درس بیست و چهارم: فوتون و میدان الکترومغناطیسی

۱ مقدمه

اصل موضوع اولیه پلانک که مکانیک کوانتومی درسال ۱۹۰۰ با آن متولد شده است بیان می کند که اتم وقتی که با نور برهم کنش می کند تنها می تواند انرژی نور را به صورت مقادیر گسسته و معین جذب ویاساطع کند. بنابر فرض پلانک نور تنها هنگام برهم کنش با ماده است که انرژی خود را به صورت بسته های کوچک با ماده مبادله می کند و درمواقعی که به صورت آزاد انتشار پیدامی کند چیزی جز همان امواج الکترومغناطیسی که تابع معادلات ماکسول هستند نیست. پلانک بدین وسیله توانست کهیک توصیف نظری دقیق برای منحنی تابش جسم سیاه فراهم کند. این که چگونه نور می تواند هنگام انتشار، رفتارپیوستهی موجی داشته باشد وتوسط معادلات ماکسول توصیف شود ولی موقع جذب یا گسیل از ماده، رفتار کوانتومی و گسسته داشته باشد سوالی است که درابتدای مکانیک کوانتومی بدون پاسخ باقی ماند. ۵ سال بعد انشتین برای توصیف اثر فوتوالکتریک فرض کوانتش نور را نه تنها به جذب و گسیل آن بلکه به انتشارآن نیز تعمیم داد. بنابرفرض وی نور حتی در موقع انتشار به صورت بارشی از بسته های کوچک انرژی که آنهارافوتون می نامیم، منتشرمی شود. برای توصیف اثر فوتوالکتریک کافی است که فرض کنیم فوتون مثل یک گوی یا ذره با انرژی و تکانه خاص باالکترون برخورد می کند و نتیجه این برخورد نیز نیز توسط قوانین مکانیک نیوتن مشخص می شود. این که چرا نور ازیک طرف مثل بارشی از ذرات یا فوتون هاست و ازطرف دیگر مثل امواج پیوسته ای است که انتشارآنها تابع معادلات ماکسول است نیز سوالی است که درآن هنگام پاسخی برای آن وجود نداشت.

فیزیکدان ها تاسال های ۱۹۲۷ این تصویر مخلوط از رفتار ماده و تابش را برای توصیف انواع پدیده های مربوط بهبرهم کنش ماده و تابش به کاربردند. این که چرا لفظ مخلوط را برای این تصویربکاربرده ایم ناشی از این است که رفتارالکترون هاو ذرات مادی دریک چارچوب نظری ی موافق با تجربه و بدون تناقض (ولی نه الزاماً کامل) به اسم مکانیک کوانتومی توصیف می شد. دراین چارچوب حالت الکترون یا یک ذره مادی توسط یک بردار دریک فضای هیلبرت مشخص می شود. این حالت توسط یک عملگر هامیلتونی که کوانتومی شدهی هامیلتونی کلاسیک است تحول پیدامی کند. اندازه گیری روی این حالت نیز مقادیر مختلف با احتمالات معین را بدست می دهد که تمامی این احتمالات قابل محاسبه دقیق هستند و همه پیش بینی ها نیز بانتایج تجربی موافقت دارند.

اما فوتون چیست؟ فرض می کنیم که فوتون ذره ای است که باسرعت نور حرکت می کند و تکانه $\hbar\mathbf{k}$ و انرژی $\hbar\omega$ دارد. بارانی از این فوتون ها به شرط آنکه تعداد آنها فوق العاده زیاد باشد مثل یک موج الکترومغناطیسی پیوسته با طول موج $\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$ و فرکانس ω است. اما سوالهای بسیارزیادی درپس این تصویربدون پاسخ باقی می مانند:

— چه ربطی بین این فوتون ها و میدان الکترومغناطیسی وجود دارد؟ چرارفتارجمعی فوتون ها با معادلات ماکسول توصیف می شود، اما به صورت فردی مثل گوی های کوچک تابع قوانین نیوتن هستند؟ آیا فوتون یک بسته موج الکترومغناطیسی است؟ آیا امواجی که این بسته موج را می سازند تابع معادلات ماکسول و خود بسته موج به عنوان یک موجود جایگزیده مثل یک گوی و یک ذره است؟ اگر چنین است مقدار گسترش فضایی آن چقدراست؟

آیا فوتون نیز با یک بردارحالت در یک فضای هیلبرت توصیف می شود؟ اگرچنین است این حالت چگونه و با چه هامیلتونی ای تحول می یابد؟ آیا می توان درست مثل ذرات منفرد برای فوتون هانیز یک هامیلتونی نوشت که ویژه حالت های آن فوتون های با انرژی های مشخص باشند؟ اگر چنین است میدان های الکتریکی و مغناطیسی چه جایگاهی دارند و معادلات ماکسول چه چیزی از فوتون را توصیف می کنند.

