الکترومغناطیس

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۴ اردیبهشت ۱۴۰۱

۱ مقدمه

تا کنون تجربه و آزمایش نشان داده است که دستگاه های لخت متفاوت را نمی توان با هیچ آزمایش فیزیکی از یکدیگر تشخیص داد. به عبارت بهتر رفتار تمام پدیده های فیزیکی چه مکانیکی، چه الکترومغناطیسی و چه نوری در همه دستگاه های لخت یکسان است و نمی توان با انجام چنین آزمایش هایی حرکت مطلق یک دستگاه را تعیین کرد. از این حقیقت تجربی یک نتیجه می توان گرفت و آن اینکه قوانینی که این پدیده ها را توصیف می کنند می بایست در همه دستگاه های لخت شکل یکسانی داشته باشند. می دانیم که تبدیلات صحیح بین دستگاه های لخت تبدیلات لورنتز هستند و نه تبدیلات گالیله. این را از ثابت بودن سرعت نور می دانیم که خود نتیجه ای از آزمایش مایکلسون – مورلی است. در فصل قبل نشان دادیم که قوانین مکانیک چگونه می بایست تعمیم داده شوند تا تحت تبدیلات لورنتز شکل خود را حفظ کنند. اکنون می بایست به الکترومغناطیس بپردازیم. پدیده های الکترومغاطیسی با معادلات ماکسول توصیف می شوند. سوال این است که آیا این معادلات شکل خود را تحت تبدیلات لورنتز حفظ می کنند یا خیر. این موضوعی است که در این درس به آن می پردازیم. خواهیم دید که هیچ نیازی به تغییر یا تعمیم معادلات ماکسول نیست و این معادلات به همین شکلی که نوشته شده اند تحت تبدیلات لورنتز ناوردا هستند. مهم تر از این ناوردایی یاد می گیریم که میدان های الکتریکی و مغناطیسی جنبه های متفاوتی از یک میدان کلی به نام میدان الکترومغناطیسی هستند و اینکه ما کدام یک از این جنبه ها را ببینم بستگی به سرعت حرکت ما دارد. این وحدتی است فراتر از وحدت اولیه ای که از کار ماکسول حاصل شده است، زیرا نشان می دهد

که چگونه تبدیل این میدان ها به یکدیگر با تبدیلات فضا و زمان گره خورده است. البته در نگاه اول خیلی دشوار است که این ناوردایی را ببینیم و برای این کار می بایست این معادلات را به شکل بهتری بنویسیم.

■ **یک نکته :** در این درس استثنائا سرعت نور را به طور صریح در همه جا می نویسیم و آن را برابر با یک نمی گیریم. سرعت نور برابر است با

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

که در آن ϵ_0 و μ_0 ثابت های شناخته شده الکتریکی و مغناطیسی هستند.

۲ ناوردایی بار الکتریکی

می دانیم جرم با افرایش سرعت تغییر می کند. معنایش این است که جرم ناوردای نسبیتی نیست و در هر دستگاه لختی مقدار متفاوتی دارد. اولین سوالی که در الکترومغناطیس باید به آن پاسخ دهیم این است که آیا بار الکتریکی هم به سرعت بستگی دارد یا این که مقدار آن ثابت است. پاسخ به این سوال تنها از آزمایش و مشاهده بر می آید. آزمایش های بسیار دقیق نشان می دهند که بار الکتریکی یک ناورداست و مقدار آن بستگی به سرعت ندارد. در اتم هیدروژن ، الکترون و پروتون به دور مرکز جرم می چرخند. البته پروتون حدوداً دو هزار بار سنگین تر است و شعاع حرکت آن و سرعت آن نسبت به الکترون کوچک تر است ولی این سرعت صفر نیست. در عوض الکترون با سرعت بسیار که کسر قابل توجهی از سرعت نور است حرکت می کند. با این وجود بار کل اتم هیدروژن با دقت یک روی ده به توان منهای بیست برابر با صفر است. معنایش این است که بار الکترون علیرغم سرعت زیادش هیچ تغییری نکرده است. همین مشاهده را در مورد مولکول هیدروژن از یک سو و اتم هلیوم نیز می توان دید. هر دوی این ساختارها شامل دو پروتون و دو الکترون هستند. در مولکول هیدروژن پروتون ها به دور یک دیگر و در فاصله 0.7 آنگسترومی می چرخند و سرعت دارند. اما در اتم هلیوم پروتون ها در هسته اتم به هم چسبیده و تقریبا ساکن هستند. با این وجود هر دو ساختار با دقت فوق العاده زیادی خنثی و بدون بار هستند. این نوع مشاهدات در مورد اتم ها و مولکوهای مختلف و هم چنین در مورد ایزوتوپ های مختلف از یک اتم همگی نشان می دهند که بار الکتریکی مستقل از سرعت است. شایداین ناوردایی به کوانتش بار الکتریکی مرتبط باشد. در حالیکه به نظر می رسد جرم ذرات هر مقدار ی می تواند باشد، بار الکتریکی تمام ذرات، صرف نظر از جرمی که دارند، مضربی مثبت یا منفی از بار الکترون است. این نکته شگفت انگیز ی است که تا کنون کسی توضیحی برای آن پیدا نکرده است.

