم. در تصویر هایزنبرگ می دانیم که همه متغیرهای دینامیکی که اکنون تبدیل به عملگر شده اند در همان معادلات کلاسیکی حرکت صدق می کنند. در این جا متغیرهای دینامیکی کلاسیک همان میدان کلاسیک $\phi(x)$ است که تبدیل به میدان کوانتومی

[۲] Manifest Invariance

$\hat{\phi}(x)$ شده است. میدان کلاسیک $\phi(x)$ در معادله کلاین گوردون صدق می کند پس میدان کوانتومی کلاین گوردون هم در همان معادله صدق می کند.

لاگرانژی میدان کلاین گوردون حقیقی به شکل زیراست:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2\phi^2) \tag{۲۱}$$

که از آن می توان میدان مزدوج $\phi(\mathbf{x})$ و هم چنین هامیلتونی را بدست آورد:

$$\pi(\mathbf{x}) = \dot{\phi}(\mathbf{x}) \tag{۲۲}$$

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \pi^2(\mathbf{x}) + (\nabla\phi(\mathbf{x}))^2 + m^2\phi^2(\mathbf{x}) \tag{۲۳}$$

در تصویر هایزنبرگ می دانیم که عملگرمیدان $\hat{\phi}(x)$ درمعادله زیر صدق می کند:

$$(\Box + m^2)\hat{\phi}(x) = 0 \tag{۲۴}$$

که دراینجا x نشان دهنده چهاربردار فضا و زمان است . هم چنین از روابط جابجایی کانونیک یعنی

$$\begin{aligned}
&[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{y})] = 0 \\
&[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = 0 \\
&[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

از آنجا که عملگرهای هایزنبرگ یعنی $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ و $\hat{\pi}(\mathbf{y}, t)$ به صورت زیر با عملگرهای شرودینگر مرتبط هستند:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = U(t)\hat{\phi}(\mathbf{x})U^\dagger(t) \quad , \quad \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = U(t)\hat{\pi}(\mathbf{x})U^\dagger(t) \tag{۲۶}$$

روابط جابجایی همزمان درمورد عملگرها و تکانه های آنها به شکل زیر است :

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x},t),\hat{\phi}(\mathbf{y},t)]=0$$
$$[\hat{\pi}(\mathbf{x},t),\hat{\pi}(\mathbf{y},t)]=0$$
$$[\hat{\phi}(\mathbf{x},t),\hat{\pi}(\mathbf{y},t)]=i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{۲۷}$$

روابط (47) و (27) روابط اساسی برای کوانتش درتصویر هایزنبرگ هستند. زیرا این دو رابطه به ما این اجازه را می دهندکه روابط جابجایی همه عملگرهای مورد نیاز را در همه نقاط و حتی در زمان های متفاوت بدست آوریم.

نخستین قدم حل معادله حرکت (24) است که منجر به رابطه زیر می شود که درآن $kx := \omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ و $\omega_k := \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$.

$$\hat{\phi}(x)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}(a(\mathbf{k})e^{-ikx}+a(\mathbf{k})^{\dagger}e^{ikx}) \tag{۲۸}$$

دراین جا از حقیقی بودن میدان کلاین گوردون اولیه و یا هرمیتی بودن میدان کوانتومی شده استفاده کرده ایم. دقت کنید که در اینجا تمامی بستگی زمانی در عبارت های $e^{\pm ikx}$ قرار دارد و عملگرهای $a(\mathbf{k})$ و $a^{\dagger}(\mathbf{k})$ مستقل از زمان اند. باید دقت کنیم که رابطه فوق به صورت کاملا ناوردا نوشته شده است زیرا با استفاده از خواص تابع دلتایعنی این که

$$\delta(k^2-m^2)=\delta(k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}{}^2)=\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}(\delta(k_0-\omega_{\mathbf{k}})+\delta(k_0+\omega_{\mathbf{k}})) \tag{۲۹}$$

می توان نشان داد که

$$\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}2\pi\delta^4(k^2-m^2)\theta(k^0) \tag{۳۰}$$

