کوانتش دوم ، میدان های کوانتومی غیر نسبیتی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۹ دی ۱۳۹۷

۱ مقدمه

هدف ما دراین درس آن است که یادبگیریم دستگاههای بس ذره ای را که از ذرات یکسان تشکیل شده اند درچارچوب مکانیک کوانتومی توصیف کنیم. می دانیم که برای چنین ذراتی نمی توان هویت های جداگانه و متمایز درنظر گرفت وبه همین دلیل نمی توان تابع موجی مثل $\Psi(x_1, x_2, \cdots x_N)$ که احتمال وجود ذره یک را درنقطه x_1 ، ذره دو را در x_2 و الی آخر بدست می دهد به این دستگاه نسبت داد. به همین ترتیب نمی توان از تابع موجی مثل $\hat{\Psi}(k_1, k_2, \cdots k_N)$ که احتمال داشتن تکانه k_1 را برای ذره یک ، تکانه k_2 را برای ذره دو و الی آخر بدست می دهد سخن گفت . معنای این حرف ها آن است که بردارهای پایه مناسب برای فضای هیلبرت این دستگاه بردارهای از نوع

$$|x_1, x_2, \cdots x_N\rangle \quad (۱)$$

و یا

$$|k_1, k_2, \cdots k_N\rangle \quad (۲)$$

نیستند.

می توان بردارهای پایه مناسبی را بااستفاده از متقارن کردن و یا پادمتقارن کردن بردارهای فوق ساخت که به معنای آن است که تابع موج را کاملا

متقارن و یا کاملا پادمتقارن درنظربگیریم. اما این روش از نظر محاسباتی چندان مفید و کارگشا نیست. راه چاره آن است که سعی کنیم بردارهای پایه فضای هیلبرت را به طور طبیعی و با توجه دقیق به این نکته که واقعا نمی توان تک تک ذرات را شناسایی کرد تعریف کنیم.
برای یک ذره منفرد کامل ترین توصیفی که می توانیم از حالت های ذره بکنیم آن است که یک مجموعه کامل از عملگرهای جابجاشونده درنظربگیریم و ویژه بردارهای مشترک این عملگرهارا به عنوان حالت های ذره بکارببریم. این مجموعه کامل را با نماد A و ویژه بردارهای مشترک آن ها را با نماد های $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle, \cdots$ نشان می دهیم. مجموعه حالت های $\{|\alpha_i\rangle\}$ فضای هیلبرت یک ذره را می پوشاند و هر حالت دیگری از ذره ترکیبی خطی از این حالت هاست.
یادآوری می کنیم که مجموعه کامل از عملگرهایی که برای توصیف یک ذره بکارمی رود یکتا نیست و می توان به جای مجموعه A و حالت های $\{|\alpha_i\rangle\}$ مجموعه B و حالت های $\{|\beta_i\rangle\}$ را بکاربرد. واضح است که این دو نوع حالت با یک عملگریکانی به یکدیگر مربوط هستند یعنی

$$|\alpha_i\rangle = \sum_{\beta_j} |\beta_j\rangle\langle\beta_j|\alpha_i\rangle \tag{۳}$$

یک نمونه از این رابطه که برای ما خیلی آشناست رابطه زیر است:

$$|p\rangle = \int dx|x\langle x|p\rangle = \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}|x\rangle, \tag{۴}$$

و یا

$$|x\rangle = \int dp|p\langle p|x\rangle = \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx}|p\rangle. \tag{۵}$$

توصیف دستگاه های بس ذره ای با تکیه بریک اصل موضوع اساسی ممکن می شود که اعتبارآن تنها درگرو تطبیق نتایج تجربی با نتایج نظری ای است که از صورت بندی متکی بر این اصل ناشی می شود. این اصل چنین است:

اصل موضوع اساسی برای دستگاه های بس ذره ای: هر مجموعه کامل از عملگرها که برای توصیف یک ذره منفرد بکار می رود برای توصیف N ذره یکسان نیز قابل کاربرد است حتی اگر ذرات بایکدیگر برهم کنش بکنند.

معنای فیزیکی این اصل آن است که یک مجموعه مرکب از ذرات خصوصیات ذرات منفرد را تا حدود خیلی زیادی حفظ می کند. این مسئله ممکن است دردنیای روزمره و برای توپهای بیلیارد (البته وقتی که برخورد توپها آنها را خرد نمی کند) واضح باشد اما برای دنیای میکروسکوپی

امری است که تنها می بایست صحت آن را با محک تجربه سنجید.

