درس مکانیک کوانتومی – مروری بر مکانیک کلاسیک

تمرین های سری اول – موعد تحویل ۵ اسفند ماه ۱۳۸۵

۱ – یک پاندول مرکب مطابق شکل ۱ نظر بگیرید. لاگرانژی این سیستم را بنوسید. معادلات حرکت را بدست آورید.(لازم نیست این معادلات را حل کنید.)

---

۲ – سیستمی متشکل از دو نوسانگر هارمونیک مطابق شکل ۲ در نظر بگیرید. طول نوسانگرها در حالت تعادل برابر با a و ثابت فنرها برابر با k است. جابجایی هر نوسانگر از نقطه تعادلش را با متغیر x نشان می دهیم. لاگرانژی این سیستم را بنویسید. معادلات حرکت را بدست آورید. تکانه های مزدوج با x_1 و x_2 را بدست آورید و هامیلتونی را بنویسید. معادلات هامیلتونی را بدست آورده و آن ها را برای شرایط اولیه دلخواه حل کنید.

---

۳ – ذره ای با جرم m و بار الکتریکی q دریک میدان مغناطیسی $\vec{B} = B_0\hat{z}$ قرار دارد.
لاگرانژی این سیستم را بنویسید. معادلات حرکت را بدست آورید. تکانه های مزدوج با x و y و z را بدست آورید و هامیلتونی را بنویسید. معادلات هامیلتونی را بدست آورده و آن ها را برای شرایط اولیه دلخواه حل کنید.

---

۴ – ذره ای در یک پتانسیل حرکت می کند. این پتانسیل دارای یک تقارن مارپیچی است به این معنا که به ازای هر r, θ, z

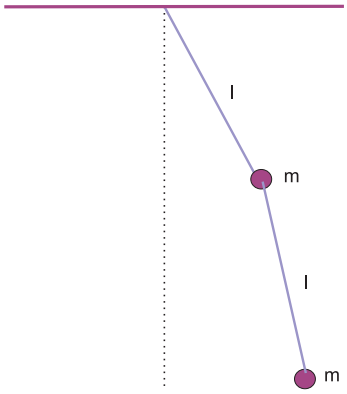
$$V(\rho, \theta, z) = V(\rho, \theta + \alpha, z + h\alpha), \quad \forall, \alpha. \tag{1}$$

در رابطه بالا h یک مقدار ثابت است که به اصطلاح پیچ مارپیچ را تعیین می کند.
با استفاده از این تقارن کمیتی را که ثابت حرکت است پیدا کنید.

---

۵ – کروشه های پوآسون زیر را محاسبه کنید:

$$\{L_i, x_j\}, \qquad \{L_i, p_j\}$$



شکل ۱: یک پاندول مرکب. برای حل مسئله ۱ می بایست مختصات مناسب برای این پاندول را بیابید.

$$\begin{aligned} &\{L_i, L_j\}, \qquad &&\{L^2, L_i\} \\ &\{L_i, r^2\}, \qquad &&\{L_i, p^2\}. \end{aligned} \tag{2}$$

دراین رابطه ها $L^2 = \sum_{i=1}^{3} L_i L_i, \quad r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i, \quad p^2 = \sum_{i=1}^{3} p_i p_i$.

---

۶ – هامیلتونی یک ذره که در یک پتانسیل شعاعی حرکت می کند به شکل زیراست:

$$H = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m} + V(r). \tag{3}$$

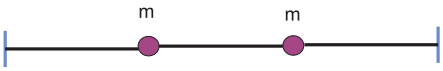
دقت کنید که پتانسیل $V(r)$ دارای تقارن دورانی است و فقط به اندازه r بستگی دارد.

الف: نشان دهید که

$$\begin{aligned} \{L_i, H\} &= 0 \\ \{L^2, H\} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ب: نشان دهید که هامیلتونی را به شکل زیر نیز می توان نوشت:

$$H = \frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})^2}{2mr^2} + V(r). \tag{5}$$



شکل ۲: دو نوسانگر جفت شده به هم.

۷ — در یک بعد دو ذره مطابق با هامیلتونی زیر باهم برهم کنش می کنند:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(x_1 - x_2) \tag{6}$$

متغیرهای دینامیکی ای که این سیستم را توصیف می کند عبارتند از $x_1,\ x_2$ مکان های ذره اول و دوم و $p_1\ ,\ p_2$ که تکانه های این دو ذره هستند.
الف: دو مختصه x و X که به ترتیب مختصه نسبی و مختصه مرکز جرم هستند به صورت زیر تعریف می شوند:

$$x := x_1 - x_2, \qquad X := \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

تکانه های مزدوج این دو مختصه که آنها را با p و P نشان می دهیم بدست آورید و آنها را معنا کنید. (راهنمایی: از روابط کروشه پوآسون استفاده کنید.)

ب: هامیلتونی را برحسب این مختصات و تکانه های جدید نوشته و معادلات حرکت را بدست آورید. نشان دهید که در این مختصات جدید مسئله دو جسمی فوق عملاً به یک مسئله یک جسمی تبدیل می شود.

---

۸ — مسئله ۲ را به N نوسانگر جفت شده تعمیم دهید. طول نوسانگرها در حالت تعادل برابر با a و ثابت فنرها برابر با k است. جابجایی نوسانگر n—ام از محل تعادلش را با x_n نشان می دهیم. لاگرانژی این سیستم را بنویسید. معادلات حرکت را بدست آورید. تکانه مزدوج با x_n را بدست آورید و هامیلتونی را بنویسید. معادلات هامیلتونی را بدست آورده و آن ها را برای شرایط اولیه دلخواه حل کنید. (راهنمایی: هامیلتونی را به شکل ماتریسی $H = \frac{1}{2m}P^tP + \frac{k}{2}X^tSX$ بنویسید و سعی کنید با انتخاب مختصات و تکانه های کانونیک جدید، ماتریس S را قطری کنید.)