با توجه به رابطه $\hat{\pi}(x,t)=\partial_t\hat{\phi}(x,t)$ خواهیم داشت:

$$\hat{\pi}(x)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}(-i\omega_{\mathbf{k}}a(\mathbf{k})e^{-ikx}+i\omega_k a(\mathbf{k})^{\dagger}e^{ikx}) \tag{۳۱}$$

با تلفیق رابطه های (28) و (31) بدست خواهیم آورد:

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{k}) &= \int d^3\mathbf{x} e^{ikx}(\omega_{\mathbf{k}}\phi + i\pi) \\
a^\dagger(\mathbf{k}) &= \int d^3\mathbf{x} e^{-ikx}(\omega_{\mathbf{k}}\phi - i\pi)
\end{aligned}
\tag{۳۲}
$$

و ازآنجا

$$
[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')
\tag{۳۳}
$$

که نشان می دهد عملگر های $a(\mathbf{k})$ و $a^\dagger(\mathbf{k})$ منهای یک ضریب بهنجارش نقش عملگرهای خلق و فنای ذرات را درتکانه های مشخص ایفا می کنند. فضای هیلبرت یا همان فضای فوک توسط عملگرهای نابودکننده از بین می رود و همه حالت های فضای فوک توسط عملگرهای خلق کننده بوجود می آیند. برای اینکه معنا و تعبیر این عملگرهای خلق و فنا را بیابیم هامیلتونی را بر حسب آنها می نویسیم.

■ تمرین: نشان دهیدکه هامیلتونی به شکل زیر است:

$$
\hat{H} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\omega_{\mathbf{k}}(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}))
\tag{۳۴}
$$

هرگاه انرژی حالت خلاء را حساب کنیم مقدار بی نهایت بدست می آوریم که یکی از اولین و راحت ترین نمونه های بی نهایتی است که درنظریه میدان به آن برمی خوریم. این بی نهایت را می توان با بازتعریف هامیلتونی و جابجایی نقطه صفر آن از بین برد زیرا نقطه مقایسه انرژی ها اهمیت ندارد. بنابراین هامیلتونی را به شکل زیر بازتعریف می‌کنیم. هامیلتونی بازتعریف شده را هامیلتونی بهنجار [۳] می نامیم و آن را بانماد $:H:$ نشان می دهیم:

$$
:H: = H - \langle 0|H|0\rangle
\tag{۳۵}
$$

برای این‌که اثر این بهنجارکردن را بفهمیم یک هامیلتونی ساده به شکل $H = \frac{1}{2}\omega(a^\dagger a + aa^\dagger)$ درنظرمی گیریم : دراین صورت خواهیم داشت :

$$
:H: \;=\; \frac{1}{2}\omega(a^\dagger a + aa^\dagger) - \frac{1}{2}\omega\langle|a^\dagger a + aa^\dagger|\rangle
$$

[۳] normal ordered

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\omega(a^\dagger a + aa^\dagger) - \frac{1}{2}\omega \\
&= \frac{1}{2}\omega(a^\dagger a + aa^\dagger) - \frac{1}{2}\omega(aa^\dagger - a^\dagger a) \\
&= \omega a^\dagger a
\end{aligned} \tag{۳۶}
$$

بنابراین هامیلتونی بهنجارشده برای میدان کلاین گوردون به شکل زیر درمی آید:

$$
: H ::= H - \langle 0|H|0\rangle I = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \tag{۳۷}
$$

درتساوی دوم رابطه فوق از رابطه جابجایی عملگرهای خلق و فنا استفاده شده است. بدیهی است که این عملگر انرژی یک عملگر مثبت است یعنی تمامی ویژه مقادیرش نامنفی هستند و همه حالت های یک یا چند ذره ای دارای انرژی مثبت هستند و هیچ گونه حالت با انرژی منفی وجود ندارد. به این ترتیب مشکل انرژی های منفی به خوبی حل شده است.