در دستگاه های بس ذره ای ماده چگال مثل گاز یا مایع الکترونی ما فقط مشاهده پذیر های ماکروسکوپی را مستقیماً اندازه می گیریم و به هیچ وجه نمی دانیم که آیا گاز یا مایع الکترونی واقعاً خصوصیات تک تک الکترون ها را حفظ می کند یا نه. در فیزیک ذرات بنیادی نیز آنچه که درآزمایشگاه ها و شتابدهنده ها می بینیم تنها ذرات اولیه ای که است که با سرعت خیلی زیاد به سوی دیگر پرتاب می شوند و ذرات نهایی بعضاً متفاوتی که از ناحیه بسیار کوچک برهم کنش از یکدیگر دور می شوند. واقعا نمی دانیم که آیا درمحدوده فضا زمانی بسیار کوچکی که نیروهای بین ذرات عمل می کنند آیا بازهم هویت تک تک ذرات قابل تشخیص است یانه ؟ البته وقتی ذرات جدیدی خلق می شوند ما می بایست از ابتدا حالت های این ذرات را نیز در فضای هیلبرت خود بگنجانیم و سپس به کمک دستگاه نظری خود احتمالات پیدایش چنین ذراتی را محاسبه کنیم. درمثال توپ های بیلیارد اگر توپ هاخرد می شوند و به توپ های کوچکتری تبدیل می شوند می بایست حالات توپ های کوچک تر را نیز در فضای هیلبرت بگنجانیم اگر چه مطمئن هستیم که درانرژی های معمولی هیچ گاه این حالت ها پدیدارنخواهند شد.

۲ عملگرهای خلق و فنای ذرات

از نظر ریاضی معنای اصل موضوع اساسی فوق و تمیزناپذیری ذرات آن است که می توان مجموعه کامل و جابجاشونده ای از عملگرهای $\{N_1, N_2, \cdots\}$ وجو د دارند که ویژه مقادیر آنها یعنی مجموعه $\{n_1, n_2, \cdots\}$ بیان می کنند چه تعداد از ذرات درحالت α_1 قرار دارند، چه تعداد درحالت α_2 و الی آخر. اعداد $\{n_i\}$ اعداد اشغال خوانده می شوند. به عنوان بنابراین حالت های دستگاه بس ذره ای به صورت

$$|n_1, n_2, n_3, \cdots\rangle, \tag{۶}$$

نشان داده می شوند که ویژه بردارهای مشترک همه عملگر های $\{N_i\}$ هستند

$$N_i|n_1, n_2, \cdots\rangle = n_i|n_1, n_2, \cdots\rangle. \tag{۷}$$

بنا براین فضای هیلبرت دستگاه بس ذره ای فضایی است که توسط بردارهای پایه فوق ایجاد می شود. این فضارا فضای $Fock$ می نامند.

بخصوص حالتی دراین فضا وجود دارد که به حالت خلاء موسوم است و درآن هیچ ذره ای وجود ندارد. این حالت را با $|\mathbf{0}\rangle$ نشان می دهیم .

$$|\mathbf{0}\rangle := |n_1 = 0, n_2 = 0, \cdots\rangle \tag{۸}$$

حالت های قابل توجه دیگر حالت های تک ذره ای هستند که قبلاً با آنها آشنا شده ایم.

$$|n_1 = 0, n_2 = 0, \cdots n_i = 1 \cdots\rangle = |\alpha_i\rangle \tag{۹}$$

حال می توانیم عملگرهای مناسبی به شکل زیر دراین فضا تعریف کنیم :

$$\begin{aligned} a_i^\dagger |n_1, n_2, n_3, \cdots n_i \cdots\rangle &\propto |n_1, n_2, n_3, \cdots n_i + 1, \cdots\rangle \\ a_i |n_1, n_2, n_3, \cdots n_i \cdots\rangle &\propto |n_1, n_2, n_3, \cdots n_i - 1, \cdots\rangle \end{aligned} \tag{۱۰}$$

این عملگرهارا بدلیل واضح عملگرهای خلق و فنا می نامیم. بعداً می بایست ضرایب تناسب را درروابط بالا تعیین کنیم. فعلاً تقاضا می کنیم که

$$\begin{aligned} a_i^\dagger |\mathbf{0}\rangle &= |0, 0, 0, \cdots n_i = 1, \cdots\rangle = |\alpha_i\rangle \\ a_i |\alpha_i\rangle &= |\mathbf{0}\rangle \end{aligned} \tag{۱۱}$$

هم چنین با توجه به اینکه حالت خلاء هیچ ذره ای ندارد تقاضا می کنیم که

$$a_i |\mathbf{0}\rangle = 0 \tag{۱۲}$$

به خصوص اگر بردار حالت یک ذره را با مشاهده پذیر مربوط به مکانش توصیف کنیم یعنی $|x\rangle$، آنگاه عملگری را که این حالت را خلق می کند با $\psi^\dagger(x)$ نشان می دهیم و خواهیم داشت:

$$\psi^\dagger(x)|0\rangle = |x\rangle, \qquad \psi(x)|y\rangle = \delta(x - y)|0\rangle. \tag{۱۳}$$

هم چنین اگر حالت یک ذره را با مشاهده پذیر مربوط به تکانه اش توصیف کنیم یعنی $|p\rangle$، آنگاه عملگری را که این حالت را خلق می کند با $\psi^\dagger(p)$ نشان می دهیم و خواهیم داشت:

$$\psi^\dagger(p)|0\rangle = |p\rangle, \qquad \psi(p)|p'\rangle = \delta(p-p')|0\rangle. \tag{۱۴}$$