دراین درس می خواهیم تصویر درستی از فوتون ارایه دهیم. این تصویر ناشی از تلفیق صحیح مکانیک کوانتومی و میدان الکترومغناطیسی است. بجای آنکه از یک دیدگاه اصل موضوعی برای میدان های کوانتومی شروع کنیم سعی می کنیم این تصویر را پله پله به کمک هم بسازیم.
اگر قراراست مکانیک کوانتومی توصیف کننده همه پدیده های میکروسکوپی باشد، می بایست اصول آن را برای توصیف رفتار فوتون ها نیز بکاربریم. درآزمایشگاه می توانیم فوتون ها را با آشکارسازها و شمارنده هاو پولاروید ها آشکارکنیم. این دستگاه ها می توانند تکانه، انرژی و قطبش فوتون ها را اندازه گیری کنند. بین انرژی ω و تکانه فوتون k رابطه $omega = kc$ وجود دارد. بنابراین به عنوان اولین قدم می توانیم فرض کنیم که حالت یک فوتون با تکانهٔ آن یعنی بردارِ $\mathbf{k}$ و قطبش آن یعنی بردار $\mathbf{e}$ مشخص می شود. بردار قطبش عمود بر بردارانتشاراست. هرگاه برای یک بردارانتشار معینِ $\mathbf{k}$ دو بردار یکه قطبشِ عمود برآن مثلِ e_1 و e_2 تعریف کنیم کلی ترین بردار قطبش می تواند ترکیبی خطی و مختلط ازe_1 و e_2 باشد. بنابراین به عنوان بردارهای پایه فضای حالت های یک فوتون می توانیم بردارهای $\lambda = 1,2 \quad |\mathbf{k},\lambda\rangle$ را انتخاب کنیم. فرض می کنیم که تکانه ها نیز گسسته هستند. بنابراین، این بردارهای حالت در روابط تعامد و کامل بودنِ زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} &\langle k,\lambda|k',\lambda'\rangle = \delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}, \\ &\sum_\lambda\sum_k |k,\lambda\rangle\langle k,\lambda| = I. \end{aligned} \tag{1}$$

هرگاه با چندین فوتون سروکارداشته باشیم می توانیم بردارهای پایه ای مثل

$$|\Psi\rangle = |k_1,\lambda_1;k_2,\lambda_2;k_3,\lambda_3;\cdots;k_N,\lambda_N\rangle \tag{2}$$

برای توصیف آنها بکار ببریم. اماشاید این توصیف مفید نباشد زیرا ممکن است که از یک طول موج و قطبش چندین فوتون مثلاً n تا داشته باشیم. دراین صورت نمی توانیم روی هرکدام ازانها برچسب معینی قرارداده و آنها را بابرچسب هایشان مشخص کنیم مثلاً بگوییم فوتون شماره یک، فوتون شماره دو تا فوتون شماره n، زیرا فوتون ها ذرات یکسانی هستند و اگر تابع

قواعد مکانیک کوانتومی باشند تمیزناپذیرخواهند بود. بنابراین شاید حالت فوتون ها را به صورت زیر بتوانیم بهترمشخص کنیم. فرض کنید که تعداد فوتون های با تکانه $\mathbf{k}_i$ و قطبشِ λ_i را با n_i نشان دهیم. دراین صورت می توانیم یک حالت کلی را به شکل زیرنشان دهیم

$$|\Psi\rangle = |n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots\rangle \tag{3}$$

