درس چهاردهم:اسپین

دردرس گذشته جبر زیر را مطالعه کردیم و تمام نمایش های یکانی آن را بدست آوردیم

$$[L_a, L_b] = i\epsilon_{abc}L_c. \tag{1}$$

به عبارت دیگر تمام ماتریس های هرمیتی ممکن را که در روابط فوق صدق می کنند بدست آوردیم. دیدیم که هرنمایش با یک عدد صحیح یا نیمه صحیح j مشخص می شود که بعد آن برابراست با $2j+1$. هرماتریس روی بردارهای $|j,m\rangle$ $(m=-j,\cdots j)$ به صورت زیر عمل می کند:

$$L_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle, \tag{2}$$

$$L_+|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1\rangle \quad L_-|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j,m-1\rangle. \tag{3}$$

هم چنین دیدیم که تصویر فضایی چنین حالت هایی فقط برای وقتی که j یک عدد صحیح باشد وجود دارد . هرگاه این اعداد صحیح را با l نشان دهیم، آنگاه نمایش فضایی این حالت ها همان هماهنگ های کروی خواهند بود به این معنا که

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|l,m\rangle. \tag{4}$$

هماهنگ های کروی هرگاه دریک پایه برای توابع شعاعی ضرب شوند یک پایه برای کل توابع موج درفضای سه بعدی بدست می دهند.
نمایش های با اسپین نیمه صحیح بخصوص نمایش اسپین $1/2$ هیچ گونه تصویر فضایی ندارند. بد نیست نمایش اسپین $1/2$ را به یاد بیاوریم. این نمایش باماتریس های دو بعدی $S_x,\ \ S_y,\ \ S_z$ مشخص می شود که عبارتند از:

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

این نمایش ها روی حالت های

$$|+\rangle := |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle := |\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

به صورت زیر عمل می کنند:

$$S_x|\pm\rangle = \frac{1}{2}|\mp\rangle, \qquad S_y|\pm\rangle = \frac{\pm i}{2}|\mp\rangle, \qquad S_z|\pm\rangle = \frac{\pm 1}{2}|\pm\rangle, \tag{7}$$

و طبیعی است که در روابط جابجایی زیر صدق می کنند.

$$[S_a, S_b] = i\hbar\epsilon_{abc}S_c, \tag{8}$$

دراین جا ثابت پلانک را که تا کنون برابر با یک گرفته بودیم دوباره درجای خود قرارداده ایم.

حال از خود می پرسیم که آیا یک ذره کوانتومی می تواند درحالتی مثل $|+\rangle$ و یا $|-\rangle$ و یا ترکیبی از آن دو باشد؟ اگر چنین چیزی وجود داشته باشد آنگاه می توان به این ذره مشاهده پذیرهایی مثل S_x، S_y و S_z نسبت داد که درست همان روابط جابجایی و درنتیجه همان خواص تکانه زاویه ای را دارند؟ آنچه که مسلم است این حالت ها نمی توانند مربوط به حرکت الکترون باشند زیرا همانطور که دیدیم این حالت ها تصویری درفضای مختصات ندارند و فضای هیلبرت یک ذره درفضای سه بعدی توسط توابع $Y_{l,m}f_n(r)$ که درآن $f_n(r)$ یک پایه برای توابع شعاعی است به طور کامل پوشانده می شود. بنابراین اگر دریابیم که الکترون یا هرذره دیگری می تواند در چنین حالت هایی قراربگیرد ناگزیریم که آن را به یک خصلت غیرفضایی یا درونی و ذاتی آن ذره نسبت دهیم. حال به سوال اولیه بازمی گردیم. آیا یک ذره درچنین حالت هایی قرارمی گیرد؟ پاسخ مثبت این سوال درهمان سالهای ابتدایی تکوین مکانیک کوانتومی با آزمایش های اشترن گرلاخ داده شده است که شرح آن دردرس دوم با تفصیل نسبی آورده شد. اکنون می دانیم که الکترون و بعضی از ذرات یا اتم های دیگر می توانند یک خصلت ذاتی ازخود بروز دهند که تمام خواص مربوط به آن را می توان با درنظرگرفتن یک فضای هیلبرت دو بعدی مختلط توضیح داد. مشاهده پذیرهای مناسبی که رفتار الکترون را دراین فضا توصیف می کنند به عملگرهای S_x، S_y و S_z مرتبط هستند. هرگاه ذره درحالتی مثل $|z,+\rangle$ قرارمی گیرد می گوییم که اسپین آن درجهت z روبه بالا ست و هرگاه درحالت $|z,-\rangle$ قرار می گیرد می گوییم اسپین آن درجهت z رو به پایین است. این حالت ها ویژه بردارهای مشترک S^2 و S_z هستند یعنی

