نمودارهای فاینمن

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۲۲ دی ۱۳۹۶

۱ مقدمه

در درس گذشته دیدیم که مهمترین کمیتی که می بایست در نظریه میدان کوانتومی محاسبه شود تابع پارش است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z[J] = \int D\phi e^{i\hbar S[\phi] + \frac{i}{\hbar}\int J(x)\phi(x)dx^4}. \qquad (۱)$$

این تابع پارش بهنجار شده است به این معنا که اندازه $D\phi$ چنان است که

$$\int D\phi e^{i\hbar S[\phi]} = 1. \qquad (۲)$$

محاسبه این تابع پارش به مااین امکان را می دهد که بتوانیم تمام توابع چند نقطه ای [۱] را محاسبه کنیم، زیرا کافی است که از این تابع پارش به عنوان یک تابعی از J مشتق بگیریم. اما نکته این است که برای یک کنش دلخواه محاسبه دقیق این تابع پارش غیر ممکن است. تنها کنشی که می توان تابع پارش را برای آن به صورت دقیق حساب کرد و در نتیجه تمام توابع چندنقطه ای را محاسبه کرد کنشی است که نسبت به میدان ها مربعی باشد. چنین کنشی منجر به معادلات خطی برای میدان ها شده و در نتیجه این کنش را کنش آزاد [۲] می نامیم، زیرا دارای هیچ برهم کنشی بین میدان ها نیست. به عنوان مثال یک کنش برای یک میدان اسکالر به صورت زیر است:

$$S = \int d^D x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi)\right] \qquad (۳)$$

[۱] n-point functions
[۲] free action

که در آن $V(\phi)$ یک عبارت بالاتر از مربعی برای میدان و نشان دهنده برهم‌کنش میدان است. هدف ما این است‌که نخست تابع پارش یا توابع چندنقطه ای را برای‌کنش آزاد و سپس به روش اختلالی برای میدان دارای برهم‌کنش محاسبه‌کنیم. این‌کار البته وقتی ممکن است‌که تابع $V(\phi)$ نسبت به بقیه جملات‌کوچک باشد. یک مثال معروف از این نوع برهم‌کنش ها پتانسیل $\lambda\phi^4$ است‌که در آن λ یک پارامتر خیلی‌کوچک است. بنابراین می بایست روشی را بکار بردکه بتوان این تابع پارش را با تقریب و به صورت یک بسط اختلالی برحسب یک پارامترکوچک حساب کرد. هم چنین می توان یک روش سیستماتیک مبتنی بر رسم دیاگرام ها برای این‌کار ابداع‌کرد. دیاگرام های پدید آمده را دیاگرام های فاینمن [۳] می خوانیم. دراین درس این روش را یاد خواهیم‌گرفت. برای آنکه از پیچیدگی های غیر ضروری‌که مانع فهمیدن هسته اساسی این روش می شود پرهیزکنیم این روش اختلال را در چارچوب یک مثال ساده یاد خواهیم‌گرفت‌که درعین سادگی همه خواص حالت های پیچیده تری راکه بعداً با آنها سروکار خواهیم داشت دربردارد.

۲ تابع پارش برای مجموعه ای‌گسسته از متغیرها

فرض‌کنیدکه باکنشی سر وکار داریم‌که تابعی از متغیرهای‌گسسته $x_1, x_2, \cdots x_N$ است، یعنی

$$S[X] = S(x_1, x_2, \cdots x_N). \tag{۴}$$

در این صورت برای چنین‌کنشی داریم:

$$\langle x_i \rangle = \int DX x_i e^{-S(x_1,\cdots x_N)}. \tag{۵}$$

و یا

$$\langle x_i x_j \rangle = \int DX x_i x_j e^{-S(x_1,\cdots x_N)}. \tag{۶}$$

در اینجا نیز DX چنان تعریف شده است‌که

$$\int DX e^{-S(x_1,x_2,\cdots x_N)} = 1. \tag{۷}$$

[۳] Feynman Diagrams

شبیه همین عبارت را نیز می توانیم برای توابع سه نقطه ای، چهار نقطه ای و الا آخر بنویسیم. اما به جای این‌کار ها می توانیم یک تابع مولد [۴] به صورت زیر تعریف کنیم :

$$Z[J] := \int DXe^{-S[x]+\sum_i J_i x_i} \equiv \int DXe^{-S[x]+J^T X}. \quad (۸)$$

این تابع مولد بنا بر شرط بهنجارش (۷) دارای این خاصیت است‌که :

$$Z[J=0] = 1. \quad (۹)$$

خوبی این تابع مولد این است‌که با مشتق‌گیری از J_i ها می توانیم تمام توابع همبستگی را بدست آوریم. به عنوان مثال داریم:

$$\langle x_i \rangle = \frac{\partial}{\partial_{J_i}} Z(J) \mid_{J=0} \quad (۱۰)$$

و یا

$$\langle x_i x_j \rangle = \frac{\partial^2}{\partial_{J_i}\partial_{J_j}} Z(J) \mid_{J=0} . \quad (۱۱)$$

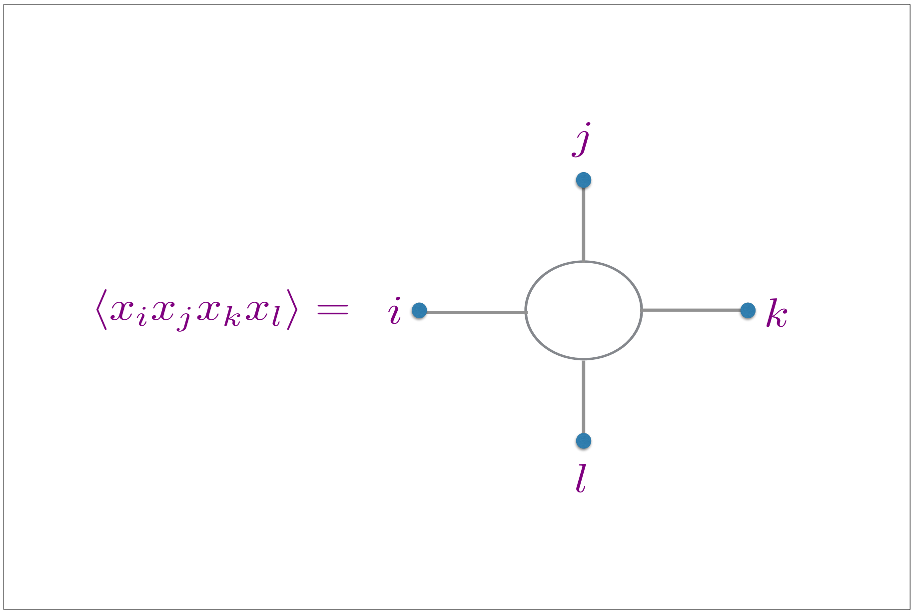
به عبارت دیگر تابع پارش تمام توابع چند نقطه ای را در بر دارد. اگر آن را بسط دهیم و از قرار داد جمع روی اندیس های تکراری نیز استفاده‌کنیم، خواهیم داشت:

$$Z[J] = 1 + \sum_i J_i \langle x_i \rangle + \frac{1}{2} J_i J_j \langle x_i x_j \rangle + \frac{1}{3!} J_i J_j J_k \langle x_i x_j x_k \rangle + \cdots \quad (۱۲)$$