اگر هم حالت ذره هم با مکان و هم با مولفه اسپین اش توصیف کنیم یعنی $|x,\sigma\rangle$ که در آن $\sigma = \pm 1$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\psi_\sigma{}^\dagger(x)|0\rangle = |x,\sigma\rangle, \qquad \psi_\sigma(x)|y,\sigma'\rangle = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta(x-y)|0\rangle. \tag{۱۵}$$

عملگرهای $\psi(x)$ و $\psi^\dagger(x)$ عملگرهایی هستند که دارای یک پارمتر پیوسته مکانی هستند. به همین دلیل به آنها عملگرمیدانی [۱] گفته می شود. دلیل انتخاب نام کوانتش دوم نیز همین است زیرا به نظر می رسد که تابع موج را یک بار دیگر کوانتیده کرده و آن را تبدیل به عملگر کرده ایم ولی در واقع فرمالیزمی که توصیف خواهیم کرد هیچ چیز جدیدی جز همان مکانیک کوانتومی استاندارد را در بر ندارد.

■ تمرین: روابط زیر را ثابت کنید:

$$[N_i, a_j] = -\delta_{ij}a_j, \qquad [N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}a_j^\dagger. \tag{۱۶}$$

قبلاً در رابطه (3) دیدیم که چگونه یک تبدیل یکانی از یک دسته حالت های تک ذره ای به یک دسته دیگر چگونه بیان می شود حال می خواهیم ببینیم که این تبدیل در نماد گذاری جدید چگونه نمایش داده می شود. فرض کنید که به جای مجموعه A و حالت های $\{|\alpha_i\rangle\}$ مجموعه B و حالت های $\{|\beta_i\rangle\}$ را برای توصیف حالت های تک ذره ای بکارببریم. دراین صورت عملگرهای شمارش مربوط به این حالت ها را با $\hat{N}_i$، ویژه مقادیر آنها را با $\hat{n}_i$ و عملگرهای خلق و فنای جدید را با b_i و ${b_i}^\dagger$ نشان می دهیم. از آنجا که حالت خلاء برای هر دو انتخاب یکسان است می توان رابطه (3) را به صورت زیر نوشت:

$$a_i^\dagger|\mathbf{0}\rangle = \sum_{\beta_j} {b_j}^\dagger|\mathbf{0}\rangle\langle\beta_j|\alpha_i\rangle \tag{۱۷}$$

این رابطه وقتی برقرار می شود که داشته باشیم :

$$a_i^\dagger = \sum_{\beta_j} {b_j}^\dagger\langle\beta_j|\alpha_i\rangle \tag{۱۸}$$

[۱] Field Operator

که الحاقی آن به شکل زیر است :

$$a_i = \sum_{\beta_j} b_j \langle \beta_j | \alpha_i \rangle^* \qquad (۱۹)$$

به عنوان مثال از روابط (۵) و (۴) بدست می آوریم:

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dp e^{-ipx} \psi^\dagger(p), \qquad (۲۰)$$

و

$$\psi^\dagger(p) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx e^{ipx} \psi^\dagger(x). \qquad (۲۱)$$

این روابط در زیر فضای هیچ ذره ای و تک ذره ای برقرارهستند. از این به بعد فرض می کنیم که این روابط در تمام فضای هیلبرت برقرار هستند و آن ها را به عنوان اتحاد های عملگری می پذیریم. این فرض یک فرض تکنیکی است و نه یک فرض فیزیکی اساسی و تنها باعث سادگی نظریه نهایی می شود.

بااستفاده از آن می توان به راحتی ضرایب تناسب را در روابط (11) بدست آورد.

نخست توجه می کنیم که اثر پیاپی دو عملگر $a_i^\dagger$ و $a_j^\dagger$ روی هر بردار $|\Psi\rangle$ حالت های فیزیکی یکسانی تولید می کند. تنها ممکن است که ضریب تناسب ایجاد شده دراین دو مورد با یکدیگر متفاوت باشد . بنابراین خواهیم داشت :

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |\Psi\rangle = \lambda a_j^\dagger a_i^\dagger |\Psi\rangle \qquad (۲۲)$$

علی الاصول ضریب λ بستگی به شاخص های i, j و حالت $|\Psi\rangle$ دارد بنابراین به طور دقیق می بایست رابطه بالا را به شکل زیر نوشت :

$$a_i{}^\dagger a_j{}^\dagger |\Psi\rangle = \lambda_{i,j}(\Psi) a_j{}^\dagger a_i{}^\dagger |\Psi\rangle \qquad (۲۳)$$

برای اینکه نشان دهیم که λ چنین بستگی پیچیده ای ندارد حالت های تک ذره ای خود را تغییر می دهیم و با استفاده از (18) بدست می آوریم که درپایه جدید بجای رابطه ساده (23) رابطه زیر وجود دارد:

$$\sum_{k,l} c_{ki} c_{lj} b_k^\dagger b_l^\dagger |\Psi\rangle = \lambda_{ij}(\Psi) \sum_{k,l} c_{ki} c_{lj} b_l^\dagger b_k^\dagger |\Psi\rangle \qquad (۲۴)$$

