درسنامه نظریه گروه، درس دوم: ساختارهای درون یک گروه

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۲۸ بهمن ۱۳۹۴

۱ مقدمه

گروه، علیرغم تعریف ساده‌ای که دارد، می تواند ساختاری بسیار غنی داشته باشد. شناختن این ساختارها به شناخت کل گروه کمک می کند. ضمناً چنانکه درهمین فصل خواهیم دید، خواص و قضایایی که ازاین قضایا نتیجه می شوند، نتایج بسیار جالبی در حوزه های دیگر ریاضیات مثلاً در نظریه اعداد دارند. دراین فصل با بعضی از این ساختارها آشنا می شویم. نخست با مفهوم زیر گروه[۱]، هم مجموعه‌های راست و چپ [۲] ، زیر گروه بهنجار[۳] و گروه خارج قسمت [۴] آشنا می شویم. هم چنین در پایان فصل با کلاس های تزویجی [۵] و سپس مرکز گروه [۶] آشنا می شویم. نیازی به گفتن نیست که دراین بررسی خود را به ساده ترین مفاهیم و ساده ترین مثال ها محدود کرده ایم.

[۱] Subgroup

[۲] Right and Left Cosets

[۳] Normal Subgroup

[۴] Quotient Group

[۵] Conjucacy Classes

[۶] Center of the Group

۲ زیر گروه

■ **تعریف:** هرگاه H یک زیرمجموعه دلخواه از گروه G باشد، آن رایک زیرگروه G می نامیم اگر خود یک گروه باشد.

■ **مثال:** هرگاه Z گروه اعداد صحیح باشد آنگاه به ازای هر n، nZ یعنی مجموعه اعدادی که مضرب عدد صحیحِ n هستند، یک زیر گروه تشکیل می دهد.

■ **مثال:** در گروه S_3 یعنی گروه جایگشت ها، مجموعه‌ی های $\{e, \sigma_1\}$ یا $\{e, \sigma_2\}$ هرکدام یک زیر گروه هستند.

■ **مثال:** در گروه $GL_n(R)$، $SL_n(R)$ یعنی مجموعه‌ی ماتریس های وارون پذیر با دترمینان برابر با یک زیر گروه است.

■ **مثال:** در گروه $GL_n(R)$ مجموعه ماتریس های بلوکه قطری که به صورت

$$\begin{pmatrix} g_1 \in GL_k(R) & 0 \\ 0 & g_2 \in GL_{n-k}(R) \end{pmatrix} \tag{۱}$$

هستند تشکیل یک زیر گروه می دهند. این زیر گروه با نماد $GL_k(R) \oplus GL_{n-k}(R)$ نشان می دهند.

■ تمرین: تمام زیر گروه های S_3 را تعیین کنید.

■ تمرین: تمام زیر گروه های S_4 را تعیین کنید.

■ **قضیه:** اگر H زیر مجموعه گروه G باشد، دراین صورت زیرگروه G است اگر و فقط اگر

الف : $\forall\ a,b \in H \quad ab \in H$

ب : $\forall\ a \in H \quad a^{-1} \in H$.

اثبات : اگر H یک زیرگروه باشد بوضوح خاصیت های الف و ب برقرارهستند. حال فرض کنید که خاصیت های الف و ب برقرارباشند. دراین صورت از ترکیب الف و ب به ازای $b = a^{-1}$ نتیجه می گیریم که $e \in H$ و درنتیجه H زیرگروه می شود.

■ **قضیه:** اگر G یک گروه متناهی و H زیرمجموعه آن باشد، آنگاه H یک زیرگروه است اگر و فقط اگر

الف : $\forall\ a,b \in H \quad ab \in H$.

به عبارت دیگر برای گروه های متناهی دیگر شرط ب در قضیه اول ضروری نیست.