این حالت دارای n_1 فوتون با تکانه $\mathbf{k}_1$ و قطبش λ_i است والی آخر.
تاکنون جایگاه فوتون ها را درمکانیک کوانتومی مشخص کرده ایم. فوتون نیز مثل یک ذره با یک بردار حالت مشخص می شود. برای یک فوتون مشاهده پذیرهایی که به طور همزمان قابل اندازه گیری هستند عبارتند از تکانه و قطبش. حال سوال این است که جایگاه میدان الکترومغناطیسی دراین تصویرکجاست؟
برای این کار به مکانیک کوانتومی ذرات مادی مثل الکترون ها بازمی گردیم.
می دانیم که حالت یک ذره مثل الکترون با یک بردار مثلِ $|\psi\rangle$ دریک فضای هیلبرت توصیف می شود و مکان و تکانه آن ذره مشاهده پذیرهایی هستند که با عملگرهای X و P متناظرهستند. ماتنها می توانیم از مکان یا تکانه متوسط یک ذره درحالت فوق صحبت کنیم که با مقادیر متوسطِ $\langle\psi|X|\psi\rangle$ و $\langle\psi|P|\psi\rangle$ مشخص می شوند. هم چنین می توانیم این مشاهده پذیرها را درحالت فوق اندازه گیری کنیم و بااحتمالات معین مقادیری بدست آوریم. بنابراین شاید درست آن است که بگوییم میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی نیز مشاهده پذیرهایی هستند که با عملگرهایی مثل $\hat{\mathbf{E}}(x)$ و $\hat{\mathbf{B}}(x)$ مشخص می شوند و ما تنها می توانیم از مقدارمتوسط یک میدان دریک نقطه و نه مقداردقیق آن صحبت کنیم. بنابراین مقدارمتوسط میدان الکتریکی در نقطه x درحالتِ $|\Psi\rangle$ برابراست با

$$\langle E(x,t)\rangle_\Psi := \langle\Psi(t)|\hat{E}(x)|\Psi(t)\rangle. \tag{4}$$

به نظرمی رسد که به تصویر درست و جامعی از تابش می رسیم که تفاوت اساسی با آنچه که درمورد ذرات داریم ندارد. دراین تصویر حالت میدان یا نور با بردارهایی مثلِ 3 و یا به عبارت دقیق تر با ترکیبی خطی ازآنها داده می شود که نشان دهنده این است که چه تعداد فوتون و با چه مشخصاتی در فضای مورد نظر (دورن اتاق، فضای آزاد، درون یک کاواک الکترومغناطیسی یا درون ماده) وجود دارد. میدان الکترومغناطیسی مشاهده پذیرهاهستند که می توان مقدارمتوسط آنها و یا احتمال اندازه گیری مقدارمشخصی ازآنها را درحالت های معین حساب کرد. به همین دلیل به‌ازای هر نقطهِ x می توان عملگرهای $\hat{\mathbf{E}}(x)$ و $\hat{\mathbf{B}}(x)$ را تعریف کرد. ازآنجا که این عملگرها به ازای هرنقطه از فضا تعریف می شوند به آنها یک عملگرهای میدانی یا *Field Operator* می گوییم. مطابق با قضیه اهرنفست انتظار داریم که مقادیر متوسط یعنی کمیت های

$$\langle E(x,t)\rangle := \langle\Psi(t)|\hat{E}(x)|\Psi(t)\rangle, \qquad \langle B(x,t)\rangle := \langle\Psi(t)|\hat{B}(x)|\Psi(t)\rangle, \tag{5}$$

درمعادلات ماکسول صدق می کنند، یعنی

$$\nabla\langle E(x,t)\rangle = 4\pi\rho(x,t),$$
$$\nabla\langle B(x,t)\rangle = 0,$$

$$\nabla \times \langle E(x,t)\rangle = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle B(x,t)\rangle,$$
$$\nabla \times \langle B(x,t)\rangle = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle E(x,t)\rangle + \frac{4\pi}{c}J(x,t). \tag{6}$$

دراین رابطه ρ و J مقادیر متوسط چگالی بار و جریان هستند.
هم چنین می دانیم که عملگرهای میدان درتصویر هایزنبرگ در همان معادلات کلاسیک، دراینجا معادلات ماکسول، صدق می کنند:

$$\nabla \hat{E}(x,t) = 4\pi\rho(x,t),$$
$$\nabla \hat{B}(x,t) = 0,$$
$$\nabla \times \hat{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{B}(x,t),$$
$$\nabla \times \hat{B}(x,t)\rangle = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{E}(x,t) + \frac{4\pi}{c}J(x,t). \tag{7}$$