۳ معادلات ماکسول

برای توصیف پدیده ها و قوانین الکترومغناطیس چند نوع دستگاه واحد مرسوم است. یکی از آنها دستگاه متریک است که از ابتدای مطالعه فیزیک با آن آشنا شده ایم. دستگاه دیگری هم متداول است که به آن دستگاه گاووسی گفته می شود. ضرایب عددی که در معادلات ماکسول وارد می شوند در این دستگاه ها متفاوت اند. ابعاد میدان ها نیز متفاوت خواهند بود زیرا کمیت های بنیادی و کمیت هایی که از آنها مشتق می شوند در این دستگاه ها با هم متفاوتند. در این درس معادلات ماکسول را در همان دستگاه متریک که با آن آشنایی بیشتری داریم می نویسیم. این معادلات به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\\
\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0\\
\nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\\
\nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}.
\end{aligned} \tag{۱}$$

در نوشتن معادله آخر از این استفاده کرده ایم که $\mu_0\epsilon_0$ برابر با $\frac{1}{c^2}$ است. نیازی نیست که جملات مختلف این معادلات را توضیح دهیم چون فرض این است که خواننده در درس های قبلی خود آنها را آموخته است. ولی خوب است یک نکته را به خاطر بسپاریم و آن اینکه در دستگاه متریک بعد میدان مغناطیسی برابر است با بعد میدان الکتریکی تقسیم بر بعد سرعت. این نکته را به این صورت می نویسیم و همواره برای تحقیق درستی روابطی که در آینده بدست خواهیم آورد می بایست آن را به یاد داشته باشیم:

$$[v][B]=[E]. \tag{۲}$$

این معادلات بیان می کنند که چگونه میدان های الکتریکی و مغناطیسی در فضا و زمان تحول پیدا می کنند و چگونه بار الکتریکی و جریان الکتریکی نیز در پیدایش آنها اثر دارند. این که این میدان ها چگونه بر بارهای الکتریکی اثر می گذارند توسط نیروی لورنتز توصیف می شود:

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{۳}$$

این رابطه و چهار معادله ماکسول کلیه پدیده های الکتریکی، مغناطیسی و اپتیکی را در همه مقیاس هایی که تا کنون شناخته ایم با دقت فوق العاده زیاد توصیف می کنند.

در درس الکترومغناطیس یادگرفته ایم که برای توصیف میدان های الکتریکی و مغناطیسی می توان از پتانسیل اسکالر ϕ و پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ استفاده کرد. میدان های الکتریکی و مغناطیسی به ترتیب زیر از این پتانسیل ها بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{۴}$$

به شکل کنونی چندان واضح نیست که معادلات ماکسول تحت تبدیلات لورنتز شکل خود را حفظ می کنند. آنچه که اکنون می خواهیم انجام دهیم آن است که این معادلات را به شکلی بنویسیم که هموردا بودن این معادلات را تحت تبدیلات لورنتز به صورت آشکار نشان دهد. برای این کار یک چهاربردار به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$A_\mu = (\frac{\phi}{c}, -\mathbf{A}) = (\frac{\phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z). \tag{۵}$$

دقت کنید که مولفه های این چهاربردار میدان های فیزیکی نیستند که بتوان با استدلال فیزیکی و تجربی مولفه های آن را در دستگاه های دیگر بدست آورد و نشان داد که واقعا مثل یک چهاربردار تبدیل می شوند. بلکه معنای این حرف آن است که مولفه های این چهاربردار را در دستگاه های لخت دیگر به صورت زیر بدست می آوریم یا تعریف می کنیم:

$$A_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A'_\nu. \tag{۶}$$

اما می بایست نشان دهیم که میدان های الکتریکی و مغناطیسی که از این چهاربردار بدست می آیند تحت تبدیلات لورنتز چنان تبدیل می شوند که هم شکل معادلات ماکسول حفظ می شود و هم تبدیلات این میدان ها سازگار با شهود فیزیکی ماست. برای این کار نخست تانسور زیر را تعریف می کنیم.

$$F_{\mu,\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{۷}$$

در این تانسور نماد ∂_μ برای نشان دادن $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ به کار رفته است:

$$F_{\mu,\nu} := \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu \tag{۸}$$

این تانسور همه مولفه های میدان های الکتریکی و مغناطیسی را به زیبایی در خود جای می دهد. در واقع داریم:

$$F_{01} = -\frac{\partial}{c\partial t} A_x - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\phi}{c} = \frac{1}{c} E_x \tag{۹}$$

و همین رابطه برای بقیه مولفه ها هم برقرار است. به عبارت کلی تر بدست می آوریم:

$$F_{0i} = \frac{1}{c} E_i. \tag{۱۰}$$

هم چنین یک محاسبه مشابه نشان می دهد که

$$F_{12} = \frac{\partial}{\partial x}(-A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(-A_x) = -B_z \tag{۱۱}$$

و به طور کلی تر

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{۱۲}$$

این تانسور را تانسور شدت میدان می نامیم. این تانسور یک تانسور پادمتقارن است یعنی

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

حال اگر از تساوی $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$ استفاده کنیم اتحاد زیر را به دست می آوریم:

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \tag{۱۳}$$

این اتحاد برای هر تانسور پادمتقارنی برقرار است. اما در اینجا و برای تانسور شدت میدان معنای این اتحاد چیزی نیست جز نیمی از معادلات ماکسول. خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که تنها انتخاب هایی از اندیس های (μ, ν, α) که منجر به یک رابطه نابدیهی می شوند انتخاب هایی هستند که در آن هر سه اندیس با هم متفاوت باشند. به عنوان مثال داریم:

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0 \tag{۱۴}$$

که اگر آن را باز کنیم منجر به رابطه زیر می شود

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-B_z) + \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{c}E_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{c}E_x) = 0 \tag{۱۵}$$

و یا

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -\frac{\partial}{\partial t}B_z. \tag{۱۶}$$

اگر این رابطه را برای انتخاب های دیگری از اندیس ها یعنی $(0,1,3)$ و $(0,2,3)$ نیز تکرار کنیم به معادله زیر می رسیم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \tag{۱۷}$$

تنها انتخاب باقی مانده وقتی است که اندیس ها را به صورت $(1,2,3)$ می گیریم که منجر به معادله زیر می شود:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \tag{۱۸}$$

dh

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial y}B_y + \frac{\partial}{\partial z}B_z = 0 \tag{۱۹}$$

که به صورت فشرده چیزی نیست جز یک معادله اصلی از معادلات ماکسول:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{۲۰}$$