در این جا ماتریس $(c)_{ki} := c_{ki}$ به دلیل آنکه ماتریس تغییر پایه است یک ماتریس یکانی و بنابراین وارون پذیراست. یعنی

$$\sum_i c^*_{mi} c_{ki} = \delta_{mk}, \qquad \sum_i c^*_{nj} c_{lj} = \delta_{nl}. \tag{۲۵}$$

پس می توانیم طرفین رابطه (۲۴) را در وارون این ماتریس ها ضرب کنیم و پس از ساده کردن رابطه زیر را بدست بیاوریم:

$$b^\dagger_m b^\dagger_n |\Psi\rangle = \left(\lambda_{ij}(\Psi) \sum_{i,j} \sum_{k,l} c^*_{mi} c^*_{nj} c_{ki} c_{lj} b^\dagger_l b^\dagger_k \right) |\Psi\rangle \tag{۲۶}$$

اگر λ_{ij} ها واقعا به اندیس های i و j بستگی داشته باشند، طرف راست این رابطه از این ساده تر نخواهد شد و این امر به این معناست که رابطه بین عملگرهای فنای متفاوت بستگی به انتخاب پایه دارد و دریک پایه این رابطه مثل (23) ساده و درپایه دیگر مثل (27) این رابطه پیچیده است که درست نیست یا حداقل طبیعی نیست . تنها راه برون رفت از این وضعیت آن است که فرض کنیم که این ضرایب بستگی به شاخص های i, j ندارند. در این صورت عبارت داخل پرانتز در طرف راست (۲۷) ساده شده و خواهیم داشت:

$$b^\dagger_m b^\dagger_n |\Psi\rangle = \lambda(\Psi) \sum_{k,l} \left(\sum_i c^*_{mi} c_{ki}\right) \left(\sum_j c_{lj} c^*_{nj}\right) b^\dagger_l b^\dagger_k |\Psi\rangle = \lambda b^\dagger_n b^\dagger_m |\Psi\rangle. \tag{۲۷}$$

بنابراین درهر پایه ای این رابطه به فرم ساده زیر نوشته می شود:

$$a_i a_j |\Psi\rangle = \lambda(\Psi) a_j a_i |\Psi\rangle \tag{۲۸}$$

با تکراراین رابطه برای شاخص های (j, i) به جای (i, j) به این نتیجه می رسیم که $\lambda(\Psi)^2 = 1$ و یا

$$\lambda(\Psi) = \pm 1. \tag{۲۹}$$

می توان فضای حالت ها را به دوزیر فضای متفاوت تقسیم کرد. دریک زیر فضا داریم $\lambda(\Psi) = 1$ و درزیر فضای دیگر داریم $\lambda(\Psi) = -1$. از این به بعد این دو زیر فضا را جداگانه بررسی می کنیم . به هر کدام از این دو زیر فضا یک نام می دهیم و آنها را به ترتیب فضای ذرات بوزونی و فضای ذرات فرمیونی می نامیم. درهر کدام از این فضاها رابطه $a_i a_j = a_j a_i$ ویا $a_i a_j = -a_j a_i$ به صورت یک اتحاد برقرارخواهد بود. فرم الحاقی این روابطه نیز به صورت زیر درمی آید: $a^\dagger_i a^\dagger_j = \pm a^\dagger_j a^\dagger_i$.

بنابراین تا کنون یاد گرفته ایم که

$$a_i a_j = \lambda a_j a_i \tag{۳۰}$$

که در آن $\lambda = \pm 1$. با گرفتن الحاقی از طرفین رابطه (۳۰) و توجه به این نکته که $\lambda = \pm 1$ نتیجه می گیریم که

$$a_i^\dagger a_j^\dagger = \lambda a_j^\dagger a_i^\dagger. \qquad (۳۱)$$

تا کنون تمام روابط جابجایی را بدست آورده ایم بجز یک رابطه مهم و آن رابطه a_i و $a_j^\dagger$ است. برای این کار دقت می کنیم که برای یک حالت دلخواهِ $|\Psi\rangle$ اگر $i \neq j$ باشد، $a_i a_j^\dagger$ و $a_j^\dagger a_i$ هر دو یک حالت را تولید می کنند بنابراین این دو عملگر هم با هم متناسب هستند، یعنی داریم:

$$a_i a_j^\dagger = \mu a_j^\dagger a_i. \qquad (۳۲)$$

اما اگر $i = j$ باشد، آنگاه اثر این دو عملگر می بایست متناسب با عمل عملگر واحد باشد. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$a_i a_i^\dagger - \mu a_i^\dagger a_i = \alpha_i I, \qquad (۳۳)$$

که درآن α یک عدد ثابت است که می بایست بعدا تعیین شود. هر دو رابطه را می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$a_i a_j^\dagger - \mu a_j^\dagger a_i = \alpha_i \delta_{ij} I. \qquad (۳۴)$$