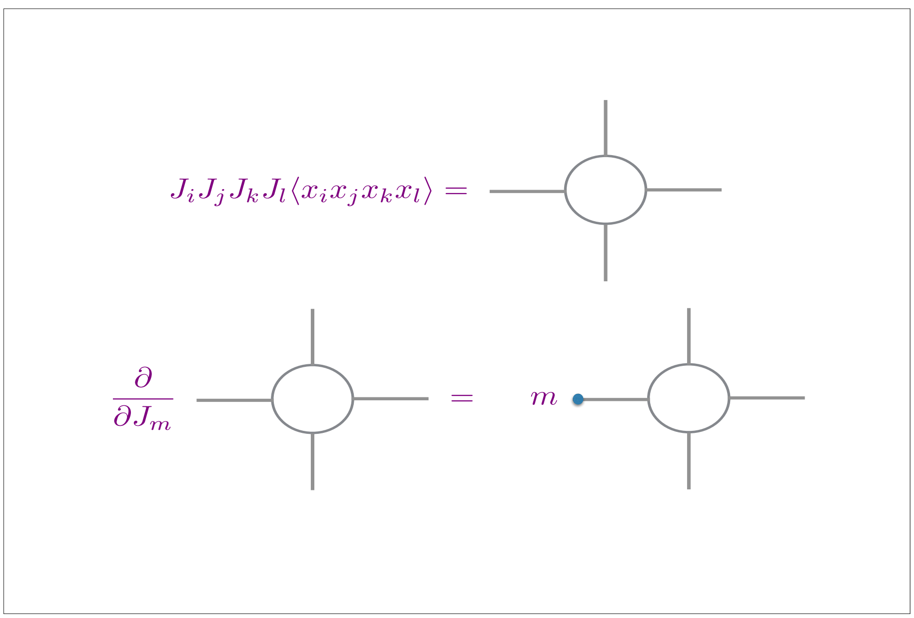
همانطورکه می بینید اگر J_i ها را مساوی صفر قرار دهیم تابع پارش برابر با یک می شود. مطالب فوق را با دیاگرام ها نیز می توان نشان داد. چنانچه خواهیم دید استفاده از دیاگرام ها بسیاری از محاسبات ما را در آینده آسان خواهدکرد. این دیاگرام ها همان چیزی هستندکه نهایتا در زمینه نظریه میدان دیاگرام های فاینمن [۵] خوانده می شوند. به عنوان مثال یک تابع چهارنقطه ای در شکل (۱) نشان داده شده است. هم چنین قرار می نهیم‌که وقتی روی یک اندیس جمع می بندیم نقطه سیاه نشان دهنده آن اندیس برداشته می شود، به همین ترتیب وقتی‌که نسبت به J_m مشتق می‌گیریم یک نقطه سیاه با برچسب m اضافه می شود، شکل (۲).

بنابراین عبارت (۱۲) به شکل شکل (۳) نشان داده می شود.

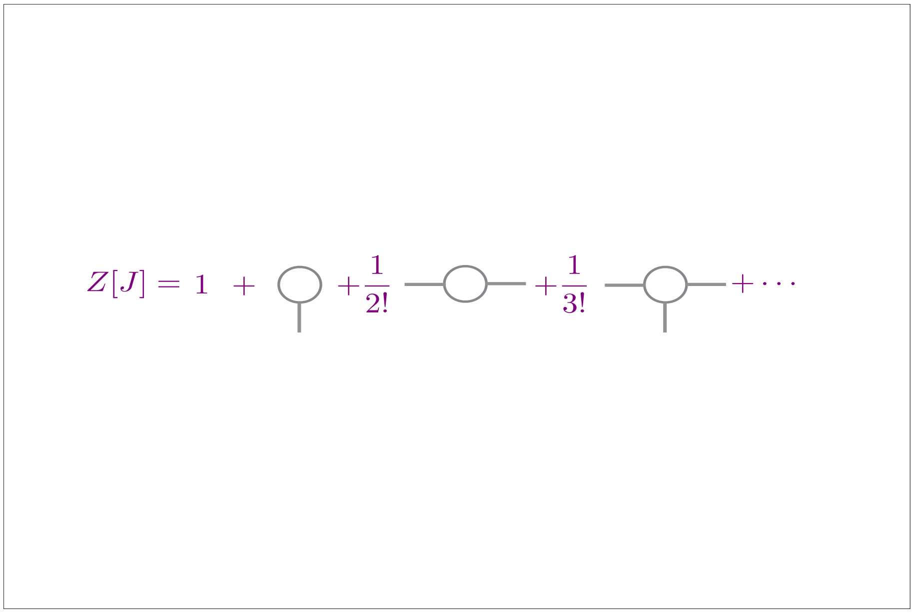
[۴] Generating Function
[۵] Feynman Diagrams



شکل ۱: یک تابع چهارنقطه ای.



شکل ۲: مطابق با قرار داد هرگاه روی یک اندیس جمع ببندیم نقطه سیاه آن اندیس برداشته می شود.



شکل ۳: عبارت (۱۲) به صورت دیاگرامی.

۳ انتگرال های‌گاووسی و قضیه ویک

می دانیم که انتگرال های زیر که درآنها a یک عدد مثبت است به سادگی قابل محاسبه هستند:

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \qquad \int dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+jx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{j^2}{2a}} \tag{۱۳}$$

با ضرب کردن تعداد N تا از این انتگرال ها برای مقادیر مختلف پارامترها می توان روابط زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned} &\int DX e^{-\frac{1}{2}(a_1{x_1}^2+a_2{x_2}^2+\cdots a_N{x_N}^2)} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{a_1a_2\cdots a_N}} \\ &\int DX e^{-\frac{1}{2}(a_1{x_1}^2+a_2{x_2}^2+\cdots a_N{x_N}^2)+j_1x_1+j_2x_2+\cdots j_Nx_N} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{a_1a_2\cdots a_N}} e^{\frac{j_1^2}{2a_1}+\frac{j_2^2}{2a_2}+\cdots\frac{j_N^2}{2a_N}} \end{aligned} \tag{۱۴}$$

که درآن $a_1, a_2, \cdots a_N$ همه مثبت هستند. می توان این روابط را به فرم ماتریسی نیز نوشت :

$$\int DX e^{-\frac{1}{2}X^tAX} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{detA}} \qquad \int DX e^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+J^tX} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{detA}} e^{\frac{1}{2}J^tA^{-1}J} \tag{۱۵}$$

حال حتی اگر ماتریس A قطری نیز نباشد (بلکه تنها یک ماتریس مثبت و متقارن باشد) باز هم این روابط صحیح هستند زیر می توان با یک ماتریس متعامد آن را قطری کرد و از روابط (14) استفاده کرد. لازم است ذکر کنیم که یک ماتریس متعامد اندازه انتگرال را تغییر نمی دهد زیرا قدرمطلق دترمینان آن برابر با یک است.