دو معادله ای که بدست آوردیم معادلاتی هستند که به چشمه میدان یعنی جریان و بار الکتریکی ربطی ندارند. این که میدان الکتریکی و مغناطیسی چگونه توسط بار الکتریکی و جریان الکتریکی تولید می شوند، در دو معادله دیگر ماکسول بیان می شوند. برای این که این دو معادله را با استفاده

از تانسور $F_{\mu\nu}$ بنورسیم، لازم است که چشمه میدان یعنی بار و جریان را هم به صورت یک چهاربردار بنویسیم. این چهار بردار را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$J_\mu = (c\rho, -\mathbf{J}). \tag{۲۱}$$

دو معادله دیگر ماکسول به صورت زیر قابل نوشتن هستند:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\nu. \tag{۲۲}$$

برای دیدن این موضوع یک بار اندیس ν را برابر با 0 می گیریم و بدست می آوریم:

$$\partial^\mu F_{\mu,0} = \mu_0 c\rho \tag{۲۳}$$

یا

$$\partial^1 F_{1,0} + \partial^2 F_{2,0} + \partial^3 F_{3,0} = \mu_0 c\rho \tag{۲۴}$$

اما با توجه به این که $F_{0i} = \frac{E_i}{c}$ و $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$ براحتی معلوم می شود که این معادله چیزی نیست جز:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{۲۵}$$

اگر اندیس ν را برابر با 1 بگیریم خواهیم داشت

$$\partial^\mu F_{\mu,1} = \mu_0 J_1 \tag{۲۶}$$

یا

$$\partial^0 F_{0,1} + \partial^2 F_{2,1} + \partial^3 F_{3,1} = \mu_0 J_1 \tag{۲۷}$$

که معادل است با

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}E_x - \frac{\partial}{\partial y}B_z - \frac{\partial}{\partial z}(-B_y) = \mu_0(-J_x). \tag{۲۸}$$

با مرتب کردن جملات بدست می آوریم

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}E_x-(\nabla\times B)_x=-\mu_0 J_x. \tag{۲۹}$$

اگر این کار را برای انتخاب های دیگر از اندیس ν نیز تکرار کنیم نتیجه همه معادلات را به صورت فشرده می توان نوشت:

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}. \tag{۳۰}$$

که معادله چهارم ماکسول است.

■ **تمرین:** تانسور کاملا پاد متقارن تانسوری است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\epsilon_{0123}=1 \tag{۳۱}$$

و به ازای هر جایگشتی از مولفه ها مقدار آن مولفه منفی می شود. به عنوان مثال

$$\epsilon_{0132}=\epsilon_{1023}=-1,\qquad \epsilon_{1032}=1. \tag{۳۲}$$

طبیعتا هر گاه دو اندیس یکسان باشند، مقدار آن مولفه صفر می شود. حال تانسور پادرمتقارن زیر را تعریف کنید:

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu,\nu,\alpha,\beta}F^{\alpha\beta} \tag{۳۳}$$

نشان دهید که معادلات ماکسول را می توانید به صورت زیر بنویسید.

$$\begin{aligned}\partial^\mu F_{\mu\nu} &= \mu_0 J_\nu\\ \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} &= 0.\end{aligned} \tag{۳۴}$$

۴ تبدیل میدان های الکتریکی و مغناطیسی بین دستگاه های مختلف

تمام درسی که از بخش قبل گرفتیم این بود که می توانیم معادلات ماکسول را به صورت تساوی تانسورها بنویسیم. به محض این که یک معادله را به این شکل می نویسیم معلوم می شود که شکل خود را در دستگاه های مختصات مختلف حفظ می کند چرا که هر دو طرف به یک شکل تبدیل می شوند و بنابراین در دستگاه دیگر هم عیناً همان معادله تانسوری برقرار می شود. این امر به ما امکان می دهد که با توجه به آنچه که در مورد تبدیل تانسورها می دانیم، بتوانیم تبدیل میدان های مغناطیسی و الکتریکی را براحتی بدست آوریم. می دانیم که یک تانسور به صورت زیر تبدیل می شود.

$$F_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F'_{\alpha\beta}. \tag{۳۵}$$

بدون نقض کلیت می توانیم محورهای مختصات را طوری بگیریم که سرعت دو دستگاه در جهت مثبت محور x باشد. در این صورت با توجه به این که $x^0 = ct$ داریم:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۳۶}$$

با پایین و بالابردن اندیس ها به کمک متریک $\eta_{\mu\nu}$ بدست می آوریم:

$$\Lambda_\mu{}^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۳۷}$$

حال به سراغ تبدیل مولفه ها می رویم و یک به یک تبدیل آنها را می نویسم. بدست می آوریم:

$$F_{0,1} = \Lambda_0{}^\alpha \Lambda_1{}^\beta F'_{\alpha\beta}. \tag{۳۸}$$

در طرف راست روی مولفه های α و β جمع زده می شود. اما با توجه به پادمتقارن بودن تانسور F و هم چنین شکل خاص تانسور Λ بسیاری از درایه ها صفر هستند و رابطه بالا تبدیل می شود به

$$F_{0,1} = {\Lambda_0}^0 {\Lambda_1}^\beta F'_{0\beta} + {\Lambda_0}^1 {\Lambda_1}^\beta F'_{1\beta} \tag{۳۹}$$

و از آنجا

$$F_{0,1} = {\Lambda_0}^0 {\Lambda_1}^1 F'_{01} + {\Lambda_0}^1 {\Lambda_1}^0 F'_{10}. \tag{۴۰}$$

با جایگذاری درایه ها بر حسب میدان ها بدست می آوریم:

$$\frac{1}{c}E_x = \gamma^2 \frac{1}{c}E'_x + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}(-\frac{1}{c}E'_x) = \gamma^2(1-\frac{v^2}{c^2})\frac{E'_x}{c} = \frac{1}{c}E'_x. \tag{۴۱}$$

