تمرین سری هفتم درس مکانیک کوانتومی

دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

موعد تحویل : ۲۴ خرداد ماه ۱۳۸۶

۱ – فرض کنید که A و B دوعملگردلخواه هستند به نحوی که $[A,B]$ متناسب با عملگرواحد باشد. اصطلاحاً می گوییم $[A,B]$ یک عدد باشد.

الف: نشان دهید که

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{1}$$

راهنمایی: عملگر $U(\lambda) := e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)}$ را درنظربگیرید مشتق آن را نسبت به λ حساب کنید ونشان دهید که

$$\frac{d}{d\lambda} U(\lambda) = \lambda [A,B] U(\lambda). \tag{2}$$

سپس این معادله را حل کنید.

ب: حال فرض کنید که $[A,B]$ عدد نیست بلکه $[A,[A,B]]$ و $[B,[A,B]]$ عدد هستند. باتکرار مراحل بالا نشان دهید که

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]}. \tag{3}$$

---

۲ – درلحظه صفریک نوسانگر به جرم m وفرکانسِ ω درحالتِ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ قراردارد.
الف: هرگاه مقادیر متوسط یک کمیت A را برحسب زمان با $\langle A\rangle_t$ نشان دهیم کمیت های زیرراحساب کنید:

$$\langle X\rangle_t, \qquad \langle P\rangle_t, \qquad \langle H\rangle_t, \qquad \langle K\rangle_t, \qquad \langle V\rangle_t, \tag{4}$$

که درآن K انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل ذره است.

---

۳ — یک نوسانگرناهماهنگ با هامیلتونی

$$H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}X^2 + \lambda X^4 \tag{5}$$

داده شده است که درآن λ پارامترکوچکی است. حالت های $|n\rangle$ ویژه حالت انرژی این نوسانگرنیستند. ولی می توان متوسط انرژی نوسانگررا برای این حالت ها حساب کرد. این متوسط ها را حساب کنید.

---

۴ — ذره ای به جرم m درپتانسیل زیرقراردارد

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2 & x >\geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

الف — ویژه تابع ها و ویژه مقدارهای انرژی را پیداکنید.

ب — درهرویژه حالت انرژی مقدار متوسط مکان ذره و هم چنین متوسط تکانه ذره یعنی $\sqrt{\langle X^2\rangle}$ و $\sqrt{\langle P^2\rangle}$ را محاسبه کنید.

۵— دو نوسانگرجفت شده به هم باهامیلتونی زیرتوصیف می شوند:

$$H = \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}P_2^2 + \frac{1}{2}X_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2(X_1 - X_2)^2. \tag{7}$$

الف: وقتی که سیستم درحالت پایه انرژی خود است مقدارمتوسط انرژی هرنوسانگر را جداگانه حساب کنید. منظورازانرژی نوسانگرشماره یک عبارت $H_1 := \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2}X_1^2$ است باتعریف مشابهی برای نوسانگردوم.

ب : تابع موج حالت پایه رادرفضای مختصات بدست آورید.

ج : معادلات حرکت هایزنبرگ را برای این سیستم حل کنید.

د: حال فرض کنید که درلحظه صفر سیستم درحالتی است که

$$\langle X_1\rangle = 0, \qquad \langle X_2\rangle = A, \qquad \langle P_1\rangle = 0, \qquad \langle P_2\rangle = 0. \tag{8}$$

این حالت متناظرباحالت کلاسیکی است که درآن یکی ازذرات را به اندازه A ازمحل تعادل خود منحرف کرده ایم. تعیین کنید که این متوسط ها درطول زمان چگونه تغییرمی کنند. راه حل خود را بامقایسه با حالت کلاسیک تعبیرکنید.

---

۶ — یک نوسانگر به جرم m وفرکانس ω دردمای T قرارگرفته است. مطابق با اصل بولتزمان درمکانیک آماری، حالت این نوسانگرباماتریس چگالیِ زیرتوصیف می شود:

$$\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta H} \tag{9}$$

که درآن $\beta = \frac{1}{kT}$ و k ثابت بولتزمان است.
الف: ثابت Z را حساب کنید.
ب: متوسط انرژی نوسانگررا حساب کنید.
ج: متوسط انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر را حساب کنید.

---

۷ — نشان دهید که حالت های همدوسی که درروی هر کانتوربسته دلخواه درصفحه مختلط که مبدأ را احاطه می کند، یک پایه تشکیل می دهند. برای این منظورثابت کنید که هرحالت پایه $|n\rangle$ را می توان به شکل زیرنوشت:

$$\frac{\sqrt{n!}}{2\pi i}\oint_C z^{-n}e^{\frac{1}{2}|z|^2}|z\rangle dz \tag{10}$$

که درآن C یک کانتوربسته است که مبدأ را دربرمی گیرد.

---

۸ — حالت های همدوس حالت هایی هستند که کمترین عدم تعین ممکن را درمختصات مکان وتکانه دارند. دراین تمرین می خواهیم عدم تعین نسبی درانرژی این حالت هاراحساب کنیم. بنابراین فرض کنید که $|z\rangle$ یک حالت همدوس است و کمیت زیرراحساب کنید:

$$\frac{\langle z|H^2|z\rangle - \langle z|H|z\rangle^2}{\langle z|H|z\rangle^2}. \tag{11}$$