با در نظر گرفتن حالت $i = j$ و اثر دادن دو طرف روی حالت خلاء و توجه به این نکته که $a_i|0\rangle = 0$ و $a_i\ a_i^\dagger|0\rangle = |0\rangle$ بدست می آوریم که α_i می بایست برابر با 1 باشد. بنابراین رابطه ای که داریم به شکل زیر است:

$$a_i a_j^\dagger - \mu a_j^\dagger a_i = \delta_{ij} I. \qquad (۳۵)$$

حال برای این که این رابطه را کامل کنیم و بقیه روابط را نیز بدست بیاوریم می بایست به تعریف عملگر شمارش بپردازیم. عملگر شمارش تعداد کل ذرات می بایست عملگری باشد که نسبت به هرنوع تغییر پایه ای ناوردا باشد چرا که تعداد ذرات ربطی به این ندارد که کدام خاصیت را برای توصیف یک ذره به کار می بریم. تنها عملگرهایی که می توان از عملگرهای خلق و فنا ساخت که این خاصیت را داشته باشند علاو ه بر عملگر ثابت عبارتند از $\sum_i a_i^\dagger a_i$ و $\sum_i a_i a_i^\dagger$. با توجه به رابطه (۳۵) می توان نوشت :

$$N = x\sum_i a_i^\dagger a_i + y \qquad (۳۶)$$

بنابراین به طور طبیعی می توان عملگر

$$N_i = x a_i^\dagger a_i + y \qquad (۳۷)$$

را به عنوان عملگری در نظر گرفت که تعداد ذرات در حالت i را می شمارد. با توجه به رابطه $N_i|\mathbf{0}\rangle = 0$ و $N_i|i=1\rangle = |i=1\rangle$ بدست می آوریم که $x = 1$ و $y = 0$. تنها چیزی که باقی مانده است رابطه دو پارامتر μ و λ است. برای این که این رابطه را تعیین کنیم دقت می کنیم که بنابر رابطه (**؟؟**)

$$a_i N_j = N_j a_i + \delta_{ij} a_i. \tag{۳۸}$$

بنابراین سعی می کنیم که در رابطه زیر a_i را با استفاده از روابط جابجایی از سمت چپ به سمت راست ببریم: داریم:

$$\begin{aligned} a_i N_j = a_i(a_j^\dagger a_j) &= (a_i a_j^\dagger) a_j = (\mu a_j^\dagger a_i + \delta_{ij}) a_j = \mu a_j^\dagger (a_i a_j) + \delta_{ij} a_j \\ &= \mu a_j^\dagger (\lambda a_j a_i) + \delta_{ij} a_j = \mu\lambda N_j a_i + \delta_{ij} a_j \end{aligned} \tag{۳۹}$$

که نتیجه می دهد $\mu = \lambda = \pm 1$.

با این استدلال روابط جابجایی بین عملگر های خلق و فنا کامل می شود که مجموعه آنها را درزیر بازنویسی می کنیم:

برای بوزون ها:

$$\begin{aligned} [a_k, a_l] &= [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0 \\ [a_k, a_l^\dagger] &= \delta_{k,l} I \end{aligned} \tag{۴۰}$$

و برای فرمیون ها:

$$\begin{aligned} \{[a_k, a_l\} &= \{a_k^\dagger, a_l^\dagger\} = 0 \\ \{a_k, a_l^\dagger\} &= \delta_{k,l} I \end{aligned} \tag{۴۱}$$

که درآن $\{a, b\} := ab + ba$.

بنابراین فضای هیلبرت این سیستم بس ذره ای که از این به بعد آن را فضای فوک [۲] می نامیم، به صورت زیر در می آید:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \cdots \mathcal{F}_n \oplus \cdots \tag{۴۲}$$

که در آن $\mathcal{F}_0$ همان حالت خلا یا حالتِ بدون ذره است و $\mathcal{F}_n$ زیرفضای حالت های n ذره ای است. مثال خاصی از روابط بالا به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} [\psi(x), \psi(y)]_{\pm} &= [\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(y)]_{\pm} = 0, \\ [\psi(x), \psi^\dagger(y)]_{\pm} &= \delta(x-y)I, \end{aligned} \tag{۴۳}$$

که در آن علامت $+$ به معنای پادجابجاگر و علامت $-$ به معنای جابجاگر است.

- تمرین: با استفاده از رابطه

$$\langle n_1, n_2, \cdots | N_i | n_1, n_2, \cdots \rangle = \langle n_1, n_2, \cdots | a_i^\dagger a_i | n_1, n_2, \cdots \rangle \tag{۴۴}$$

ثابت های تناسب در روابط (10) را پیدا کنید و نشان دهید که :

$$a_i | n_1, n_2, \cdots n_i, \cdots \rangle = e^{i\alpha} \sqrt{n_i} | n_1, n_2, \cdots n_i - 1, \cdots \rangle \tag{۴۵}$$

نشان دهید که برای بوزون ها می توان $e^{i\alpha}$ را مساوی یک گرفت اما درمورد فرمیون ها برای آنکه این انتخاب با روابط پادجابجایی سازگار شود می بایست این فاز را مطابق قاعده زیر تعیین کرد:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= 1 \qquad \text{if} \qquad \sum_{k<i} n_k = even \\ e^{i\alpha} &= -1 \quad\ \ \text{if} \qquad \sum_{k<i} n_k = odd \end{aligned} \tag{۴۶}$$