■ تمرین: انرژی حالت های زیر را با محاسبه بدست آورید:

$$
a^\dagger(\mathbf{k})|\Omega\rangle, \qquad a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')|\Omega\rangle, \tag{۳۸}
$$

که در آن $|\Omega\rangle$ حالت خلاء است.

تفسیرمعمولی که از بهنجارکردن هامیلتونی می شود آن است که دریک هامیلتونی کلاسیک ابهامی برای ترتیب نوشتن مشاهده پذیرها وجود ندارد زیرا همه این کمیت ها با یکدیگرجابجا می شوند ولی پس ازکوانتش این ابهام خود را به طور جدی نشان می دهد. به عنوان مثال یک نوسانگر هارمونیک ساده را با هامیلتونی کلاسیک زیر درنظربگیرید:

$$
H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) \qquad \{x, p\} = 1 \tag{۳۹}
$$

که درآن $\{x, p\}$ کروشه پوآسون را نشان می دهد. با تعریف متغیرهای کلاسیک a و a^* به شکل

$$
a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip) \qquad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip) \tag{۴۰}
$$

خواهیم داشت

$$
\{a, a^*\} = -i, \tag{۴۱}
$$

که کروشه پوآسون بین متغیرهای جدید را نشان می دهد.

حال می توانیم هامیلتونی کلاسیک را به هرکدام از شکل های زیر بازنویسی کنیم:

$$H = a^* a \qquad H = a a^* \qquad H = \frac{1}{2}(a a^* + a^* a) \tag{۴۲}$$

درفرآیند کوانتش رابطه (41) به رابطه زیر بین عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{۴۳}$$

می شود ولی بسته به این که کدام فرم هامیلتونی کلاسیک را اختیارکنیم هامیلتونی های کوانتومی متفاوت زیر را بدست می آوریم که همگی با یکدیگر به اندازه مقدارهای ثابتی تفاوت دارند:

$$\hat{H}_1 = \hat{a}^\dagger \hat{a} \qquad \hat{H}_2 = \hat{a}\hat{a}^\dagger \qquad \hat{H}_3 = \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \tag{۴۴}$$

از آنجا که هامیلتونی های بالا بایکدیگر مقدارهای ثابتی تفاوت دارند دینامیک کوانتومی که ایجاد می کنند یکی خواهد بود و تنها تفاوت آنها در انرژی ثابتی است که به همه حالت های فضای هیلبرت اضافه می کنند. می بایست از بین هامیلتونی های بالا یکی را انتخاب کنیم و بهنجارکردن یک روش کاملا معقول وقابل قبول است که مبنای آن این تقاضاست که انرژی حالت پایه صفر شود. درنظریه میدان کوانتومی این کاررا می توان برای همه کمیت های پایسته دیگر نیزمثل تکانه، بار الکتریکی و نظایر آن انجام داد به این ترتیب که تقاضا کنیم تکانه خطی خلاء و بارالکتریکی آن می بایست صفر شود.

۳ میدان کلاین گوردون مختلط

حال به میدان کلاین گوردون مختلط می پردازیم. لاگرانژی میدان کلاین گوردون مختلط به شکل زیراست:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^m \phi - m^2 \phi^* \phi \tag{۴۵}$$

براحتی معلوم می شود که تکانه های مزدوج به شکل زیر هستند:

$$\phi := \dot{\phi^*} \qquad \phi^* := \dot{\phi} \tag{۴۶}$$

معادلات حرکت کلاسیک نیزعبارتند از:

$$(\Box+m^2)\phi(x)=0$$
$$(\Box+m^2)\phi^*(x)=0 \qquad (۴۷)$$

این لاگرانژی تحت تبدیلات پیوسته

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\theta}\phi \qquad \phi^* \longrightarrow \phi' = e^{-i\theta}\phi^*$$