- این موضوع یعنی ثابت بودن اندازه انتگرال را تحت یک تبدیل متعامد ثابت کنید. به عبارت دیگر ثابت کنید اگر $X' = SX$ که در آن S یک ماتریس متعامد است، در این صورت $DX' = DX$.

رابطه (14) نقطه شروع ما برای بسط اختلالی است. البته DX را چنان انتخاب خواهیم کرد که تابع پارش بهنجار باشد. در نتیجه داریم:

$$Z_0[J] = \int DX e^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+J^tX} \tag{۱۶}$$

و

$$Z_0[0] = 1. \tag{۱۷}$$

این انتگرال را با $Z_0[J]$ نشان داده ایم زیرا شکل آن درست مثل یک تابع پارش است. می توان این تابع پارش را به عنوان یک تابع مولد برای یک توزیع احتمال گاووسی درنظر گرفت . اندیس 0 در Z_0 نشان دهنده آن است که توزیع احتمال مربوطه گاووسی است. این نوع انتگرال همان چیزی است که ما درمحاسبه تابع پارش یک میدان کوانتومی آزاد به آن برمی خوریم. با توجه به (۱۵) این تابع پارش را به طور دقیق می توانیم محاسبه کنیم:

$$Z_0[J] = e^{\frac{1}{2}J^tA^{-1}J} \tag{۱۸}$$

در شکل (؟؟) این تابع پارش و بسط آن نشان داده شده است.

برای بدست آوردن توابع چندنقطه ای می بایست از این تابع پارش نسبت به J_i ها مشتق بگیریم. عمل مشتق گیری را هم می توانیم به روش تحلیلی و هم به روش دیاگرامی انجام دهیم. شکل (؟؟) نشان می دهد که چگونه مشتق گیری از عبارت $Z_0[J]$ به صورت دیاگرامی انجام می شود.

- با توجه به اینکه $Z_0[J] = e^{\frac{1}{2}J\Delta J}$ و با مشتق گیری از این تابع پارش توابع دو نقطه ای و توابع چهارنقطه ای را بدست آورید. این کار را هم به روش تحلیلی و هم به روش دیاگراماتیک انجام دهید.

پاسخ این تمرین این است:

$$\begin{aligned} \langle x_k \rangle_0 &= 0 \qquad \langle x_i x_j \rangle_0 = \Delta_{ij} \\ \langle x_i x_j x_k x_l \rangle_0 &= \Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{ik}\Delta_{jl} + \Delta_{il}\Delta_{jk} \end{aligned} \tag{۱۹}$$

اگر به این تابع چهار نقطه ای دقت کنیم متوجه می شویم که مجموع چند جمله است که هرکدام از این جملات حاصل ضرب دو تابع دو نقطه ای است که از یک انتخاب از شاخص ها به صورت جفت جفت مثل $(i,j),(k,l)$ بدست می آید. این عمل را ادغام [۶] شاخص (i,j) و (k,l) می نامیم. مجموع تمام جملات در واقع مجموع تمام امکاناتی است که برای ادغام شاخص ها داریم . آنچه که برای تابع چهارنقطه ای گفتیم برای تمام توابع $2n$ نقطه ای صحیح است. این خاصیت یک خاصیت اساسی از تابع توزیع گاووسی است و به قضیه ویک [۷] معروف است. خواننده خود می تواند با استفاده از فرم تابع پارش گاووسی این قضیه را ثابت کند. تابع پارش آزاد یعنی $Z_0[J]$ در شکل (؟؟) نشان داده شده است. هرگاه این شکل را بسط دهیم، براحتی توابع چند نقطه ای و قضیه ویک را بدست می آوریم.

آنچه که در بالا یادگرفتیم ساده ترین نمودارهای فاینمن هستند. در حال حاضر که با انتگرال های گاووسی سروکار داریم این دیاگرام ها کاملا ساده هستند و تعدادی پاره خط مجزا تشکیل شده اند. وصل شدن پاره خط ها به هم و بوجود آمدن رأس در این دیاگرام ها ناشی از وجود جملات بالاتر از مرتبه دو است (یعنی وقتی که با انتگرال های غیرگاووسی سر و کار داشته باشیم).

[۶] Contraction
[۷] Wick's theorem

۴ انتگرال های غیرگاووسی

حال فرض کنید که تابع پارش ما گاووسی نیست بلکه به صورت زیر است

$$Z[J]=\int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)-V(X)+J^tX} \tag{۲۰}$$

که درآن $V(X)$ یک جمله بالاتر از مربعی است . باتوجه به کاربردی که برای این محاسبات درنظریه میدان کوانتمی داریم $V(X)$ را پتانسیل می نامیم. بازهم به این نکته توجه می کنیم که DX را علی الاصول می توان طوری بازتعریف کرد که $Z[J=0]=1$ باشد. ممکن است که ما به طور دقیق نتوانیم $Z[J]$ را محاسبه کنیم و سپس DX را بازتعریف کنیم اما همواره چنان که خواهیم دید در هر مرتبه از اختلال تقاضا می کنیم که $Z[J=0]$ برابر با یک باشد. با توجه به اینکه هر بار مشتق گیری نسبت به J_i باعث پایین آمدن یک x_i از عبارت نمایی و قرارگرفتن آن درون انتگرال می شود می توانیم بنویسیم:

$$Z[J]=e^{-V(\frac{\partial}{\partial J})}\int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+J^tX} \tag{۲۱}$$