و یا $E_x = E'_x$. این رابطه نشان می دهد که مولفه میدان الکتریکی که موازی با سرعت بین دو دستگاه است تغییر نمی کند. برای این که بفهمم مولفه های عمود بر سرعت بین دو دستگاه چگونه تغییر می کنند به یک مولفه دیگر توجه می کنیم:

$$\begin{aligned} F_{02} &= {\Lambda_0}^\alpha {\Lambda_2}^\beta F'_{\alpha\beta} \\ &= {\Lambda_0}^0 {\Lambda_2}^\beta F'_{0\beta} + {\Lambda_0}^1 {\Lambda_2}^\beta F'_{1\beta} \end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned} F_{02} &= {\Lambda_0}^0 {\Lambda_2}^2 F'_{02} + {\Lambda_0}^1 {\Lambda_2}^2 F'_{12} \\ &= \gamma F'_{02} - \gamma \frac{v}{c} F'_{12} \end{aligned} \tag{۴۳}$$

و یا پس از جایگذاری و ساده کردن

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_z) \tag{۴۴}$$

به همین شکل نیز مولفه دیگر را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} F_{03} &= {\Lambda_0}^{\alpha} {\Lambda_3}^{\beta} F'_{\alpha\beta} \\ &= {\Lambda_0}^{0} {\Lambda_3}^{\beta} F'_{0\beta} + {\Lambda_0}^{1} {\Lambda_3}^{\beta} F'_{1\beta} \end{aligned} \tag{۴۵}$$

$$\begin{aligned} F_{03} &= {\Lambda_0}^{0} {\Lambda_3}^{3} F'_{02} + {\Lambda_0}^{1} {\Lambda_3}^{3} F'_{12} \\ &= \gamma F'_{03} - \gamma \frac{v}{c} F'_{13} \end{aligned} \tag{۴۶}$$

و پس از ساده کردن

$$E_z = \gamma (E'_z - v B'_y) \tag{۴۷}$$

روابطی را که تا کنون بدست آورده ایم می توانیم به صورت فشرده بنویسیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{||} &= \mathbf{E'}_{||} \\ \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{E'}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{B'} \right). \end{aligned} \tag{۴۸}$$

البته هنوز تمام مولفه ها را در نظر نگرفته ایم. مولفه F_{12} را در نظر می گیریم. داریم:

$$F_{12} = {\Lambda_1}^{\alpha} {\Lambda_2}^{\beta} F'_{\alpha\beta} \tag{۴۹}$$

با در نظر گرفتن پادتقارن تانسور F و شکل تانسور Λ خواهیم داشت:

$$F_{12} = {\Lambda_1}^{0} {\Lambda_2}^{\beta} F'_{0\beta} + {\Lambda_1}^{1} {\Lambda_2}^{\beta} F'_{1\beta} \tag{۵۰}$$

و یا

$$F_{12} = {\Lambda_1}^{0} {\Lambda_2}^{2} F'_{02} + {\Lambda_1}^{1} {\Lambda_2}^{2} F'_{12} \tag{۵۱}$$

با جایگذاری مولفه ها:

$$B_z = \gamma(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y). \qquad (۵۲)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که :

$$B_y = \gamma(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z). \qquad (۵۳)$$

و بالاخره آخرین مولفه غیربدیهی

$$F_{23} = {\Lambda_2}^{\alpha}{\Lambda_3}^{\beta}F'_{\alpha\beta} = F'_{23} \qquad (۵۴)$$

و یا

$$B_x = B'_x. \qquad (۵۵)$$

همه این رابطه ها را می توان به شکل زیر خلاصه کرد:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{||} &= \mathbf{E}'_{||} \\
\mathbf{B}_{||} &= \mathbf{B}'_{||} \\
\mathbf{E}_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v}\times\mathbf{B}'\right) \\
\mathbf{B}_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}'\right).
\end{aligned} \qquad (۵۶)$$

این روابط تبدیل کامل میدان های الکتریکی و مغناطیسی را تحت تبدیلات لورنتز نشان می دهند. در بخش بعدی سعی می کنیم این روابط را با استدلال های ساده فیزیکی نیز بدست آوریم.

۵ تبدیلات میدان های الکتریکی و مغناطیسی در چند حالت ساده

در بخش قبلی تبدیلات میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در دستگاه های لخت متفاوت بدست آوردیم. در این بخش با مطالعه چند مثال نشان می دهیم که این تبدیلات چگونه با شهود فیزیکی ما و با قوانین ماکسول سازگار هستند. خواننده می تواند خود مثالهای دیگری را نیز بسازد که درک او را از این تبدیلات عمیق تر کند.

۱.۵ مثال اول:

خازنی را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید که در دستگاه لختِ S' ساکن است. روی صفحات این خازن بارهای مثبت و منفی با چگالی سطحی و یکنواخت σ_0 گذاشته شده است. چگالی سطحی بار را با σ_0 نشان داده ایم که تاکید کنیم این چگالی الکتریکی در حال سکون این صفحه است. از آنجا که این صفحه نسبت به ناظر S' ساکن است می توانیم بنویسیم $\sigma' = \sigma_0$. ممکن است این دقت و وسواس را اکنون درک نکنیم ولی در آینده خواهیم دید که اهمیت پیدا می کند. بنابر آنچه که از درسهای مقدماتی الکتریسته و مغناطیس یادگرفته ایم، در این صورت یک میدان الکتریکی در راستای محور y' ایجاد می شود که اندازه آن برابر است با:

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \qquad (۵۷)$$

دستگاه S' و در نتیجه این خازن با سرعت یکنواخت v نسبت به دستگاه S حرکت می کند. می خواهیم بفهمیم میدان الکتریکی ای که ناظر S' اندازه می گیرد چقدر است؟ برای این کار کافی است که توجه کنیم طول صفحه خازن در راستای حرکت به اندازه ضریب $\frac{1}{\gamma}$ کوچک می شود. در نتیجه چگالی بار الکتریکی به همان نسبت بزرگتر خواهد شد. بنابراین داریم:

$$\sigma = \gamma\sigma_0 = \gamma\sigma' \qquad (۵۸)$$

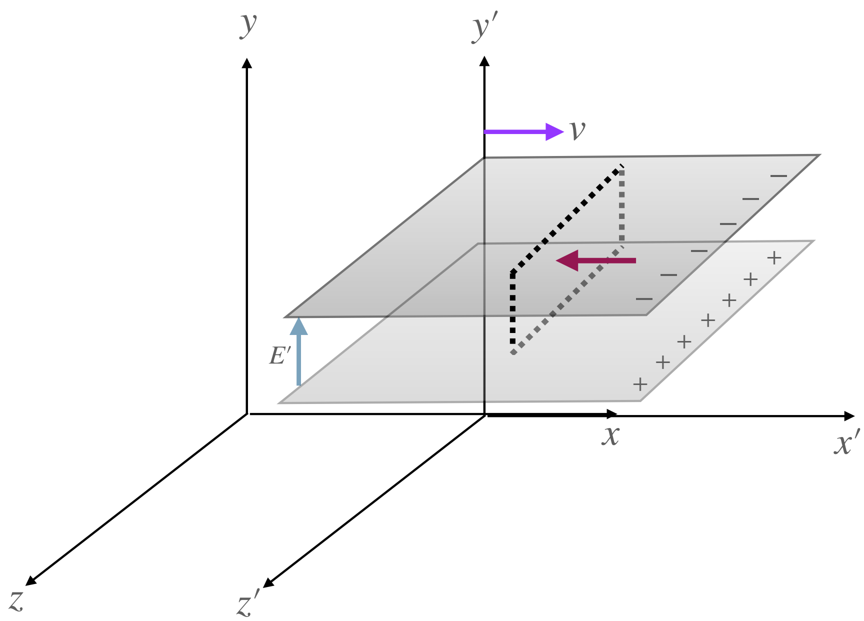
و در نتیجه

$$\mathbf{E}_y = \gamma \mathbf{E}'_y. \qquad (۵۹)$$

یا به طور کلی تر

$$\mathbf{E}_\perp = \gamma \mathbf{E}'_\perp. \qquad (۶۰)$$

این رابطه با آنچه که رابطه کلی (۵۶) بیان می کند مطابقت دارد. اما آن رابطه یک چیز دیگر هم می گوید و آن اینکه ناظر S می بایست یک میدان مغناطیسی هم ببیند که اندازه آن برابر است با $B_\perp = \gamma v E'$. چگونه می توانیم ظهور این میدان را برای ناظر S بفهمیم؟ برای این کار کافی



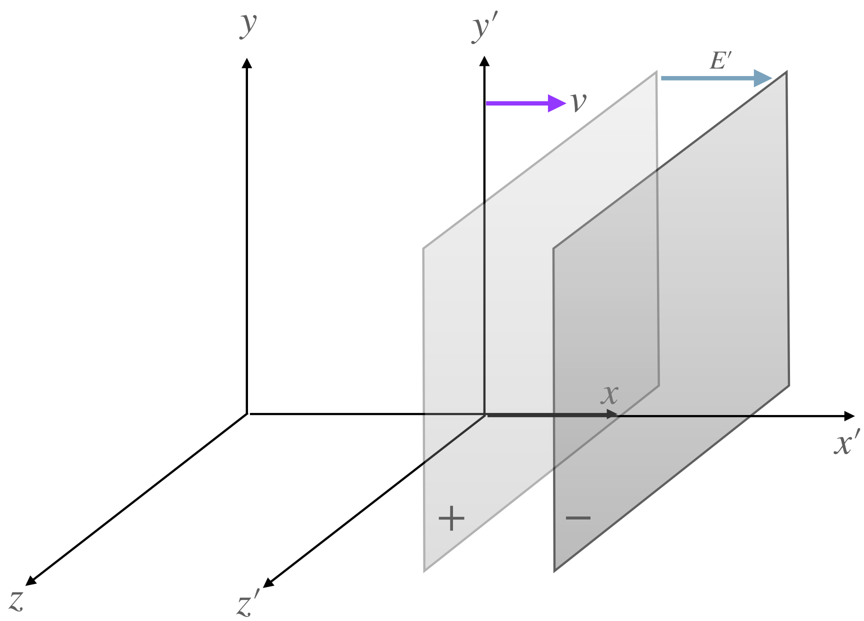
شکل ۱: یک خازن که در دستگاه S' ساکن است، در این دستگاه میدان الکتریکی تولید می کند. ولی در دستگاه S هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی ایجاد می کند.

است توجه کنیم که از دید ناظر S صفحه بالایی یک جریان الکتریکی به سمت چپ و صفحه پایینی یک جریان الکتریکی به سمت راست تولید می کند. می توانیم اندازه این جریان ها را بدست آوریم، از قانون آمپر استفاده کنیم و میدان مغناطیسی دیده شده توسط این ناظر را حساب کنیم.

به طور کلی چگالی جریان در واحد طول (یعنی مقدار باری که در هر ثانیه از واحد طول عبور می کند) برای یک تیغه که دارای چگالی سطحی σ است و با سرعت v حرکت می کند به سادگی بدست می آید. یک محاسبه ساده نشان می دهد این چگالی جریان برابر است با: $J = \sigma v$. از آنجا که $\sigma = \gamma\sigma'$ است، و با استفاده از قانون آمپر برای منحنی خط چینی که در شکل نشان داده شده است، بدست می آوریم:

$$B_z = \mu_0 J = \mu_0\gamma\sigma' v = \mu_0\epsilon_0\gamma v(\frac{\sigma'}{\epsilon_0}) = \gamma\frac{v}{c^2}E'_y. \qquad (۶۱)$$

و این همان چیزی است که معادله (۵۶) بیان می کند. می توانیم وضعیت این دو صفحه و جهت حرکت آنها را به شیوه های متفاوتی تصور کنیم و نشان دهیم که تبدیلات میدان های الکتریکی و مغناطیسی همان چیزی است که در معادلات (۵۶) بیان شده است. مطالعه تمام این مثال ها البته آموزنده است.