- تمرین: یک شبک یک بعدی در نظر بگیرید که نقاط آن دارای مختصات $x = na$ هستند که در آن a ثابت شبکه و $n \in Z$ اعداد صحیح هستند. حال عملگرهای زیر را تعریف کنید:

$$a_n := c\int_{na-\frac{a}{2}}^{na+\frac{a}{2}} \psi(x)dx, \qquad a_n^\dagger = c\int_{na-\frac{a}{2}}^{na+\frac{a}{2}} \psi^\dagger(x)dx. \tag{۴۷}$$

[۲] Fock Space

که در آن c یک عدد ثابت است. رابطه جابجایی عملگرهای a_n و $a_m^\dagger$ را بدست آورید و ثابت c را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{n,m} I$.

- تمرین: در شبکه قبلی فرض کنید که طول شبکه محدود است و شرایط مرزی پریودیک نیز برقرار است، یعنی قرار دهید

$$n \in \{0, 1, 2, \cdots N-1\}, \qquad\qquad N \equiv 0.$$

در این شبکه هامیلتونی زیر را در نظر بگیرید:

$$H = J \sum_{n=0}^{N-1} a_n^\dagger a_{n+1} + a_n a_n^\dagger - 2a_n^\dagger a_n \tag{۴۸}$$

که در آن a_n ها عملگرهای فرمیونی هستند و J یک عدد ثابت مثبت است.

الف: ویژه حالت های انرژی این هامیلتونی را بدست آورید.

ب: حالت پایه و انرژی آن را مشخص کنید.

پ: قسمت های الف و ب را برای وقتی که عملگرها بوزونی هستند حل کنید.

۳ عملگرهای تک ذره ای و دو ذره ای

تا کنون ساختمان فضای هیلبرت و عملگرهایی را که در آن عمل می کنند شناخته ایم. حال از خود می پرسیم که چگونه می توان عملگرهایی را که روی کل یک سیستم اثر می کنند تعریف کرد. مثلا چگونه می توان عملگر تکانه کل یا انرژی جنبشی کل یا انرژی پتانسیل را که نشان دهنده برهم کنش های بین ذرات است تعریف کرد؟ در این بخش به این سوالات پاسخ می دهیم. نخست فرض کنید که یک عملگر جمع پذیر تک ذره ای مثل $\hat{K}$ داریم که در پایه $\{|\alpha_i\rangle\}$ که برای ساختن بردارهای پایه فضای $Fock$ بکاربرده ایم قطری باشد. یعنی $\hat{K}|\alpha_i\rangle = K_i|\alpha_i\rangle$. دراین صورت خواهیم داشت

$$\hat{K}|n_1, n_2, \cdots n_i \cdots\rangle = \sum_i K_i n_i |n_1, n_2, \cdots n_i \cdots\rangle \tag{۴۹}$$

که به معنای آن است که این عملگر در پایه انتخاب شده برای فضای فوک قطری بوده و برابر است با

$$\hat{K} = \sum_i K_i \hat{N}_i = \sum_i K_i a_i^\dagger a_i \tag{۵۰}$$

حال با توجه به رابطه (18) می توان شکل این عملگر را در هر پایه دیگر که درآن K لزوماً قطری نیست نیز بدست آورد:

$$\begin{aligned}\hat{K} &= \sum_i K_i a_i^\dagger a_i = \sum_i K_i \sum_j b_j^\dagger \langle\beta_j|\alpha_i\rangle \sum_l b_l \langle\alpha_i|\beta_l\rangle \\ &= \sum_{j,l} b_j^\dagger b_l \sum_i \langle\beta_j|\alpha_i\rangle K_i \langle\alpha_i|\beta_l\rangle \\ &= \sum_{j,l} b_j^\dagger \langle\beta_j|\hat{K}|\beta_l\rangle b_l\end{aligned} \tag{۵۱}$$

این رابطه آخر نشان می دهد که چگونه می توان یک عملگر تک ذره ای را در پایه ای که درآن قطری نیست نیز نوشت. به عنوان مثال عملگر انرژی جنبشی را می توان درپایه تکانه به شکل زیر نوشت:

$$\hat{K} = \int dp \hat{\psi}^\dagger(p) \frac{p^2}{2m} \hat{\psi}(p). \tag{۵۲}$$

به صورت شهودی این رابطه بیان ساده ای دارد چرا که $\hat{\psi}^\dagger(p)\hat{\psi}(p)$ عملگر شمارش ذراتی است که دارای تکانه p هستند و $\hat{K}$ در واقع ذراتی را که دارای تکانه p هستند می شمارد و تکانه آنها را حساب کرده با هم جمع می کند تا تکانه کل یک حالت بدست بیاید. این رابطه در پایه ای نوشته شده است که در آن تکانه یا $\hat{p}$ قطری است. هرگاه آن را در یک پایه دیگر مثلا پایه مختصات بنویسیم مطابق با (۵۱) شکل زیر را پیدا خواهد کرد.