و یا

$$Z[J]=e^{-V(\frac{\partial}{\partial J})}e^{\frac{1}{2}J\Delta J}. \tag{۲۲}$$

به این ترتیب و با بسط $e^{-V(\frac{\partial}{\partial J})}$ بر حسب قوای V می توان تابع پارش را هم به صورت تحلیلی و هم به صورت دیاگرامی تا مرتبه های دلخواه از پتانسیل بسط داد. به این روش در ضمیمه همین فصل به اختصار اشاره شده است. از آنجا که نهایتا داشتن تابع پارش معادل با داشتن تمامی توابع چندنقطه ای است می توانیم از همان ابتدا بگوییم که چگونه توابع چند نقطه ای را به صورت اختلالی حساب می کنیم. برای یک تابع n نقطه ای دلخواه می توانیم بنویسیم:

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle=\frac{\int DXx_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^{-\frac{1}{2}X^tAX-V(X)}}{\int DXe^{-\frac{1}{2}X^tAX-V(X)}} \tag{۲۳}$$

اما این متوسط را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle=\frac{\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^{-V(X)}\rangle_0}{\langle e^{-V(X)}\rangle_0} \tag{۲۴}$$

که در آن اندیس صفر برای توصیف متوسط کمیت ها برای تابع توزیع گاووسی به کار رفته است. به این ترتیب هر تابع چندنقطه ای را برای کنش غیرآزاد می توان بر حسب نسبت توابع چندنقطه ای برای کنش های آزاد یا کنش های گاووسی نوشت. از آنجا که با استفاده از قضیه ویک می

دانیم چگونه توابع چندنقطه ای را برای تابع توزیع گاووسی حساب کنیم، علی الاصول می توانیم تا هر رتبه ای که می خواهیم توابع چندنقطه ای را هم به روش تحلیلی و هم به روش دیاگراماتیک حساب کنیم.

بهترین کار این است که در قالب یک مثال که مثال مشهوری هم هست این شیوه را توضیح دهیم.

۱.۴ مثال : پتانسیل ϕ^4

در زیر این روش را برای پتانسیل

$$V(X) = \frac{\lambda}{4!}\sum_{i=1}^{N} x_k^4 \tag{۲۵}$$

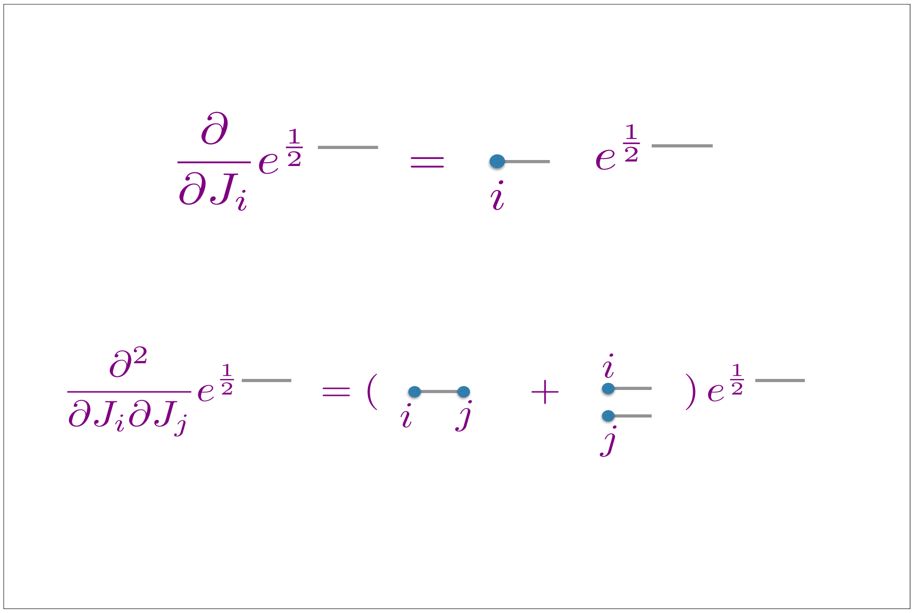
به کار می بریم. این پتانسیل به این دلیل پتانسیل ϕ^4 نامیده می شود که در حد پیوسته یادآور کنش برای یک میدان اسکالر ϕ با پتانسیلی $\int dx \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)$ است. فرض ما این است که پارامتر λ کوچک است و در هر نتیجه ای که بدست می آوریم قوای بالاتر این پارامتر تصحیحات کوچکی نسبت به قوای پایین تر آن هستند. به عنوان مثال تابع دو نقطه ا ی را دراین مدل حساب می کنیم. داریم:

$$\langle x_i x_j\rangle = \frac{\langle x_i x_j e^{\frac{\lambda}{4!}\sum_{k=1} N x_k^4}\rangle_0}{\langle e^{\frac{\lambda}{4!}\sum_{k=1} N x_k^4}\rangle_0} \equiv \frac{B}{C} \tag{۲۶}$$

که درآن B و C را برای نمایش صورت و مخرج کسر بکار برده ایم. با استفاده از قضیه ویک می توانیم مخرج و صورت را تا مرتبه یک از λ حساب کنیم. بدست می آوریم :

$$\begin{aligned} C &= \langle e^{\frac{\lambda}{4!}\sum_{k=1} N x_k^4}\rangle_0 \approx \langle 1 + \frac{\lambda}{4!}\sum_{k=1}^{N} x_k^4\rangle_0 = 1 + \frac{\lambda}{4!}\sum_{k=1}^{N}\langle x_k^4\rangle_0 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda}{4!}(3\Delta_{kk}^2) = 1 + \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda}{8}\Delta_{kk}^2 \end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$\begin{aligned} B &= \langle x_i x_j e^{\frac{\lambda}{4!}\sum_{k=1} N x_k^4}\rangle_0 \approx \langle x_i x_j + x_i x_j \frac{\lambda}{4!}\sum_{k=1}^{N} x_k^4\rangle_0 = \Delta_{ij} + \frac{\lambda}{4!}\sum_{k=1}^{N}\langle x_i x_j x_k^4\rangle_0 \\ &= \Delta_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda}{4!}(3\Delta_{kk}^2\Delta_{ij} + 12\Delta_{ik}\Delta_{jk}\Delta_{kk}) = \Delta_{ij} + \sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda}{8}\Delta_{ij}\Delta_{kk}^2 + \frac{\lambda}{2}\Delta_{ik}\Delta_{jk}\Delta_{kk}) \end{aligned} \tag{۲۸}$$



شکل ۴: در این شکل یک بار مشتق‌گیری و دو بار مشتق‌گیری از تابع پارش گاووسی نشان داده شده است. عبارت اکسپونانسیل چیزی نیست جز $e^{\frac{1}{2}J_i\Delta_{ij}J_j}$.