دقت کنید که عملگرهای بالا عملگرهای هایزنبرگ هستند ولی برای سادگی ازنوشتن اندیسِ H برای آنها صرف نظرکرده ایم. به عبارت دیگر

$$\hat{E}(x,t) := \hat{E}_H(x,t) := U^\dagger(t)\hat{E}(x)U(t), \qquad \hat{B}(x,t) := \hat{B}_H(x,t) := U^\dagger(t)\hat{B}(x)U(t). \tag{8}$$

به تدریج تصویرروشنی از رابطه فوتون ها با میدان الکترومغناطیسی بدست می آوریم. فوتون هاحالت های خاصی درفضای هیلبرت هستند و میدان های الکترومغناطیسی مشاهده پذیرهایی هستند که مطابق با اصول موضوع مکانیک کوانتومی عملگرهایی هرمیتی به آنها نسبت داده می شود که حاصل اندازه گیری ها را مشخص می کنند. مقدارمتوسط این مشاهده پذیرها و هم چنین عملگرهای هایزنبرگی مربوط به آنها درمعادلات ماکسول صدق می کنند.

حال می توان پرسید که آیا حالت های چند فوتونی ویژه حالت های انرژی هستند؟ ویژه حالت های تکانه چطور؟ اگرچنین باشد واگر حالت های 3 بخواهند مفهومی داشته باشند، می بایست عملگرهایی مثل $\hat{H}$ و $\hat{\mathbf{P}}$ وجود داشته باشند به قسمی که

$$\begin{aligned} \hat{H}|\Psi\rangle &= (n_1\hbar\omega_1 + n_2\hbar\omega_2 + n_3\hbar\omega_3 + \cdots\cdots)\,|\Psi\rangle, \\ \hat{P}|\Psi\rangle &= (n_1\hbar k_1 + n_2\hbar k_2 + n_3\hbar k_3 + \cdots\cdots)\,|\Psi\rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

هم چنین می توان پرسید که آیا عملگری وجود دارد که تعداد فوتون هارا بشمارد؟ زیرا حالت هایی مثل 3 وقتی بدون ابهام معنا پیدا می کنند که بتوان بین دو حالت که انرژی و تکانه کل یکسان ولی تعداد فوتون های متفاوت دارند نیز تمیزقایل شد، یعنی مشاهده پذیر یا عملگری مثل $\hat{N}$ وجود داشته باشد که این حالت ها ویژه حالت های آن باشند باویژه مقدارهایی که تعداد فوتون ها را مشخص کند، یعنی

$$\hat{N}|\Psi\rangle = (n_1 + n_2 + n_3 + \cdots\cdots)\,|\Psi\rangle. \tag{10}$$

نکته مهم آن است که این عملگرهای همگی می بایست از مشاهده پذیرهای اصلی یعنی میدان های $\hat{\mathbf{E}}(x)$ و $\hat{\mathbf{B}}(x)$ ساخته شوند. ازآنجا که H ، P و N مشاهده پذیرهای سرتاسری هستند و نه مشاهده پذیرهای مربوط به یک نقطه می بایست فرم کلی زیررا داشته باشند:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int \hat{\mathcal{H}}(x)dx = \int \hat{\mathcal{H}}(\hat{E}(x), \hat{B}(x))dx \\ \hat{P} &= \int \hat{\mathcal{P}}(x)dx = \int \hat{\mathcal{P}}(\hat{E}(x), \hat{B}(x))dx \\ \hat{N} &= \int \hat{\mathcal{N}}(x)dx = \int \hat{\mathcal{N}}(\hat{E}(x), \hat{B}(x))dx.\end{aligned} \tag{11}$$

آیایک حالت چند فوتونی مثلِ 3 ویژه حالتِ $\hat{\mathbf{E}}(x)$ یا $\hat{\mathbf{B}}(x)$ هست؟ پاسخ این سوال منفی است. در یک حالتِ تک فوتونی اندازه میدان الکترومغناطیسی دریک نقطه ازفضا بشدت نامعین است. این عدم تعین برای حالت های باتعداد بیشتر فوتون کم ترمی شود وبرای وقتی که تعداد فوتون هابسیاربسیارزیاد می شود به طور نسبی ازبین می رود به این معنا که برای این نوع حالت ها اختلاف نسبی $\langle\mathbf{E}(x)\rangle^2$ با $\langle\mathbf{E}^2(x)\rangle$ ناچیز می شود. درچنین حالتی افت وخیزها و عدم قطعیتِ میدان الکترومغناطیسی قابل مشاهده نیست و ما به دنیای الکترومغناطیس کلاسیک بازمی گردیم.