$$\begin{aligned}\hat{K} &= \int\int dx dx' \hat{\psi}^\dagger(x) \langle x|\hat{K}|x'\rangle \hat{\psi}(x) \\ &= \frac{1}{2}\int dx \hat{\psi}^\dagger(x)(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial_x^2})\hat{\psi}(x)\end{aligned} \tag{۵۳}$$

که درآن عملگر های خلق و فنای $\hat{\psi}^\dagger(x)$ و $\hat{\psi}(x)$ که ذره را در مکان x خلق یا نابود می کنند اپراتورهای میدان نامیده می شوند. دلیل این نامگذاری آن است که این عملگرها با نقاط فضا پارامتریزه شده است و مثل ان است که یک میدان کوانتومی درفضا تعریف کرده ایم. رابطه ی (۵۲) در واقع بیان می کند که چرا از نظر تاریخی اصطلاح کوانتش دوم برای این فرمالیزم به کار رفته است. اگر به رابطه (۵۲) نگاه کنیم بسیار شبیه به رابطه ای است که در مکانیک کوانتومی برای محاسبه متوسط تکانه روی یک تابع حالت $\psi(p)$ دارد. ولی تفاوت در این است که در مکانیک کوانتومی $\psi(p)$ تابع موج یک ذره است و یک عملگر نیست و این انتگرال نیز متوسط انرژی جنبشی را برای یک ذره بدست می دهد و

حاصل آن نیز یک عدد است. اما در این جا یعنی در درس حاضر درست مثل این است که همان تابع موج تبدیل به یک عملگر شده است. البته این تشابه تنها صوری است و از نظر مفهومی رابطه (۵۲) یک عملگر است و نه یک عدد و کاری هم که می کند محاسبه متوسط تکانه یک ذره نیست بلکه عملگری است که وقتی روی یک حالت بس ذره ای اثر می کند کل انرژی جنبشی آن حالت را بدست می دهد.

با توجه به همان رابطه (3) رابطه این میدان های کوانتومی با عملگرهای خلق و فنای a_i و $a_i^\dagger$ به صورت زیر است:

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\alpha_i} a_i \langle x|\alpha_i\rangle \qquad \hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_{\alpha_i} a_i^\dagger \langle \alpha_i|x\rangle \tag{۵۴}$$

$$a_i = \int dx \hat{\psi}(x)\langle \alpha_i|x\rangle \qquad a_i^\dagger = \int dx \hat{\psi}^\dagger(x)\langle x|\alpha_i\rangle. \tag{۵۵}$$

حال فرض کنید که یک عملگر جمع پذیر دو ذره ای مثل V داریم که درپایه $\{|\alpha_i\rangle\}$ قطری است یعنی

$$\hat{V}|\alpha_i,\alpha_j\rangle = V_{ij}|\alpha_i,\alpha_j\rangle \tag{۵۶}$$

دراین صورت خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} &\hat{V}|n_1,n_2,\cdots n_i,\cdots n_j\cdots\rangle \\ = &\left(\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}n_i n_j + \frac{1}{2}\sum_i V_{ii}n_i(n_i-1)\right)|n_1,n_2,\cdots n_i,\cdots n_j\cdots\rangle \end{aligned} \tag{۵۷}$$

که به معنای آن است که دراین پایه برای فضای $Fock$ عملگر فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}\hat{N}_i\hat{N}_j + \frac{1}{2}\sum_i V_{ii}\hat{N}_i(\hat{N}_i - 1) \tag{۵۸}$$

بااستفاده از اتحاد $N_iN_j - \delta_{ij}N_i = a_i^\dagger a_j^\dagger a_j a_i$ بدست می آوریم

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij} a_i^\dagger a_j^\dagger a_j a_i. \tag{۵۹}$$

درست مثل حالت قبلی این عملگر را نیز می توان دریک پایه دلخواه دیگر نوشت . محاسبه ساده ای شکل آن را بدست خواهد داد:

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \langle i,j|\hat{V}|l,k\rangle \tag{۶۰}$$

باید تاکید کنیم که شکل کلی عملگرهای تک ذره ای و دو ذره ای که بدست آورده ایم مستقل از نوع آماری است که ذرات از آن تبعیت می کنند. این روابط هم برای بوزون ها وهم برای فرمیون ها صحیح هستند.