با استفاده از بسط دو جمله ای برای مخرج و ساده‌کردن نتیجه نهایتاً بدست می آوریم:

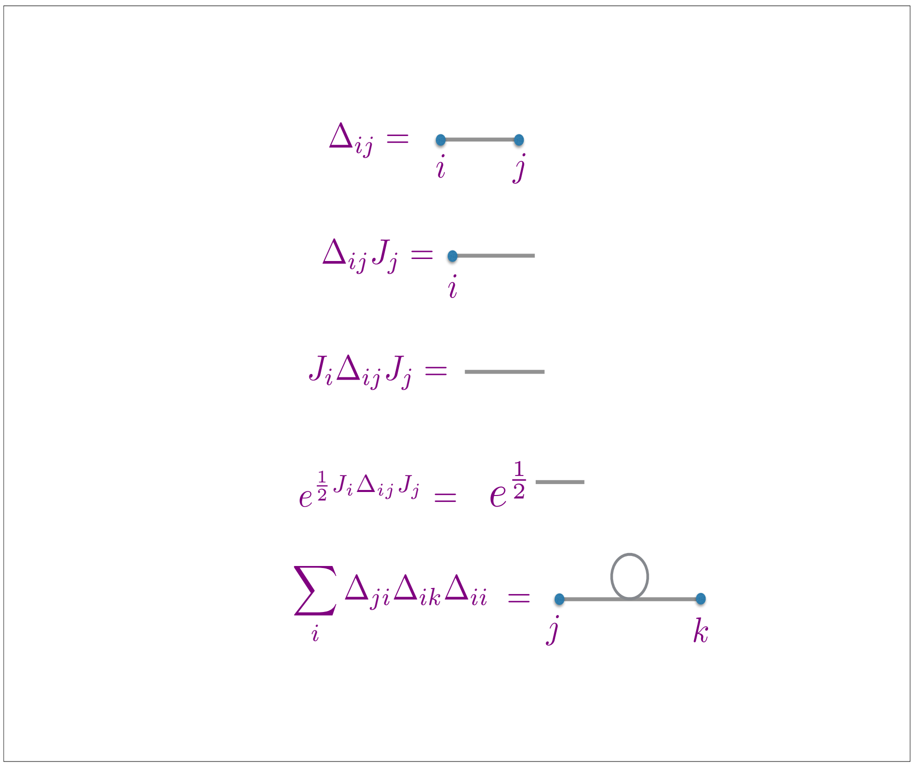
$$\langle x_i x_j \rangle = \Delta_{ij} + \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{N} \Delta_{ik}\Delta_{jk}\Delta_{kk} + O(\lambda^2) \qquad (۲۹)$$

این نتیجه تا مرتبه λ صحیح است.

آنچه‌که در بالا به روش تحلیلی انجام دادیم به روش ساده تر و لذت بخش تری توسط دیاگرام ها قابل انجام است. برای راهنمایی کافی است که خواننده به شکل (۴) نگاه‌کند. در این شکل و شکل (۵) مطابق با آنچه‌که در شکل های پیشین گفتیم نمونه هایی از تطابق عبارت های تحلیلی با شکل ها آمده است.

تمرین های زیر را با استفاده از دیاگرام ها حل کنید.

- تمرین: تابع چهارنقطه ای $\langle x_1x_2x_3x_4\rangle$ را تا تقریبِ λ بدست آورید.
- تمرین: تابع دو نقطه ای $\langle x_1x_2\rangle$ را تا تقریبِ λ^2 بدست آورید.



شکل ۵: نمونه هایی از دیاگرام ها و عبارت های تحلیلی متناظر با آنها

■ تمرین: تابع چهارنقطه ای $\langle x_1x_2x_3x_4\rangle$ را تا تقریبِ λ^2 بدست آورید.

■ تمرین: بجای پتانسیل (۲۵) پتانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$V(X) = \sum_i \frac{\lambda}{3!}\sum_{i=1}^{N} x_i^2. \tag{۳۰}$$

الف: توابع همبستگی $\langle x_ix_j\rangle$ را تا مرتبه دوم از λ حساب کنید.

ب: توابع همبستگی $\langle x_1x_2x_3x_4\rangle$ را تا مرتبه دوم از λ بدست آورید.

هرکس که یک بار محاسبات بالا را انجام داده باشد بزودی می فهمد که درآن ها نظمی هست که به کمک آن می توان محاسبات گسترده را بصورت خیلی خلاصه تری انجام داد و به نتیجه رسید. این نظم چنان است که به ما اجازه می دهد با کمک نمودارهای ساده و قواعد ساده ای توابع چند نقطه ای را تا هرمرتبه به صورت سیستماتیک بدست بیاوریم. آنچه که در بالا دیده ایم همان دیاگرام های فاینمن [۸] است که در یک زمینه خیلی ساده توضیح داده شده اند. با توجه به این قرارداد ها و قضیه ویک می توان یک مجموعه قواعدگرافیکی برای محاسبه توابع همبستگی برای هر پتانسیلی بدست آورد. این قواعدگرافیکی قواعد فاینمن خوانده می شوند وکمی دقت نشان می دهدکه فرم آنها برای پتانسیل $\frac{\lambda}{4!}\sum_{i=1}^{N} x_i^4$: به شکل زیر هستند:

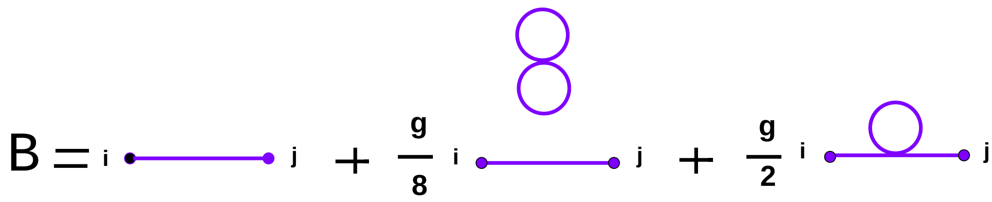
برای محاسبه یک تابع همبستگی به شکل $\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle$ در رتبه k به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

■ **یک:** تمام دیاگرام هایی‌که شامل n نقطه خارجی $i_1, i_2, \cdots i_n$ و k تا راس چهارپایی هستند وازنظر توپولوژیک بایکدیگر متفاوتند را رسم می‌کنیم. دیاگرام هایی‌که جزء خلاء به خلاء دارند را درنظر نمی‌گیریم. (به بخش بعدی، (یک خاصیت عمومی در نمودارهای فاینمن) توجه‌کنید.)

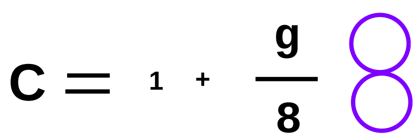
■ **دو:** برای هر دیاگرام یک ضریب ترکیبیاتی‌که ناشی از نحوه های مختلف ایجاد آن دیاگرام است درنظر می‌گیریم.