$$\begin{aligned} S_z|z,\pm\rangle &= \frac{\pm\hbar}{2}|z,\pm\rangle \\ S^2|z,\pm\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2|z,\pm\rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

۱ عملگرهای اسپین و ماتریس های پاوولی

عملگرهای اسپین را می توان به صورت $S_a = \frac{\hbar}{2}\sigma_a$ نوشت که درآن σ_a ها ماتریس های پاوولی نامیده می شوند و عبارتند از:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

این ماتریس ها خواص جالبی دارند که در مطالعه روابط مربوط به اسپین و هم چنین انجام محاسبات مربوط به آن بسیار مفیدند. خواننده می تواند به راحتی صحت روابط زیر را تحقیق کند:
الف:

$$\sigma_a^\dagger = \sigma_a, \qquad \sigma_a^2 = I, \qquad \{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab} I, \qquad Tr(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab}. \tag{11}$$

که درآن $\{a, b\} := ab + ba$.

ب:

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c, \qquad \sigma_a\sigma_b = \delta_{ab} I + i\epsilon_{abc}\sigma_c. \tag{12}$$

ازاین روابط بدست می آید:

$$\{a\cdot\sigma, b\cdot\sigma\} = 2a\cdot b, \qquad (a\cdot\sigma)(b\cdot\sigma) = a\cdot bI + (a\times b)\cdot\sigma \tag{13}$$

ج:

$$e^{-i\theta n\cdot S} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} n\cdot S. \tag{14}$$

د: ویژه بردارهای عملگرپاوولی در راستای $\hat{\mathbf{n}}$

عملگر پاوولی در راستای $\mathbf{n}$ به صورت $\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma$ تعریف می شود. داریم

$$\hat{n}\cdot\sigma = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

ازآنجا که $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma)^2 = I$، بنابراین ویژه مقدارهای این عملگر برابر با ± 1 است ، ویژه بردارهای متناظر را با $|\hat{\mathbf{n}}, +\rangle$ و $|\hat{\mathbf{n}}, -\rangle$ نشان می دهیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که

$$|\hat{n}, +\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \qquad |\hat{n}, -\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \tag{16}$$

براحتی می توان تحقیق کرد که وقتی ذره درحالت $|\hat{\mathbf{n}},+\rangle$ است مشاهده پذیرهای S_x، S_y و S_z مقادیر زیر را دارند:

$$\langle\hat{n},+|S_x|\hat{n},+\rangle=\sin\theta\cos\phi,\qquad \langle\hat{n},+|S_y|\hat{n},+\rangle=\sin\theta\sin\phi,\qquad \langle\hat{n},+|S_z|\hat{n},+\rangle=\cos\theta. \tag{17}$$

به عبارت دیگر درست مثل این است که حالت ذره با بردار یکه کلاسیکی در راستای n مشخص می شود.

۲ فضای هیلبرت کامل

حال که مشخص شده است الکترون هم خصلت های فضایی دارد که با مختصات و تکانه مشخص می شوند و هم خصلت های درونی که بااسپین، می توان پرسید که حالت کامل آن را چگونه باید توصیف کرد؟ برای این کار بازهم باید به آزمایش بازگردیم. تجربه های بسیار نشان داده اند که اسپین الکترون را می توان به همراه تکانه و یا مختصات آن اندازه گیری کرد. به عبارت دیگر اسپین و مختصه الکترون یا اسپین و تکانه الکترون مشاهده پذیرهای سازگار باهم هستند. این امر به این معناست که عملگرهای مربوط به این مشاهده پذیرها باهم جابجا می شوند، یعنی

$$[P_i,S_j]=0\qquad [X_i,S_j]=0,\qquad [X_i,P_j]=i\hbar\delta_{ij},\qquad [S_i,S_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}S_k. \tag{18}$$