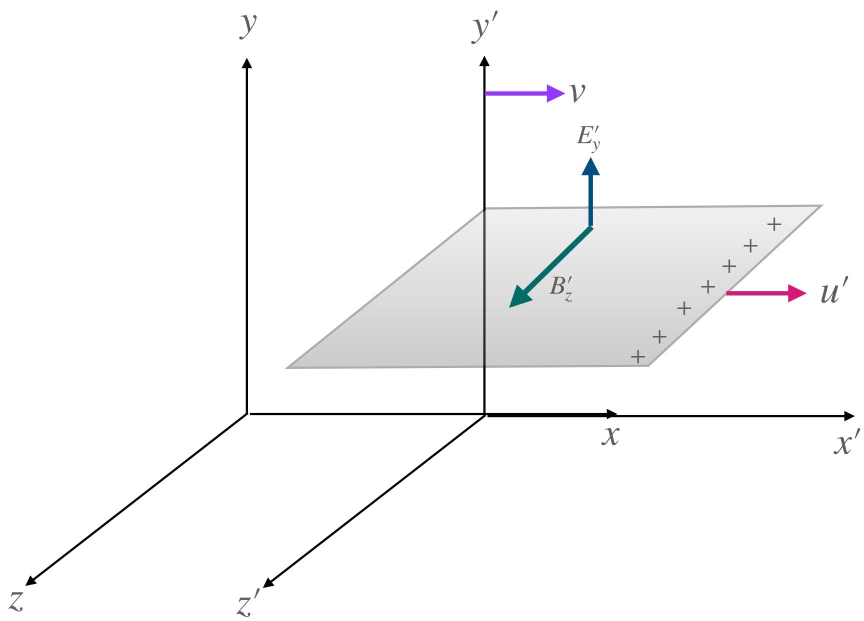
شکل ۲: یک خازن که در دستگاه S' ساکن است، در این دستگاه میدان الکتریکی موازی با جهت حرکت تولید می کند. سوال این است که از دید ناظر S چه نوع میدان هایی مشاهده می شود؟

۲.۵ مثال دوم:

حال وضعیتی را در نظر می گیریم که در شکل (۲) نشان داده شده است. میدان الکتریکی مشاهده شده در دستگاه S' برابر با $E'_x = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ است. از آنجا که طول ها در راستای عمود بر جهت سرعت تغییر نمی کنند، چگالی بار الکتریکی روی صفحات نیز تغییر نمی کند و از دید ناظر S نیز میدان الکتریکی به همان اندازه $\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ است. بنابراین داریم $E_x = E'_x$ یا

$$\mathbf{E}_{||} = \mathbf{E'}_{||}.$$

که همان چیزی است که در معادله (۵۶) بیان شده است.



شکل ۳: یک تیغه باردار در دستگاه S' در جهت نشان داده شده حرکت می کند. از دید ناظر S هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی وجود دارد. اما به دلایل سینماتیکی اندازه این میدان ها متفاوت است. می خواهیم اندازه این میدان ها را بدست آوریم.

۳.۵ مثال سوم:

حال یک وضعیت دیگر را در نظر می گیریم: این وضعیت در شکل (۳) نشان داده شده است. در این مثال از دید ناظر S تیغه در حال حرکت است. بنابراین چگالی بار آن با چگالی بار سکون آن متفاوت است. در واقع اندازه چگالی بار برابر است با

$$\sigma' = \gamma_{u'}\sigma_0. \tag{۶۲}$$

در نتیجه میدان الکتریکی ایجاد شده در دستگاه S' نیز برابر است با:

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \tag{۶۳}$$

اما این تیغه یک چگالی خطی جریان نیز دارد که اندازه آن برابر است با:

$$J' = \sigma' u' = \gamma_{u'}\sigma_0 u' \tag{۶۴}$$

این چگالی جریان میدان مغناطیسی ای ایجاد می کند که اندازه آن برابر است با:

$$B'_z = \mu_0 J' = \mu_0 \sigma' u' = \gamma \mu_0 \sigma_0 u'. \tag{۶۵}$$

حال به این وضعیت از دید ناظر S نگاه می کنیم. از دید این ناظر تیغه با سرعت $u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}$ حرکت می کند. بنابراین چگالی بار آن برابر است با:

$$\sigma = \gamma_u \sigma_0 \tag{۶۶}$$

اما در درسهای قبل نشان داده ایم که

$$\gamma_u = \gamma \gamma_{u'} (1 + \frac{u'v}{c^2}). \tag{۶۷}$$

بنابراین میدان الکتریکی در دستگاه S برابر است با:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\gamma_u \sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\gamma\gamma_{u'}(1+\frac{u'v}{c^2}) \\ &= \gamma(\frac{\gamma_{u'}\sigma_0}{\epsilon_0} + \frac{v}{c^2}\frac{\gamma_{u'}\sigma_0 u'}{\epsilon_0}) \end{aligned} \tag{۶۸}$$

حال از این استفاده می کنیم که $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ که در نتیجه آن

$$E_y = \gamma(\frac{\gamma_{u'}\sigma_0}{\epsilon_0} + v\mu_0\gamma_{u'}\sigma_0 u') = \gamma(E'_y + vB'_z) \tag{۶۹}$$

این رابطه دقیقا مطابق با رابطه تبدیل (۵۶) است. برای تکمیل این مثال می توانیم میدان مغناطیسی B_z را نیز بدست آوریم: می نویسیم:

$$\begin{aligned} B_z &= \mu_0 J = \mu_0(\gamma_u \sigma_0 u) = \mu_0\sigma_0\Big[\gamma\gamma_{u'}(1+\frac{u'v}{c^2}\Big](\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}) \\ &= \gamma\mu_0\sigma_0\gamma_{u'}(v+u') \\ &= \gamma\left(v\mu_0\epsilon_0\frac{\sigma_0\gamma_{u'}}{\epsilon_0} + \mu_0\sigma_0\gamma_{u'}u'\right) = \gamma(\frac{v}{c^2}E'_y + B'_z). \end{aligned} \tag{۷۰}$$

این رابطه نیز دقیقا همانی است که در (۵۶) آمده است.