تغییر نمی‌کند و بنابراین منجر به جریان پایسته

$$J^\mu = c(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \qquad (۴۸)$$

و بارپایسته زیر برای میدان ها می شود:

$$Q = c\int d^3x(\phi^*\partial^0\phi - \phi\partial^0\phi^*) \qquad (۴۹)$$

مطابق معمول کوانتش در تصویر هایزنبرگ با حل معادلات حرکت و وضع روابط جابجاگری کانونیک بین عملگرها آغازمی شود. روابط کوانتش کانونیک تنها شامل جابجاگر های غیر صفر زیر است :

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x},t),\hat{\pi}(\mathbf{x}',t)] = i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$
$$[\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{x},t),\hat{\pi}^\dagger(\mathbf{x}',t)] = i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (۵۰)$$

حل معادلات حرکت (47) درست مثل میدان حقیقی کلاین گوردون است یعنی

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_\mathbf{k}}(a(\mathbf{k})e^{-ikx} + b(\mathbf{k})^\dagger e^{ikx})$$
$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_\mathbf{k}}(a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} + b(\mathbf{k})e^{-ikx}) \qquad (۵۱)$$

دقت کنید که چون میدان مختلط بوده است ارتباطی بین $b(\mathbf{k})$ و $a(\mathbf{k})$ ایجاد نشده است. تکانه های مزدوج با مشتق گیری از این حل ها بدست می آیند و خواهیم داشت:

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}(i\omega_{\mathbf{k}}a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} - i\omega_k b(\mathbf{k})e^{-ikx})$$
$$\hat{\pi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}(-i\omega_{\mathbf{k}}a(\mathbf{k})e^{-ikx} + i\omega_k b(\mathbf{k})^\dagger e^{-ikx}) \qquad (۵۲)$$

از روابط فوق می توانیم عملگرهای خلق و فنا را برحسب میدان ها و تکانه های آنها بدست آوریم :

$$a(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x}e^{ikx}(\omega_{\mathbf{k}}\hat{\phi} + i\hat{\pi}^\dagger) \qquad (۵۳)$$
$$a^\dagger(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x}e^{-ikx}(\omega_{\mathbf{k}}\hat{\phi}^\dagger - i\pi) \qquad (۵۴)$$
$$b(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x}e^{ikx}(\omega_{\mathbf{k}}\hat{\phi}^\dagger + i\hat{\pi}) \qquad (۵۵)$$
$$b^\dagger(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x}e^{-ikx}(\omega_{\mathbf{k}}\hat{\phi} - i\pi^\dagger) \qquad (۵۶)$$

با استفاده از روابط جابجایی همزمان (50) باکمی محاسبه بدست می آوریم که تنها روابط جابجایی غیر صفر بین عملگرهای خلق و فنا به شکل زیراست:

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$
$$[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \qquad (۵۷)$$

می توان باکمی محاسبه هامیلتونی، تکانه خطی و بارالکتریکی را برحسب عملگرهای خلق وفنا نوشت: این عملگرها پس از بهنجارمرتب شدن به شکل زیردرمی آیند:

$$: H := \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\omega_{\mathbf{k}}\left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\right) \qquad (۵۸)$$
$$: \mathbf{P} := \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\mathbf{k}\left(a^\dagger\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\right) \qquad (۵۹)$$
$$: Q := \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\right) \qquad (۶۰)$$
$$(۶۱)$$

روابط فوق نشان می دهندکه عملگرهای $a^\dagger(\mathbf{k})$ و $b^\dagger(\mathbf{k})$ به ترتیب ذرات با تکانه $\mathbf{k}$ ، انرژی $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ و بارهای $+1$ و -1 را خلق

می‌کنند.

در این جا نیز اثری از انرژی منفی وجود ندارد چرا که هامیلتونی یک عملگر مثبت است و تمامی ویژه مقدارهایش مثبت هستند.

■ تمرین: انرژی و بار حالت های زیر را پیدا کنید:

$$a^{\dagger}(\mathbf{k})|\Omega\rangle, \qquad a^{\dagger}(\mathbf{k})b^{\dagger}(\mathbf{k}')|\Omega\rangle, \tag{۶۲}$$

که در آن $|\Omega\rangle$ حالت خلاء است.