آیا حالت های چند فوتونی تمام حالت های میدان هستند؟

چگونه می توان عملگرهای انرژی، تکانه و یا تعداد یعنی N را ساخت ؟

اگر بخواهیم تصویر فوتونی ازنور را که نخستین بار توسط انشتین ارایه شده است جدی بگیریم و همچنین به اصول موضوع مکانیک کوانتومی پایبند باشیم واینکه نور چیزی جز یک موج الکترومغناطیسی نیست باید بگوییم که حالت های 3 یک پایه برای فضای حالت های میدان الکترومغناطیس تشکیل می دهند. این فضا توسط تمامی این حالت ها جاروب می شود. به این فضا اصطلاحاً فضای فوک یا *Fock Space* می گویند. برای اینکه این فضا را بخوبی توصیف کنیم آن را به زیرفضاهای n ذره ای اش تجزیه می کنیم و می نویسیم

$$F = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \cdots \oplus H_n \oplus \tag{12}$$

که درآن H_n فضایی است که توسط تمام حالت های n فوتونی بوجود می آید. H_0 یک زیر فضای یک بعدی است که توسط برداری که هیچ فوتونی ندارد تولید می شود. این بردار را با $|\mathbf{0}\rangle$ نشان می دهیم و آن را حالت خلأ می نامیم. می توان عملگرهای مفید و مناسبی را دراین فضا به اسم عملگرهای خلق و فنا تعریف کرد که کارشان افزایش یا کاهش فوتون هاست. به عبارت دقیق تر به ازای هر فوتون با مشخصات $(\mathbf{k}_i, \lambda_i)$ یک جفت عملگرِ $(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger)$ تعریف می کنیم که خاصیت زیر را داشته باشند:

$$\begin{aligned}\hat{a}_i|n_1, n_2, \cdots n_i, \cdots\rangle &= \sqrt{n_i}|n_1, n_2, \cdots n_i - 1, \cdots\rangle \\ \hat{a}_i^\dagger|n_1, n_2, \cdots n_i, \cdots\rangle &= \sqrt{n_i + 1}|n_1, n_2, \cdots n_i + 1, \cdots\rangle.\end{aligned} \tag{13}$$

واضح است که $\hat{a}_i|\mathbf{0}\rangle = 0$. هم چنین براحتی معلوم می شود که این عملگرها در رابطه زیر صدق می کنند:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = i\delta_{k,l}. \tag{14}$$

هم چنین حالت های تک فوتونی با اثر عملگرهای $\hat{a}_i^\dagger$ روی حالتِ $|\mathbf{0}\rangle$ بوجود می آیند. هم چنین می توان براحتی نشان داد که

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i|n_1, n_2, \cdots n_i, \cdots\rangle = n_i|n_1, n_2, \cdots n_i, \cdots\rangle. \tag{15}$$

بنابراین عملگر $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ تعداد فوتون های از نوع i یعنی از نوع $(\mathbf{k}_i, \lambda_i)$ را می شمارد. بنابراین به پاسخ سوال دوم نزدیک می شویم. اگر این حالت ها بخواهند ویژه بردارهای عملگرهای انرژی، تکانه و تعداد باشند می بایست این عملگرها برحسب عملگرهای خلق و فنا شکل زیر را داشته باشند:

$$\begin{aligned} N &= \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \\ H &= \sum_i \hbar\omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \\ P &= \sum_i \hbar k \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i. \end{aligned} \tag{16}$$

ولی هنوز به پاسخ کامل سوال دوم نرسیده‌ایم. سوال این است که آیا این عملگر ها واقعاً چگونه برحسب عملگرهای میدان یعنی $\hat{\mathbf{E}}(x)$ و $\hat{\mathbf{B}}(x)$ بیان می شوند؟ درواقع پاسخ این سوال وقتی یافته می شود که ما ربط بین عملگرهای $\hat{\mathbf{E}}(x)$ و $\hat{\mathbf{B}}(x)$ از یک طرف و عملگرهای $\hat{a}_i$ و $\hat{a}_i^\dagger$ را پیدا کنیم.