■ **سه:** به هر راس یک ضریب $\frac{\lambda}{4!}$ نسبت می دهیم.

[۸] Feynman Diagrams



شکل ۶: معادل گرافیک عبارت B از رابطه (۲۸)



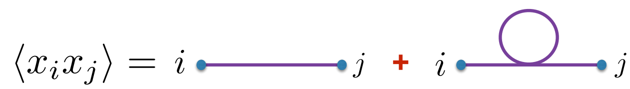
شکل ۷: معادل گرافیک عبارت C از رابطه (۲۷)

- **چهار:** به هرپاره خط که دوسرآن نقاط i, j هستند عبارت Δ_{ij} را نسبت می دهیم.

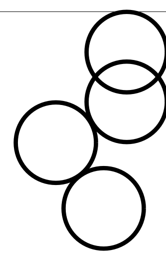
- **پنج:** برای هردیاگرام تمام فاکتورهایی را که درقسمت های قبلی نسبت داده ایم درهم ضرب می‌کنیم و روی هر نقطه داخلی مثل j جمع $\sum_{j=1}^{N}$ می زنیم.

باتوجه به این قواعد می توان تمام عبارت هایی را که دربخش پیشین بدست آورده ایم بازنویسی کنیم.

برای مثال روابط (28) ، (27) و (29) به ترتیب به صورت نمودارهای شکل های (۶) ، (۷) و (۸) درمی آیند:



شکل ۸: معادل گرافیک عبارت BC از رابطه (۲۹)



شکل ۹: نمونه ای از دیاگرام خلاء به خلاء :

۵ یک خاصیت عمومی در دیاگرام های فاینمن

دراین قسمت می خواهیم یک خاصیت عمومی نمودارهای فاینمن را ثابت کنیم. نخست باید دیاگرام خلاء به خلاء را تعریف کنیم. این نوع دیاگرام دیاگرامی است که هیچ نوع پای خارجی ندارد مثل شکل (9) . حال خاصیت مورد نظر را درقالب یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه یک : در یک تابع چند نقطه ای مثل $\langle x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \rangle$ دیاگرام های خلاء به خلاء حذف می شوند.

اثبات: می دانیم که

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \rangle = \frac{\langle x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} e^V \rangle_0}{\langle e^V \rangle_0} \qquad (۳۱)$$

که درآن V تابع پتانسیل است. حال صورت کسر را محاسبه می کنیم. داریم

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^N\rangle_0 \tag{۳۲}$$

حال عبارت $\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^N\rangle_0$ متناظر با دیاگرامی است که درآن n نقطه خارجی معین با نام های $i_1,i_2,\cdots i_n$ به پاهای داخلی ناشی از V ها به انواع و اقسام حالات وصل شده اند . یادآوری می کنیم که هر V بسته به نوع پتانسیل را می توان به صورت یک نقطه بدون شاخص تصور کرد که از آن تعدادی خط یا پا خارج شده است. قراراست که این پاها به نقاط خارجی و یا پاهای V های دیگر وصل شوند و درآخر سر تنها پاهای خارجی $i_1,i_2,\cdot i_n$ باقی بمانند. حال دقت می کنیم که عبارت های خلاء به خلاء از به هم پیوستن پاهای تعدادی از V ها بدست می آیند. برای آنکه یک دیاگرام خلاء به خلاء درست کنیم می بایست تعدادی مثلاً q تا از این V ها را انتخاب کنیم و پاهای آنها را به هم وصل کنیم. مجموعه تمام دیاگرام های خلاءبه خلاء ای که به این ترتیب بدست می آید را با چیزی نیست جز $\langle V^q\rangle_0$. بقیه V ها آنهایی هستند که به نحوی به یکدیگر و به پاهای خارجی وصل شده اند. مجموعه تمام این نوع دیاگرام ها را با $\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^{N-q}\rangle_0'$ نشان می دهیم که درآن علامت « پریم » به معنای آن است که این عبارت ها شامل هیچ نوع دیاگرام های خلاءبه خلاء ای نیستند. حال دقت می کنیم که برای انتخاب q تااز V ها $\frac{N!}{q!(N-q)!}$ تا انتخاب داریم. بنابراین می توانیم عبارت (32) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}
\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0 &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{q=0}^{N}\frac{N!}{q!(N-q)!}\langle V^q\rangle_0\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^{N-q}\rangle_0' \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\langle V^q\rangle_0\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^p\rangle_0' \\
&= \langle e^V\rangle_0\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0'
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

باتوجه به رابطه (31) بدست می آوریم که

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle=\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0' \tag{۳۴}$$

که درآن علامت « پریم » به معنای آن است که هیچ نوع دیاگرام خلاء به خلاء ای در بسط دیاگرام ها نمی بایست نگاه داشته شود.

این مثال ساده راه را برای گذار به متغیرهای پیوسته و در واقع به نظریه میدان بازکرده است. در بخش های آینده به این موضوع می پردازیم.

۶ انتگرال های‌گاووسی برای متغیرهای با شاخص پیوسته

آنچه راکه دربخش های پیشین‌گفتیم براحتی می توان به متغیرهای پیوسته و یا به میدان ها تعمیم داد. تنهاکاری‌که باید انجام دهیم آن است‌که با دقت‌گذار از تعداد محدودی متغیر به تعداد بی نهایت پیوسته از متغیررا انجام دهیم:

$$\begin{aligned} x_i &\longrightarrow \phi(x) \\ A_{ij} &\longrightarrow A(x,y) \\ \sum_i &\longrightarrow \int dx \\ \int DX &\longrightarrow \int D\phi. \end{aligned} \tag{۳۵}$$

بقیه‌کارکاملا سر راست است. فرض‌کنیدکه هدف ما محاسبه انتگرال زیراست :

$$Z_0[J] = \int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int dx \int dy \phi(x)A(x-y)\phi(y) + \int dx J(x)\phi(x)} \tag{۳۶}$$

دراین صورت با مراجعه به روابط مربوط به انتگرال های‌گاووسی دربخش اول خواهیم داشت :

$$Z_0[J] = Ce^{\frac{1}{2}\int dx \int dy J(x)\Delta(x-y)J(y)} \tag{۳۷}$$

که درآن C یک ثابت است‌که درتوابع همبستگی دخالت نمی‌کند و Δ معکوس ماتریس A است یعنی :

$$\int A(x-y)\Delta(y-z)dy = \delta(x-z) \tag{۳۸}$$

تحت این شرایط خواهیم داشت :

$$\langle \phi(x)\phi(y)\rangle_0 = \Delta(x-y) \tag{۳۹}$$

نکته یک: دربسیاری اوقات شکل تابع پارش ممکن است به صورت زیرباشد:

$$Z_0[J] = \int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int dx \phi(x) D\phi(x) + \int dx J(x)\phi(x)} \tag{۴۰}$$