اما ازآنجا که دیدیم حالت های اسپینی الکترون نمایش فضایی ندارند. این امر به این معناست که روابط جابجایی مربوط به اسپین را نمی توان درهمان فضای هیلبرتی که تاکنون برای توصیف الکترون بکارمی رفت نمایش داد و ما ناچاریم که برای نمایش تمام روابط بالا فضای هیلبرت بزرگ تری اختیار کنیم. برای این کار فضای هیلبرت کامل را از ضرب دو فضای هیلبرت بی نهایت بعدی و دو بعدی می سازیم. فضای هیلبرتی که تاکنون با آن سروکار داشتیم با V_0 نشان می دهیم. این فضای هیلبرت بی نهایت بعدی است و با بردارهای $|x\rangle$ یا $|p\rangle$ جاروب می شود. فضای هیلبرت اسپین را که دو بعدی است با V_s نشان می دهیم. فضای هیلبرت کامل را به صورت زیر درنظر می گیریم:

$$V=V_0\otimes V_s. \tag{19}$$

دراین فضا عملگر های مختصات، تکانه، واسپین به صورت زیر عمل خواهند کرد:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_i&=P_i\otimes I,\qquad \mathcal{X}_i=X_i\otimes I\\ \mathcal{S}_a&=I\otimes\mathcal{S}_a,\end{aligned} \tag{20}$$

و بدیهی است که روابط جابجایی آنها مطابق با (18) است. بنابراین فضایی ساخته ایم که تمام روابط بین مشاهده پذیرها را می توان درآن نمایش داد. بردارهای پایه این فضا به شکل زیر

$$
\begin{aligned}
|x,+\rangle &= |x\rangle \otimes |+\rangle = \begin{pmatrix} |x\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \\
|x,-\rangle &= |x\rangle \otimes |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |x\rangle \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{21}
$$

وروابط تعامد آنها به شکل زیر خواهد بود

$$
\langle x,\alpha|x',\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}\delta(x-x'). \tag{22}
$$

هم چنین این بردارها یک پایه کامل برای فضای V تشکیل می دهند:

$$
\begin{aligned}
\sum_\alpha \int dx|x,\alpha\rangle\langle x,\alpha| &= \int dx|x,+\rangle\langle x,+| + \int dx|x,-\rangle\langle x,-| \\
&= \int dx \begin{pmatrix} |x\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x| & 0 \end{pmatrix} + \int dx \begin{pmatrix} 0 \\ |x\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \langle x| \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int dx|x\rangle\langle x| & 0 \\ 0 & \int dx|x\rangle\langle x| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\sum_\alpha \int dx|x,\alpha\rangle\langle x,\alpha| = I \otimes I. \tag{24}
$$

حالت کامل یک ذره رامی توان برحسب این بردارهای پایه بسط داد:

$$
|\Psi\rangle = \sum_\alpha \int dx|x,\alpha\rangle\langle x,\alpha|\Psi\rangle = \sum_\alpha \int dx\psi_\alpha(x)|x,\alpha\rangle \tag{25}
$$

که درآن

$$
\psi_+(x) = \langle x,+|\Psi\rangle, \qquad \psi_-(x) = \langle x,-|\Psi\rangle. \tag{26}
$$

توابع موج ذره با مولفه مثبت و منفی اسپین هستند. به عبارت دیگر $|\psi_+(x)|^2$ چکالی احتمال یافتن ذره با اسپین بالا در نقطه x است و $|\psi_-(x)|^2$ نیز چگالی احتمال یافتن ذره با اسپین پایین در نقطه x است.
مناسب است که شکل صریح عملگرهای $\mathcal{X}$، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{S}_a$ را درنظرآوریم. درپایه مختصات داریم

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \tag{27}$$

و

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -i\hbar\vec{\nabla} & 0 \\ 0 & -i\hbar\vec{\nabla} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

هم چنین عملگرهای اسپین در فضای هیلبرت کل به شکل زیر هستند

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_x &= I \otimes S_x = I \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{S}_y &= I \otimes S_y = I \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{S}_z &= I \otimes S_z = I \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{29}$$

که درآن ها عملگر I عملگری است که روی قسمت فضایی فضای هیلبرت یعنی V_0 اثر می کند. به عبارت دیگر $I = \int dx|x\rangle\langle x|$.