خواننده دقیق تاکنون دریافته است که ماهیچ صحبتی در باره رابطه تعویضگری بین عملگرهای میدان نکرده‌ایم و حال آنکه اساساً کوانتش با پذیرفتن یا قراردادن یک رابطه تعویضگری بین مشاهده پذیرها یا متغیرهای کانونیک آغازمی شود. بنابراین نخست می بایست متغیرهای کانونیک را تشخیص دهیم و سپس بین عملگرهای مربوطه روابط جابجایی کانونیک را برقرارکنیم.

درمورد میدان الکترومغناطیسی قبل از یافتن متغیرهای کانونیک می بایست متغیرهای مستقل را تشخیص دهیم زیرا همه مولفه های میدان های الکترومغناطیسی ازیکدیگر مستقل نیستند. ازاین به بعد خود را به میدان الکترومغناطیس خالص یعنی میدان درغیاب ماده محدود می کنیم. برای چنین میدانی می دانیم که می توانیم پتانسیل اسکالر را برابر باصفر قراردهیم و همه مولفه های میدان از بردارپتانسیل مغناطیسی بدست می آیند یعنی

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A \\ E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A. \end{aligned} \tag{17}$$

هم چنین $\mathbf{A}$ درشرط پیمانهٔ لورنتز صدق می کند یعنی $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. پس از تعیین مولفه های مستقل میدان می توانیم بپرسیم که لاگرانژی و هامیلتونی کلاسیک میدان چیست؟ از درس الکترومغناطیس کلاسیک آموخته ایم که لاگرانژی میدان الکترومغناطیسی برابراست با $\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$. هم چنین می دانیم که انرژی کل و تکانه میدان برابرند با:

$$H = \frac{1}{8\pi}\int dx(E^2 + B^2), \tag{18}$$

و

$$P = \frac{1}{8\pi c}\int dx E\times B. \tag{19}$$

بهتراست که لاگرانژی را برحسب متغیرهای مستقل یعنی میدان $\mathbf{A}$ بنویسیم. اگر چنین کنیم بدست می آوریم

$$L = \frac{1}{8\pi}\int \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A\cdot\frac{\partial}{\partial t}A - (\nabla\times A)\cdot(\nabla\times A)dx \tag{20}$$

حال با استفاده از اتحاد برداریِ

$$(\nabla\times A)\cdot(\nabla\cdot A) = \partial_j A_k\partial_j A_k - \partial_j A_k\partial_k A_j \tag{21}$$

وانتگرال گیری جزء به جزء و صرف نظرکردن از جملات مشتق کامل و هم چنین استفاده از شرط لورنتز عبارت لاگرانژی را به شکل ساده زیر می نویسیم:

$$L = \frac{1}{8\pi}\int dx\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A\cdot\frac{\partial}{\partial t}A - A_k\nabla^2 A_k. \tag{22}$$

این لاگرانژی برحسب میدان $\mathbf{A}$ و $\dot{\mathbf{A}}$ نوشته شده است. ازنظریه کلاسیک میدانهامی دانیم که تکانه مزدوج میدانِ $\mathbf{A}$ برابراست با:

$$\Pi_k(x) := \frac{\partial}{\partial\dot{A}_k}\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_k = -\frac{1}{4\pi c}E_k. \tag{23}$$

بنابراین تکانه مزدوجِ میدان A_k، میدان الکتریکی است.
بنابراین رابطه کروشه های پوآسون زیر برقرارهستند:

$$\begin{aligned}\{A_k(x),A_l(y)\} &= 0,\\ \{E_k(x),E_l(y)\} &= 0,\\ \{A_k(x),E_l(y)\} &= 4\pi c\delta(x-y),\end{aligned} \tag{24}$$

و هامیلتونی به شکل زیرخواهد بود:

$$H = \int dx\left[\Pi_k(x)\frac{\partial}{\partial t}A_k(x) - \mathcal{L}(x)\right] = \frac{1}{8\pi}\int dx\left[E\cdot E + B\cdot B\right]. \tag{25}$$