■ **تمرین:** یک آزمایش نظیر مثال سوم در نظر بگیرید که بر مبنای آن بتوانید روابط زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} B_{||} &= B'_{||} \\ E_y &= \gamma(E'_y - vB'_z). \end{aligned} \tag{۷۱}$$

۶ میدان الکتریکی یک ذره باردار

ذره بارداری را در نظر بگیرید که در مرکز مختصات دستگاه S' ساکن است. در دستگاه S' میدان الکتریکی این ذره برابر است با:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'^3}\mathbf{r}'. \qquad (۷۲)$$

برای سادگی یک مقطع دو بعدی یعنی صفحه xy را در نظر می گیریم. در صفحه دو بعدی xy مولفه ها برابر است با:

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}x' \\ E'_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}y'. \end{aligned} \qquad (۷۳)$$

خطوط میدان الکتریکی در این دستگاه مطابق شکل (۴) نشان دهنده خطوط شعاعی است که از مرکز به بیرون کشیده شده اند و تقارن کروی را نیز به نمایش می گذارند. بنابر آن چه از معادلات (۵۶) آموخته ایم، میدان الکتریکی در دستگاه S دارای مولفه های زیر است:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x = \gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}x' \\ E_y &= \gamma E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}y'. \end{aligned} \qquad (۷۴)$$

و یا بر حسب خود مختصات دستگاه S،

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(\gamma(x-vt)) \\ E_y &= \gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y. \end{aligned} \qquad (۷۵)$$

برای سادگی در یک لحظه مثل لحظه صفر به این دو مولفه نگاه می کنیم: داریم

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\gamma^2x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\gamma x \\ E_y &= \gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\gamma^2x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y. \end{aligned} \qquad (۷۶)$$

نخست توجه می کنیم که

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \qquad (۷۷)$$

که به معنای آن است که میدان الکتریکی هم چنان به صورت شعاعی است. برای اینکه تصور بهتری از میدان الکتریکی این بار متحرک بدست آوریم ، از مختصات قطبی استفاده می کنیم. در این مختصات خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q}{r^2}\frac{\cos\theta}{(\gamma^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \\ E_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q}{r^2}\frac{\sin\theta}{(\gamma^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{۷۸}$$

که یک بار دیگر نشان می دهد

$$\frac{E_y}{E_x} = \tan\theta, \tag{۷۹}$$

اما علاوه بر آن نشان می دهد که اندازه میدان برابر است با:

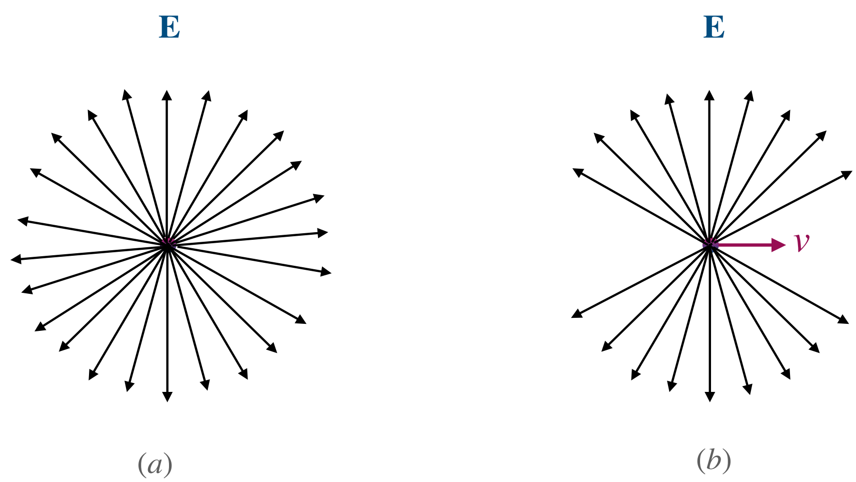
$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q}{r^2}\frac{1}{(\gamma^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \tag{۸۰}$$

این رابطه اخر نشان می دهد که اولا در هر زاویه معینی میدان بازهم به صورت عکس مجذور فاصله کاهش پیدا می کند. برای این که تصویری کلی از شکل خطوط میدان به دست آوریم، به زاویه های خیلی کوچک و یا خیلی نزدیک به $\frac{\pi}{2}$ توجه می کنیم. در زاویه های خیلی کوچک، می دانیم که $\sin\theta\approx 0$ و $\cos\theta\approx 1$. در نتیجه اندازه میدان الکتریکی تقریبا برابر است با $|\mathbf{E}|\approx\frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q}{r^2}$ که با ضریب $\frac{1}{\gamma^2}$ از میدان الکتریکی یک ذره باردار ساکن کوچک تر است. در زاویه های نزدیک به $\frac{\pi}{2}$ می دانیم که $\sin\theta\approx 1$ و $\cos\theta\approx 0$. و در نتیجه میدان الکتریکی تقریبا برابر است با: $|\mathbf{E}|\approx\gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma q}{r^2}$ که با ضریب γ از میدان الکتریکی یک ذره باردار ساکن بزرگتر است. به این ترتیب خطوط میدان الکتریکی ذره باردار متحرک شبیه به شکل (۴) می شوند که نشان می دهد خطوط میدان در راستای عمود بر جهت حرکت به هم فشرده شده و چیزی شبیه به یک پنکیک [۱] بوجود می آورند.