قیافه هامیلتونی یک ذره که درپتانسیل V قرار دارد و اسپین در آن دخالتی ندارد به شکل زیر خواهد بود

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{P}^2}{2m} + V(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} \frac{P^2}{2m} + V(X) & 0 \\ 0 & \frac{P^2}{2m} + V(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}. \tag{30}$$

هرگاه ویژه بردارهای H را تعیین کرده باشیم ویژه بردارهای $\mathcal{H}$ به شکل زیر خواهند بود که نشان دهنده یک واگنی است. این واگنی ناشی از یک تقارن است و آن اینکه عملگرهای اسپین با هامیلتونی جابجا می شوند:

$$\mathcal{H}|\psi_n, \alpha\rangle = E_n|\psi_n, \alpha\rangle. \tag{31}$$

برای یک چنین هامیلتونی عملگرتحول عبارت است از

$$\mathcal{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \end{pmatrix} \tag{32}$$

که نشان می دهد درطول زمان قسمت اسپینی یک حالت اولیه دچار تغییرنمی شود.

۳ برهم کنش یک ذره باردار با میدان الکترومغناطیسی

می دانیم که هامیلتونی ذره ای با بارالکتریکی q که دریک میدان الکترومغناطیسی با پتانسیل اسکالر ϕ و پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ قرارمی گیرد به شکل زیراست:

$$H = \frac{(P + \frac{q}{c}A)^2}{2m} + q\phi = \frac{1}{2m}(P^2 + \frac{q^2}{c^2}A^2 + \frac{q}{c}\vec{P}\cdot\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{P}) + q\phi(r). \tag{33}$$

دقت کنید که این رابطه در دستگاه واحدهای گاووسی نوشته شده است که درآن بارالکتریکی یک الکترون برابربا $esu \quad 4.8 \times 10^{-10}$ است. دراین دستگاه میدان مغناطیسی برحسب واحد گاووس سنجیده می شود.

هرگاه هامیلتونی بالا را درپایه مختصات بنویسیم بدست می آوریم

$$H = \frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2 + \frac{q^2}{c^2}A^2 - \frac{q}{c}i\hbar\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{q}{c}i\hbar\vec{A}\cdot\vec{\nabla}) + q\phi(r) \tag{34}$$

ازطرفی می دانیم که

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\psi = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\psi + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi. \tag{35}$$

همیشه می توانیم پیمانه ای را انتخاب کنیم که درآن شرط $(\nabla\cdot\mathbf{A}) = 0$ برقرارباشد. دراین پیمانه هامیلتونی به شکل زیردرمی آید:

$$H = \frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2 + \frac{q^2}{c^2}A^2 - 2i\frac{q}{c}\hbar\vec{A}\cdot\vec{\nabla}) + q\phi(r). \tag{36}$$

هرگاه ذره تنهادریک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ قرارگرفته باشد آنگاه $\phi(\mathbf{r}) = 0$ و

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}. \tag{37}$$

دراین شرایط هامیلتونی به شکل زیر درمی آید:

$$H = \frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2 + \frac{q^2}{c^2}(r^2B^2 - (\vec{r}\cdot\vec{B})^2 - i\frac{q}{c}\hbar(\vec{B}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}) \tag{38}$$

اما تقریبا همواره می توانیم ازجمله های متناسب با B^2 بدلیل کوچکی شان صرف نظر ککنیم. درحقیقت دانشجو می تواند با یک محاسبه ساده نشان دهد که این جملات برای میدان های مغناطیسی ای که درآزمایشگاه قابل حصول باشد

($B < 10^5 \quad Gauss$) درمقابل جملات دیگر همواره قابل چشم پوشی هستند. تحت این شرایط هامیلتونی به شکل زیردرمی آید:

$$H = \frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2 - \frac{q}{c}\vec{B}\cdot\vec{L}) = H_0 - \mu\cdot B, \tag{39}$$

که درآن $\mu = \frac{q}{2mc}\mathbf{L}$ آن قسمت از گشتاور مغناطیسی ذره است که ناشی از حرکت دورانی آن و یا تکانه زاویه ای اربیتالی آن است. درفضای هیلبرت کامل این هامیلتونی به شکل زیراست:

$$H = \begin{pmatrix} H_0 - \mu_l\cdot B & 0 \\ 0 & H_0 - \mu\cdot B \end{pmatrix}, \tag{40}$$