که درآن D یک عملگر دیفرانسیل است . دراین شرایط همواره می توان از روی عملگر D ماتریس A را بدست آورد. درواقع $A(x-y)$ چیزی نیست جز هسته عملگردیفرانسیل D که مطابق با رابطه زیر تعریف می شود:

$$D_x\phi(x) =: \int A(x-y)\phi(y)dy \tag{۴۱}$$

و با توجه به تعریف فوق واضح است که

$$D_x\phi(x) = D_x \int \delta(x-y)\phi(y)dy = \int (D_x\delta(x-y))\phi(y) \tag{۴۲}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$A(x-y) := D_x\delta(x-y). \tag{۴۳}$$

نکته دو: تبدیل فوریه $A(x-y)$ را به شکل زیر می نویسیم :

$$A(x-y) = \int dqA(q)e^{iq(x-y)} \tag{۴۴}$$

دراین صورت خواننده می تواند براحتی ثابت کند که :

$$\Delta(x-y) = \int \Delta(q)e^{iq(x-y)} \tag{۴۵}$$

که درآن $\Delta(q) = \frac{1}{A(q)}$.

نکته ۳: هرگاه متغیرهای پیوسته ϕ روی فضازمان ۴ بعدی تعریف شده باشند کلیه اندازه های انتگرال ها و همینطور توابع دلتای دیراک متناظراً تعریف خواهند شد، همینطوربرای بعدهای دیگر.

- به عنوان مثال اگر درفضای توابع حقیقی یک متغیره داشته باشیم $D = \frac{d^22}{dx^2} + m^2$ آنگاه

$$A(x-y) = (\frac{d^2}{dx^2} + m^2)\frac{1}{2\pi}\int dqe^{iq(x-y)} = \frac{1}{2\pi}\int dq(-q^2+m^2)e^{iq(x-y} \tag{۴۶}$$

که از آن می توان براحتی نتیجه گرفت :

$$D(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int dq\frac{1}{(-q^2+m^2)}e^{iq(x-y} \tag{۴۷}$$

آنچه‌که در بالا گفتیم یک روش کلی برای گذار از متغیرهای گسسته به میدان هاست. در هر مورد البته می بایست به دقت تعداد و نوع میدان ها و برهم‌کنش آنها را مشخص کرد و قواعد فاینمن را بدست آورد. در زیر این‌کار را برای ساده ترین‌کنش یعنی‌کنشی‌که دارای یک میدان اسکالر است انجام می دهیم.

۷ قواعد فاینمن برای میدان اسکالر

در این بخش سعی می‌کنیم با توجه به آنچه‌که در بخش های پیشین یادگرفتیم، قواعد فاینمن را برای یک میدان اسکالر پیداکنیم. یک میدان اسکالر را با لاگرانژی زیر درنظر می‌گیریم:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \qquad (۴۸)$$

نخست تابع پارش آزاد را محاسبه می‌کنیم. ازآنجاکه دیدیم ثابت های پشت انتگرال مهم نیستند از نوشتن آنها خودداری می‌کنیم. ضمناً از این به بعد دردستگاه واحد هایی‌کار می‌کنیم‌که $\hbar = c = 1$ باشد.

بنابراین داریم :

$$Z_0[J] = \int D\phi e^{i\left(\int d^4x\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right) + \int d^4xJ(x)\phi(x)} \qquad (۴۹)$$

می توان با انتگرال‌گیری جزء به جزء رابطه بالا را به شکل زیرنوشت:

$$Z_0[J] = \int D\phi e^{i\left(-\int d^4x\frac{1}{2}\phi(\Box^2+m^2)\phi\right) + \int d^4xJ(x)\phi(x)} \qquad (۵۰)$$

انتگرال فوق یک انتگرال‌گاووسی بی نهایت بعدی است. هسته عملگر دیفرانسیلی $D = i\,(\Box^2 + m^2)$ عبارت است از:

$$A(x-y) = \int d^4q\; i(-q^2+m^2)e^{iq(x-y)} \qquad (۵۱)$$

و درنتیجه

$$\Delta(x-y) = \int d^4q\; \frac{i}{q^2-m^2}e^{iq(x-y)} \qquad (۵۲)$$

حال تمام اجزای لازم را برای دیاگرام های فاینمن داریم. می توانیم قواعد فاینمن را هم در فضای مختصات و هم در فضای تکانه بدست بیاوریم.

۱.۷ قواعد فاینمن در فضای مختصات

با توجه به این رابطه می توانیم قواعد فاینمن را برای محاسبه توابع همبستگی این نظریه میدان در فضای مختصات بنویسیم. این قواعد به شکل زیر هستند. برای محاسبه یک تابع همبستگی به شکل $\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle$ در رتبه k به ترتیب زیر عمل کنید:

- **یک:** تمام دیاگرام هایی که شامل n نقطه خارجی $x_1, x_2, \cdots x_n$ و k تا راس چهارپایی هستند وازنظر توپولوژیک بایکدیگر متفاوتند را رسم کنید. دیاگرام هایی که جزء خلاء به خلاء دارند را درنظر نگیرید.

- **دو:** برای هر دیاگرام یک ضریب ترکیبیاتی که ناشی از نحوه های مختلف ایجاد آن دیاگرام است درنظر بگیرید.

- **سه:** به هر راس یک ضریب $\frac{i\lambda}{4!}$ نسبت دهید.

- **چهار:** به هرپاره خط که دوسرآن نقاط x, y هستند عبارت $\Delta(x-y)$ را نسبت دهید.

- **پنج:** برای هردیاگرام تمام فاکتورهایی راکه درقسمت های قبلی نسبت داده اید درهم ضرب کنید و روی هر نقطه داخلی مثل x انتگرال $\int d^4x$ بگیرید.

به این ترتیب می توانیم درمشابهت با رابطه (29) تابع همبستگی دونقطه ای را تا مرتبه یک بر حسب λ به شکل زیر بنویسیم:

$$\langle \phi(x)\phi(y)\rangle = \Delta(x-y) + \frac{\lambda}{2}\Delta(0)\int dz\Delta(x-z)\Delta(z-y) + O(\lambda^2) \tag{۵۳}$$

■ تمرین: برای میدان اسکالر با جرم m و پتانسیل $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ تابع همبستگی $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$ را تا رتبه یک بر حسب λ بنویسید.

■ تمرین: برای میدان اسکالر با جرم m و پتانسیل $\frac{\lambda}{3!}\phi^3$ تابع همبستگی $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$ را تا رتبه دو بر حسب λ بنویسید.