بنابراین هامیلتونی چیزی نیست جز همان انرژی میدان الکترومغناطیسی. دراین جا لازم است تذکردهیم که این روابط نیاز به کمی دستکاری دارند تا با قیودی که روی مولفه های میدان $\mathbf{A}$ مثل شرط پیمانه لورنتز اعمال کرده ایم سازگار شوند. دراین درس ما به این ظرایف و پیچیدگی ها نخواهیم پرداخت. آنچه که مهم است آن است که مطابق با اصول موضوع کوانتش عین

همین روابط را برای میدان های کوانتومی $\hat{\mathbf{A}}(x)$ و $\hat{\mathbf{E}}(x)$ و ازآنجا برای میدان های کوانتومی درتصویرهایزنبرگ یعنی $\hat{\mathbf{A}}(x,t)$ و $\hat{\mathbf{E}}(x,t)$ نیز برقرارهستند مشروط برآنکه روابط جابجایی را درزمان های مساوی حساب کنیم. بنابراین باصرف نظرکردن ازهمان ظرافت هایی که به آن اشاره کردیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &[\hat{A}_k(x,t), \hat{A}_l(y,t)] = 0, \\ &[\hat{E}_k(x,t), \hat{E}_l(y,t)] = 0, \\ &[\hat{A}_k(x,t), \hat{E}_l(y,t)] = i\hbar 4\pi c\delta(x-y). \end{aligned} \tag{26}$$

چه ارتباطی بین عملگرهای میدان $\hat{A}_k(x,t)$ یا $\hat{E}_k(x,t)$ و عملگرهای خلق و فنای فوتون ها وجود دارد؟ برای پاسخ به این سوال توجه می کنیم که میدان کوانتومی $\hat{\mathbf{A}}(x,t)$ درمعادله کلاسیک حرکت صدق می کند زیرایک عملگر در تصویر هایزنبرگ است. بنابراین

$$(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2)\hat{A}(x,t) = 0. \tag{27}$$

یک جواب هرمیتی ازاین معادله به شکل زیراست:

$$\hat{\mathbf{A}}(x,t) = \left[\mathbf{A}\ e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{A}^\dagger\ e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right], \tag{28}$$

که درآن $\omega = |\mathbf{k}|c$ و V حجم اتاقی است که میدان درآن تعریف شده‌است. دراین جواب $\mathbf{k}$ بردار موج و ω فرکانس آن است. ضمناً اندازه بردار $\mathbf{A}$ کاملاً دلخواه است و تنها جهت آن مقید است که می بایست بر بردار $\mathbf{k}$ عمود باشد تا شرط پیمانه لورنتز یعنی $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ برقرارباشد.

می توان به ازای هر بردار موج $\mathbf{k}$ دو بردار حقیقی، یکهٔ و متعامدِ $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ را که درصفحه عمود بر $\mathbf{k}$ قرار دارند درنظرگرفت . درنتیجه خواهیم داشت

$$\mathbf{A} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2, \tag{29}$$

درنتیجه حل بالا را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{\mathbf{A}}(x,t) = \sum_{\lambda=1,2}\mathbf{e}_\lambda\left(b_\lambda\ e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_\lambda^\dagger e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) \tag{30}$$

بردارهای موج $\mathbf{k}$ مقادیر گسسته ای را اختیارمی کنند که ناشی از تطبیق این جواب با شرایط مرزی است. مسلماً این جواب یک جواب کلی نیست و کلی ترین جواب هرمیتی از معادله را می توان به صورت زیر نوشت

$$\hat{\mathbf{A}}(x,t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda}\mathbf{e}_\lambda\ \left(b_{\lambda,\mathbf{k}}e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b^\dagger_{\lambda,\mathbf{k}}e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right). \tag{31}$$

بااین کار میدان کوانتومی $\hat{\mathbf{A}}(x,t)$ با مجموعه عملگرهای کوانتومی $\hat{b}_{\lambda,\mathbf{k}}$ و $\hat{b}^{\dagger}_{\lambda,\mathbf{k}}$ جایگزین شده است. می توان میدان الکتریکی را نیز برحسب این مجموعه عملگرها نوشت: ازآنجا که $\hat{\mathbf{E}}(x,t)=-\frac{\partial}{c\partial t}\mathbf{A}(x,t)$ خواهیم داشت:

$$\hat{\mathbf{E}}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{c}}\sum_{\mathbf{k},\lambda} i\omega\mathbf{e}_\lambda\left(-b_{\lambda,\mathbf{k}}e^{i\omega t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+b^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda}e^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right). \tag{32}$$