که درآن $H_0 = \frac{P^2}{2m}$.
دراین محاسبه از گشتاور مغناطیسی ناشی از اسپین ذره صرف نظرکرده ایم. به همین دلیل این هامیلتونی به شکل بلوکه قطری درآمده است. هرگاه بخواهیم گشتاورمغناطیسی ناشی از اسپین را نیز درنظربگیریم می بایست هامیلتونی را به شکل زیرتغییر دهیم:

$$H = H_0 - \mu_l\cdot B - \mu_s\cdot B = \begin{pmatrix} H_0 - \mu\cdot B & 0 \\ 0 & H_0 - \mu\cdot B \end{pmatrix} - \frac{q}{mc}\begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}. \tag{41}$$

دراین جا ذکر یک نکته لازم است . جمله $\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$ را مثل جمله $\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}$ ازاصول اولیه بدست نیاورده ایم. بلکه آن را باتوجه به تشابه گشتاور مغناطیسی اسپینی و مداری اضافه کرده ایم. این که آیا چنین کاری صحیح است یا نه بستگی به تطبیق نهایی نتایج این هامیلتونی با تجربه دارد و تجربه نشان داده است که چنین جایگزینی ای صحیح است، با یک تفاوت و آن اینکه بجای ضریب $\frac{q}{2mc}$ می بایست ضریب $\frac{q}{mc}$ درکنار $\mathbf{S}$ قراربگیرد تا گشتاور مغناطیسی اسپینی بدست آید. درمکانیک کوانتومی نسبیتی جمله مربوط به برهم کنش اسپین باهمان ضریب صحیح یعنی $\frac{q}{mc}$ به طور طبیعی و ازاصول اولیه بدست می آید.

روش هایی که تاکنون در مورد ذرات اسپین ۱/۲ آموخته‌ایم در مورد هر سیستم کوانتومی که عملاً و از نقطه نظر فیزیکی با یک فضای هیلبرت دوبعدی توصیف می شود نیز صدق می کند. این فضای دوبعدی می تواند بخشی از فضای هیلبرت باشد که سیستم به آن دسترسی دارد و یا یک فضای هیلبرت موثر باشد که ما برای توصیف تقریبی سیستم از آن سود جسته‌ایم. درتمرین هایی که در پی می آید، این دیدگاه را در نظر داریم.

تمرین: هامیلتونی یک سیستم به طور موثر با ماتریس دوبعدی زیر توصیف می شود:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & W_{12} \\ W_{12}^* & E_2 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

الف: ویژه مقدارهای و ویژه بردارهای این هامیلتونی را پیدا کنید.

ب: وقتی که $W_{12} = 0$ است، حالت های $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ویژه حالت های هامیلتونی باانرژی E_1 و E_2 هستند. مقادیر انرژی متوسط E_m و هم چنین اختلاف انرژی Δ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$E_m = \frac{1}{2}(E_1 + E_2), \qquad \Delta = \frac{1}{2}(E_1 - E_2). \tag{43}$$

نشان دهید که ویژه بردارها به E_m بستگی ندارند. انرژی های هامیلتونی H را با E_+ و E_- نشان دهید. با فرض اینکه W_{12} و E_m مقادیر ثابتی هستند، E_+ و E_- را بر حسب Δ رسم کنید.

تمرین: دو ذره اسپین ۱/۲ در حالت ِزیر هستند:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|++\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|--\rangle \tag{44}$$

هستند که در آن $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ویژه بردارهای عملگر σ_z هستند. اگر تکانه زاویه‌ای کل این دو ذره را اندازه بگیریم، چه مقادیری و با چه احتمالی بدست می آوریم. حالت بعداز اندازه گیری را در هر مورد مشخص کنید.

تمرین: عملگر جایگشت که آن را با P نشان می دهیم در فضای اسپین دو ذره اثر زیر را دارد:

$$P|++\rangle = |++\rangle, \quad P|+,-\rangle = |-,+\rangle, \quad P|-+\rangle = |+-\rangle, \quad P|-,-\rangle = |-,-\rangle. \tag{45}$$

الف: ماتریس مربوط به این عملگر را بنویسید.