به عنوان مثال هرگاه انرژی پتانسیل بین هر دو ذره به صورت $V(x-y)$ باشد، آنگاه انرژی پتانسیل کل برحسب اپراتورهای میدان به شکل زیر نوشته می شود:

$$\hat{V}=\frac{1}{2}\int dx\int dy\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}^\dagger(y)V(x-y)\hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x) \qquad (۶۱)$$

در نتیجه هامیلتونی سیستمی از ذرات یکسان که تحت تاثیر این پتانسیل هستند، در صورت بندی کوانتش دوم به شکل زیر در می آید:

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int dx\hat{\psi}^\dagger(x)(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial_x^2})\hat{\psi}(x)+\frac{1}{2}\int dx\int dxdu\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}^\dagger(y)V(x-y)\hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x). \qquad (۶۲)$$

■ تمرین: الف: با استفاده از رابطه عملگرهای هامیلتونی فوق را بر حسب عملگرهای خلق و فنای تکانه یعنی $\psi(p)$ و $\psi^\dagger(p)$ بازنویسی کنید. از تبدیل فوریه پتانسیل نیز یعنی رابطه زیر استفاده کنید:

$$\tilde{V}(p)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{ipx}V(x)dx. \qquad (۶۳)$$

■ مسئله: الف: برای ذراتی که در سه بعد حرکت می کنند، عملگر های تکانه زاویه ای کل یعنی $L_x,\ L_y$ و L_z را در فرمالیزم کوانتش دوم بدست آورید.

ب: ثابت کنید که این عملگرها در روابط جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[L_m,L_n]=i\epsilon_{m,n,p}L_p. \qquad (۶۴)$$

■ مثال: یک شبکه ی d بعدی را در نظر بگیرید که نقاط آن با شاخص n که در آن n یک عدد صحیح است مشخص شده اند. هر نقطه از شبکه مثل n می تواند در یکی از چهار حالت

$$|0\rangle,\quad |\uparrow\rangle,\quad |\downarrow\rangle,\quad |\uparrow\downarrow\rangle$$

قرار گیرد که به ترتیب به معنای حالتِ بدون ذره، وجود یک ذره با اسپین بالا، یک ذره با اسپین پایین و یا دو ذره یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین هستند. بنابراین عملگرهای خلق و فنا به صورت زیر هستند:

$$a_{n,\uparrow}{}^\dagger,\quad a_{n,\downarrow}{}^\dagger,\quad a_{n,\uparrow},\quad a_{n,\downarrow}. \qquad (۶۵)$$

می دانیم که عملگرهای اسپین به ترتیب زیر هستند:

$$S_x = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \qquad S_y = -i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \qquad S_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \qquad (۶۶)$$

به این ترتیب با استفاده از (۵۱) عملگرهایی که اسپین کل ذرات را در شبکه مشخص می کنند را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\mathcal{S}_a = \sum_{n,\mu;n',\mu'} \langle n,\mu|S_a|n',\mu'\rangle {a_{n,\mu}}^\dagger, a_{n',\mu'}. \qquad (۶۷)$$

به صورت مشخص تر خواهیم داشت:

$$S_x = \sum_n {a_{n,\uparrow}}^\dagger a_{n,\downarrow} + {a_{n,\downarrow}}^\dagger a_{n,\uparrow}. \qquad (۶۸)$$

در مثال های بالا حالتی را در نظر گرفتیم که ذرات فقط روی نقاط شبکه قرار دارند. هرگاه ذرات چنین قیدی نداشته باشیم آنگاه عملگرهای بالا به شکل زیر در می آیند:

$$S_x = \int dx \left({\psi_\uparrow}^\dagger(x)\psi_\downarrow(x) + {\psi_\downarrow}^\dagger(x)\psi_\uparrow(x) \right) \qquad (۶۹)$$

■ تمرین: الف: عملگرهای S_y و S_z را بدست آورید هم وقتی که ذرات روی شبکه هستند و هم وقتی که در فضای پیوسته هستند بدست آورید. نشان دهید که این عملگرها در رابطه ی جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[S_m, S_n] = i\epsilon_{m,n,p} S_p. \qquad (۷۰)$$

ب: در یک شبکه ی یک بعدی که ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ می توانند در آن قرار گیرند، حالت هایی را مشخص کنید که بر اساس نمادگذاری تکانه زاویه ای یعنی $|l,m\rangle$ به صورت زیر باشند:

$$|\frac{N}{2},\frac{N}{2}\rangle, \qquad |\frac{N}{2},\frac{-N}{2}\rangle, \qquad |\frac{N}{2},\frac{N}{2}-1\rangle, \qquad |\frac{N}{2},-\frac{N}{2}+1\rangle.$$

■ تمرین: هامیلتونی یک سیستم بس ذره ای از بوزون ها را که با یکدیگر برهم کنش هسته سخت [۳] دارند بنویسید. منظور از برهم کنش سخت این است که بین هر دو ذره پتانسیل برهم کنش به صورت $V(x,y) = V_0\delta(x-y)$ برقرار است.

[۳] Hard-Core Interaction

به این ترتیب برای هر نوع سیستم بس ذره ای می توانیم فرمالیزم کوانتش دوم را به کار برده و هامیلتونی را به صورت تابعی از عملگرهای خلق و فنا بنویسیم که در یک فضای هیلبرت بس ذره ای با تعداد ذرات نامعین عمل می کند. تعداد این ذرات طبیعتا می تواند کم یا زیاد شود و مهم تر از آن آمار ذرات به طور طبیعی در این فضای هیلبرت برقرار می شود. در درس آینده با مطالعه چند مثال با چگونگی کاربرد این فرمالیزم آشنا می شویم.