می توان پرسید که رابطه جابجایی عملگرهای $\hat{b}_{\lambda,\mathbf{k}}$ و $\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda}$ چیست؟ مسلم است که با دردست داشتن رابطه جابجایی های کانونیک بین میدان های کوانتومی $\hat{\mathbf{A}}$ و $\hat{\mathbf{E}}$ و هم چنین بسط این میدان ها برحسب عملگرهای $\hat{b}_{\lambda,\mathbf{k}}$ و $\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda}$ می توان این رابطه جابجایی را حساب کرد. یک محاسبه دقیق و شاید کمی طولانی نشان می دهد که روابط جابجایی به شکل زیرهستند:

$$\begin{aligned}
&[\hat{b}_{\mathbf{k},\lambda},\hat{b}_{\mathbf{k}',\lambda'}]=[\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda},\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}',\lambda'}]=0\\
&[\hat{b}_{\mathbf{k},\lambda},\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}',\lambda'}]=\frac{V\omega}{2\pi c^2\hbar}\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}.
\end{aligned} \tag{33}$$

بنابراین اگر $\hat{\mathbf{A}}$ را به صورت زیر بنویسیم

$$\hat{\mathbf{A}}(x,t)=\sum_{\mathbf{k},\lambda}(\frac{2\pi c^2\hbar}{V\omega})^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_\lambda\ \left(a_{\lambda,\mathbf{k}}e^{i\omega t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+a^{\dagger}_{\lambda,\mathbf{k}}e^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right). \tag{34}$$

آنگاه عملگرهای $\hat{\mathbf{a}}$ و $\hat{\mathbf{a}}^{\dagger}$ در روابط جابجایی خلق و فنای فوتون ها صدق می کنند، یعنی :

$$\begin{aligned}
&[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda},\hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}]=[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda},\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}',\lambda'}]=0\\
&[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda},\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}',\lambda'}]=\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}.
\end{aligned} \tag{35}$$

دقت کنید که در رابطه 34 نمی توان عبارت $(\frac{2\pi c^2\hbar}{V\omega})^{\frac{1}{2}}$ را به قبل از علامت جمع منتقل کرد زیرا ω ها به تکانه های $\mathbf{k}$ مرتبط هستند.

روابط جابجایی فوق نشان می دهند که عملگرهای $a_{\mathbf{k},\lambda}$ و $a^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda}$ درست مثل عملگرهای خلق و فناهستند. آیا ممکن است که این عملگرها واقعاً همان عملگرهای خلق و فنای فوتون هاباشند؟ برای پاسخ به این سوال بهتراست که عملگر انرژی یا هامیلتونی را حساب کنیم. با استفاده از رابطه 34 و 25 می توان نشان داد که عملگرهامیلتونی شکل زیر را دارد:

$$H=\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hbar\omega_k\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda}\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}, \tag{36}$$

که درآن از یک ثابت جمعی صرف نظرکرده ایم. هم چنین می توان نشان داد که تکانه کل میدان به شکل زیر درمی آید:

$$P=\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hbar\mathbf{k}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda}\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}. \tag{37}$$

این دورابطه کاملاً ما را قانع می کنند که عملگرهای $a_{\mathbf{k},\lambda}$ و $a^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda}$ عملگرهای خلق و فنای فوتون ها هستند.
حال اثر عملگرِ $\hat{A}(x,t)$ را روی حالت خلأ حساب می کنیم. باتوجه به اینکه $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0$ و $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\lambda}$ یک فوتون با تکانه $\mathbf{k}$ وقطبشِ λ تولید می کند بدست می آوریم:

$$\hat{A}(x,t)|0\rangle = \sum_{k,\lambda}(\frac{2\pi c^2\hbar}{V\omega})^{\frac{1}{2}}e^{-i\omega t+ik\cdot x}|k,\lambda\rangle. \tag{38}$$

بنابراین میدان کوانتومی $\hat{\mathbf{A}}$ وقتی که روی خلأ اثر می کند ترکیبی خطی از حالت های تک فوتونی با فرکانس های مختلف را تولید می کند. بحث بیشتر در باره میدان کوانتومی الکترومغناطیسی از حوصله این درس خارج است . خواننده علاقمند می تواند برای مطالعات بیشتر به کتاب های نظریه میدان کوانتومی مراجعه کند.