ب: نشان دهید که این عملگر روی هر حالت ِدلخواهِ $|\alpha\rangle|\beta\rangle$ اثر زیر را دارد:

$$P|\alpha\rangle|\beta\rangle = |\beta\rangle|\alpha\rangle. \tag{46}$$

پ: اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}(I + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z). \tag{47}$$

تمرین: ویژه حالت ها و ویژه مقدارهای هامیلتونی زیر را بدست آورید. این هامیلتونی نشان دهنده‌ی ۳ ذره اسپین ۱/۲ است که در روی یک خط قرار گرفته اند و همسایه های نزدیک با هم برهم کنش دوقطبی می کنند.

$$H = -J(S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3). \tag{48}$$

دراین هامیلتونی ثابتِ J مقدار مثبتی دارد. **راهنمایی ۱:** از رابطه های

$$P_{12} = \frac{1}{2}(I + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \qquad\qquad P_{23} = \frac{1}{2}(I + \sigma_2 \cdot \sigma_3) \tag{49}$$

استفاده کنید که درآن P_{12} جایگشت بین حالت های ذره‌ی یک و دو است (با تعریف مشابهی برای P_{23}) و هامیلتونی را برحسب این عملگرهای جایگشت بازنویسی کنید.

راهنمایی ۲: از تقارن هامیلتونی استفاده کنید. یک تقارن این است که اگر جای اسپین ۳ و ۱ را با هم عوض کنید این هامیلتونی تغییر نمی کند. این عمل را با Q نشان دهید. معنای این تقارن این است که Q با H جابجا می شود. از طرفی $Q^2 = I$ است. ویژه بردارهای Q چه ویژگی ای دارند؟

تمرین: ویژه حالت ها و ویژه مقدارهای هامیلتونی زیر را بدست آورید. این هامیلتونی نشان دهنده‌ی ۴ ذره اسپین ۱/۲ است که در روی یک دایره قرار گرفته اند و همسایه های نزدیک با هم برهم کنش دوقطبی می کنند.

$$H = -J(S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3 + S_3 \cdot S_4 + S_4 \cdot S_1). \tag{50}$$

دراین هامیلتونی ثابتِ J مقدار مثبتی دارد. **راهنمایی:** شماره یک برای مسئله قبلی برای این مسئله نیز کاربرد دارد. **راهنمایی ۲:** از تقارن هامیلتونی استفاده کنید. یک تقارن این است که اگر تمام اسپین ها را یکی به سمت راست انتقال دهیم (یعنی i را به $i+1$ تبدیل کنیم، این هامیلتونی تغییر نمی کند.)

تمرین: یک ذره‌ی اسپین ۱/۲ در میدان مغناطیسی ثابت $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ قرار گرفته است. برهم کنش ذره با میدان مغناطیسی با هامیلتونی زیر توصیف می شود:

$$H = -\mu S \cdot B. \tag{51}$$

حالت اولیه این ذره عبارت است از $|\hat{n}\rangle$ که در آن $\hat{n}$ بردار یکه‌ای است که با زاویه‌های θ و ϕ مشخص می شود.

الف: حالت ذره را در لحظه دلخواه t بدست آورید.

ب: متوسط های زیر را بدست آورید و نتایج خود را از نظر فیزیکی تعبیر کنید:

$$\langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle, \qquad \langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle, \qquad \langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle. \tag{52}$$

تمرین: یک ذره‌ی اسپین ۱ را در نظر بگیرید. عملگرِ $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = n_xS_x + n_yS_y + n_zS_z$ را تشکیل دهید. عملگرهای S_a نمایش اسپین ۱ تکانه‌ی زاویه‌ای هستند.

الف: ثابت کنید که ویژه مقدارهای این عملگر عبارتند از $+\hbar$ ، 0 و $-\hbar$. (راهنمایی: عملگر $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ را به توان ۳ برسانید.)

ب: ویژه بردارهای این عملگر را حساب کنید و آن ها را با $|n,+\rangle, |n,0\rangle$ و $|n,-\rangle$ نشان دهید.

پ: متوسط های عملگرهای S_x، S_y و S_z را روی حالت $|n,+\rangle$ محاسبه کنید و نتیجه خود را تعبیر کنید.