■ تمرین: برای میدان اسکالر با جرم m و پتانسیل $\frac{\lambda}{3!}\phi^3$ تابع همبستگی $\langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle$ را تا رتبه سه بر حسب λ بنویسید.

۲.۷ قواعد فاینمن در فضای تکانه

تابع همبستگی $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle$ را درنظر بگیرید. می توانیم تک تک میدان ها را برحسب مود های فوریه آنها بنویسیم.
از آنجا که اندازه انتگرال $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ مکرراً درروابط آینده ظاهر می شود بهتر است که بجای آن نماد خلاصه $\overline{dq}$ را بکار ببریم. برای سادگی مراجعه این قرارداد را به طور صریح و به صورت یک رابطه جداگانه می نویسیم:

$$\overline{dq} \equiv \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tag{۵۴}$$

$$\phi(x) = \int \overline{dq} e^{iqx}\hat{\phi}(q) \qquad \hat{\phi}(q) = \int d^4x e^{-iqx}\phi(x) \tag{۵۵}$$

دراین صورت خواهیم داشت:

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle = \int \overline{dq_1 dq_2}\cdots\overline{dq_n} e^{i(q_1x_1+q_2x_2+\cdots q_nx_n)}\langle\hat{\phi}(q_1)\hat{\phi}(q_2)\cdots\hat{\phi}(q_n)\rangle \tag{۵۶}$$

تابع $\langle\hat{\phi}(q_1)\hat{\phi}(q_2)\cdots\hat{\phi}(q_n)\rangle$ را تابع همبستگی n نقطه ای در فضای تکانه می خوانیم.
رابطه بالا به ما نشان می دهد که چگونه از روی تابع همبستگی در فضای تکانه تابع همبستگی در فضای مختصات را بدست آوریم. هم چنین می توانیم با دردست داشتن تابع همبستگی در فضای مختصات تابع همبستگی در فضای تکانه را به ترتیب زیر بدست آوریم :

$$\langle\hat{\phi}(q_1)\hat{\phi}(q_2)\cdots\hat{\phi}(q_n)\rangle = \int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n e^{-i(q_1x_1+q_2x_2+\cdots q_nx_n)}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \tag{۵۷}$$

دراین قسمت می خواهیم قواعد فاینمن برای توابع همبستگی درفضای تکانه را بدست آوریم. نخست باید توجه کنیم که هرگاه میدان $\phi(x)$ حقیقی باشد تابع $\hat{\phi}(q)$ دارای خاصیت زیراست :

$$\hat{\phi}(-q) = \hat{\phi}^*(q) \tag{۵۸}$$

هم چنین توجه می کنیم که هرتابع همبستگی درفضای تکانه مساوی با صفراست مگراینکه مجموع چهارتکانه های درون آن مساوی با صفر باشد. برای اثبات این نکته به رابطه (56) توجه می کنیم. فرض برآن است که نظریه میدان ما دارای تقارن انتقالی است که با کنش داده شده این امر واضح است. درنتیجه خواهیم داشت :

$$\langle\phi(x_1+a)\phi(x_2+a)\cdots\phi(x_n+a)\rangle = \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \qquad \forall a \tag{۵۹}$$

بااستفاده از این خاصیت و رابطه (57) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\phi}(q_1)\hat{\phi}(q_2)\cdots\hat{\phi}(q_n)\rangle &= \int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n e^{-i(q_1x_1+q_2x_2+\cdots q_nx_n)}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \\
&= \int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n e^{-i(q_1x_1+q_2x_2+\cdots q_nx_n)}\langle\phi(x_1+a)\phi(x_2+a)\cdots\phi(x_n+a)\rangle \\
&= \int d^4x'_1 d^4x'_2\cdots d^4x'_n e^{-i(q_1(x'_1-a)+q_2(x'_2-a)+\cdots q_n(x'_n-a))}\langle\phi(x'_1)\phi(x'_2)\cdots\phi(x'_n)\rangle \\
&= \langle\hat{\phi}(q_1)\hat{\phi}(q_2)\cdots\hat{\phi}(q_n)\rangle e^{i(q_1+q_2+\cdots q_n)a}
\end{aligned} \tag{۶۰}$$

بنابراین بدست آورده ایم:

$$\langle\hat{\phi}(q_1)\hat{\phi}(q_2)\cdots\hat{\phi}(q_n)\rangle(1-e^{i(q_1+q_2+\cdots q_n)a}) = 0 \tag{۶۱}$$

که به معنای آن است که تابع همبستگی درفضای تکانه فقط وقتی غیر صفراست که مجموعه تکانه های آن برابر باصفرباشد.
بهترین راه برای یافتن قواعد فاینمن درفضای تکانه آن است که چند مثال مشخص از توابع همبستگی را درفضای مختصات درنظر بگیریم و با استفاده از رابطه (57) توابع همبستگی متناظر را درفضای تکانه بدست بیاوریم. برای راحتی از یک قرارداد درنمادگذاری استفاده‌می کنیم و آن اینکه همواره منظور ما از dq عبارت است از$\frac{1}{(2\pi)^4}d^4q$. از آنجا که از این قرارداد درآینده مکرراً استفاده می کنیم در زیر آن را به صورت یک رابطه مستقل می نویسیم:

$$dq := \frac{1}{(2\pi)^4}d^4q \tag{۶۲}$$

درمثال های زیر میدان کلاین گوردون را درنظر می گیریم و انتشارگر آن را در فضای حقیقی با $\Delta(x-y)$ و درفضای تکانه با $\Delta(q)$ نشان می دهیم . برای این میدان داریم $\Delta(q)=\frac{i}{q^2-m^2}$. یادآوری می کنیم که :

$$\Delta(x)=\int \overline{dq}e^{iqx}\Delta(q) \qquad \Delta(q)=\int d^4xe^{-iqx}\Delta(x) \tag{۶۳}$$

البته شکل کلی قوانین فاینمن مستقل از نوع انتشارگری است که با آن آغازکرده ایم.

- تمرین: برای میدان اسکالر با جرم m و پتانسیل $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ تابع همبستگی $\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\rangle$ را تا رتبه یک بر حسب λ بنویسید. که در آن $\tilde{\phi}$ تبدیل فوریه ϕ است.

- تمرین: برای میدان اسکالر با جرم m و پتانسیل $\frac{\lambda}{3!}\phi^3$ تابع همبستگی $\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\rangle$ را تا رتبه دو بر حسب λ بنویسید.

- تمرین: برای میدان اسکالر با جرم m و پتانسیل $\frac{\lambda}{3!}\phi^3$ تابع همبستگی $\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\tilde{\phi}(k_3)\rangle$ را تا رتبه سه بر حسب λ بنویسید.