■ **تمرین:** پر انرژی ترین ذراتی که می شناسیم در اشعه کیهانی وجود دارند. بعضی اوقات انرژی این ذرات (احتمالا پروتون) به یک ژول نیز می رسد.

در چه فاصله ای از این ذره اندازه میدان الکتریکی به یک ولت بر متر می رسد؟

[۱] Pancake



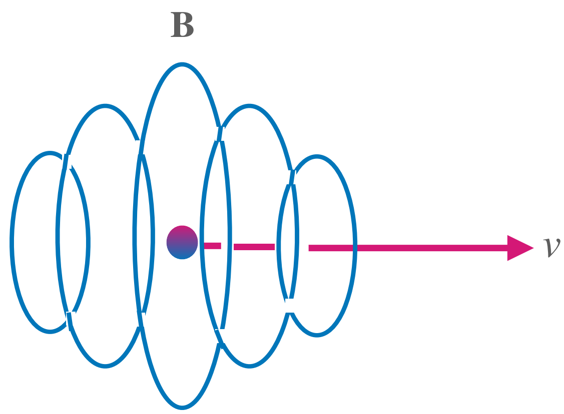
شکل ۴: شکل سمت چپ: خطوط میدان الکتریکی یک ذره باردار ساکن. شکل سمت راست: خطوط میدان الکتریکی یک ذره باردار که با سرعت ثابت v حرکت می کند.

این ذره باردار میدان مغناطیسی هم ایجاد می کند. میدان مغناطیسی آن را می توان از همان روابط (۵۶) بدست آورد. داریم:

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= \frac{v}{c^2}E'_z \\ B_z &= -\frac{v}{c^2}E'_y. \end{aligned} \qquad (۸۱)$$

بنابراین میدان مغناطیسی هیچ مولفه ای در راستای حرکت ذره ندارد و خطوط میدان آن به صورت دایره هایی هم مرکز عمود بر سرعت ذره هستند. به طور دقیق تر می توان اندازه مولفه های میدان را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= \frac{v}{c^2}\gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}z, \\ B_z &= -\frac{v}{c^2}\gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}y. \end{aligned} \qquad (۸۲)$$



شکل ۵: شکل کلی خطوط میدان مغناطیسی برای یک ذره باردار متحرک.

اگر در یک لحظه مثلا لحظه $t=0$ به مولفه های میدان نگاه کنیم، آن ها را به شکل زیر می بینیم:

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= \frac{v}{c^2}\gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}z, \\ B_z &= -\frac{v}{c^2}\gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}y. \end{aligned} \tag{۸۳}$$

این رابطه نشان می دهد که به ازای هر y و z ثابت، هرچقدر که اندازه x زیادتر می شود، میدان مغناطیسی کوچک تر شده و در نتیجه چگالی خطوط میدان مغناطیسی کم تر می شود و با فاصله گرفتن از موقعیت لحظه ای ذره اندازه میدان به سمت صفر میل می کند.

۷ مسئله ها

■ **مسئله اول:** یک سیم رسانا ی بسیار بلند در نظر بگیرید که در راستای محور x قرار دارد و جریان الکتریکی i در آن برقرار است. چگالی بار الکتریکی این سیم برابر با صفر است. این سیم در دستگاه S' ساکن است.

الف- در دستگاه S' میدان الکتریکی و مغناطیسی را در اطراف این سیم حساب کنید.

ب: دستگاه S' نسبت به دستگاه S در راستای محور x حرکت می کند. با استفاده از تبدیلات لورنتز یعنی روابط (۵۶) میدان های الکتریکی و مغناطیسی اطراف این سیم را در دستگاه S حساب کنید.

پ: با محاسبه دقیق چگالی جریان و چگالی بار الکتریکی در دستگاه S نشان دهید که چگونه میدان هایی که در قسمت پیشین حساب کرده اید بوجود می آیند.

■ **مسئله دوم:** روی یک سیم نازک نارسانا که سطح مقطع آن دایره ای است و شعاع آن 0.01 سانتی متر و طول آن 4 سانتی متر است، تعداد 5×10^8 تا الکترون اضافی به صورت یکنواخت پخش شده است.

الف: میدان الکتریکی را در دستگاه مختصاتی که سیم نسبت به آن ساکن است حساب کنید.

ب: میدان الکتریکی را در دستگاه مختصاتی که نسبت به سیم و هم جهت با راستای سیم با سرعت نه دهم سرعت نور حرکت می کند حساب کنید.

■ **مسئله سوم:** یک باریکه از الکترون ها که هر کدام انرژی 9.5 مگاالکترون ولت دارند و در مجموع جریانی معادل 0.05 میکروآمپر را بوجود اورده اند در خلاء حرکت می کند. پهنای این باریکه حدود یک میلی متر است. در درون باریکه یا نزدیکی آن نیز هیچ بار مثبتی وجود ندارد.

الف: در دستگاه مرجع آزمایشگاه، میدان الکتریکی را در فاصله یک سانتی متری این باریکه محاسبه کنید. فاصله هر الکترون تا الکترون بعدی را نیز در راستای باریکه پیدا کنید.

ب: همین محاسبه را در چارچوب مرجعی که نسبت به الکترون ساکن است تکرار کنید.

■ **مسئله چهارم:** یک ذره باردار با بار q را در نظر بگیرید که در جهت x با سرعت $0.8\ c$ حرکت می کند و وارد ناحیه ای می شود که در

آن یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای y قرار دارد. نشان دهید که مولفه x سرعت این ذره بار می بایست کاهش پیدا کند. بر سر مولفه x تکانه آن چه اتفاقی می افتد؟