اثبات: اگر H تنها یک عضو e داشته باشد که به طور بدیهی H زیر گروه می شود. بنابراین فرض می کنیم که عضوی مثل $a \neq e$ درH و جود دارد و رشته اعضای $a, a^2, a^3, \cdots$ را درنظر می گیریم. بنابرفرض الف تمام اعضای این رشته درH قراردارند. ازآنجا که گروه G متناهی است ، تمام اعضای این رشته نمی توانند باهم متفاوت باشند و بنابراین به ازای یک m و $n > m$ دراین رشته خواهیم داشت :

$$a^m = a^n, \tag{۲}$$

و ازآنجا باضرب کردن طرفین در $a^{-1} \in G$ بدست می آوریم:

$$a^{n-m} = e. \tag{۳}$$

پس عضو واحد گروه درون H است. هم چنین نتیجه می گیریم که عضو $a^{-1} = a^{n-m-1}$. پس معکوس یک عضو $a \in H$ نیز درون خود H است. بااضافه کردن این دو خاصیت به الف نتیجه می گیریم که H یک زیرگروه است.

۱.۲ مثال های بیشتری از زیرگروه ها

- **مثال:** هرگاه S یک مجموعه دلخواه و $A(S)$ گروه نگاشت های وارون پذیر روی آن باشد آنگاه به ازای هرنقطه دلخواه $x_0 \in S$ یک زیرگروه $H_{x_0} \subset A(S)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_{x_0} := \{\phi \in A(S) | \phi(x_0) = x_0\}. \qquad (۴)$$

این مثال را می توان به این شکل نیز تعمیم داد که اگر $S_0 \subset S$ آنگاه مجموعه تمام نگاشت هایی که نقاط S_0 را به نقاطی از S_0 می نگارند تشکیل یک زیرگروه می دهند. این زیرگروه را با H_{S_0} نمایش می دهیم.

- **مثال:** هرگاه G یگ گروه و $a \in G$ عضوی از آن باشد آنگاه تعریف می کنیم:

$$\langle a \rangle := \{g \in G | g = a^i, \quad for \quad some \quad i \in Z\}. \qquad (۵)$$

دراین صورت $\langle a \rangle$ یک زیرگروه G است و زیرگروه تولید شده توسط a خوانده می شود.

- تمرین: الف: G را گروه جایگشت های مجموعه ی $\{1, 2, 3\}$ در نظر بگیرید. زیر گروه H_1 را بدست آورید.

ب: G را گروه جایگشت های مجموعه ی $\{1, 2, 3, 4\}$ در نظر بگیرید. زیر گروه $H_{\{1,2\}}$ را بدست آورید.

■ **مثال:** هرگاه G یک گروه و W یک زیر مجموعه G باشد، $\langle W\rangle$ را مجموعه همه عنصرهایی می گیریم که قابل نمایش به صورت حاصل ضرب عنصرهایی از W باشند که به نماهای مثبت، منفی یا صفر رسیده باشند. دراین صورت $\langle W\rangle$ زیرگروه تولید شده توسط W نامیده می شود.

■ **مثال:** روابط زیر بین گروه های ماتریسی برقرار است: خواننده می تواند صحت این روابط را تحقیق کند:

$$SO_n(R) \subset O_n(R) \subset GL_n(R) \subset GL_n(C), \tag{۶}$$

$$SU_n(C) \subset U_n(C) \subset GL_n(C). \tag{۷}$$

۳ هم مجموعه ها

در حساب مقدماتی با مفهوم هم باقیمانده ها آشنا شده‌ایم. می گوییم دو عدد p و q نسبت به عددِ n هم باقیمانده‌اند اگر تفاضل آنها مضربی از n باشد، یعنی $p-q=kn$. هم باقیماندگی یک رابطه هم ارزی است و به این ترتیب تمامی اعداد صحیح به n کلاس هم ارزی متمایز تقسیم می شوند. می دانیم که مفهوم هم باقیماندگی در حساب دارای اهمیت زیادی است. آیا می توان این مفهوم را گسترش داد؟ پاسخ آن مثبت است. در واقع هرگاه به این مفهوم از دیدگاه نظریه گروه نگاه کنیم راه تعمیم آن نیز روشن می شود. کافی است که دقت کنیم که مجموعه اعداد صحیح یک گروه است که آن را با Z و مجموعه مضاربِ n نیز یک گروه است که آن را با nZ نمایش می دهیم. بنابراین مفهوم هم باقیماندگی به این صورت است که هر دو عددِ p و q در گروه Z هم ارزند هرگاه تفاضل آنها در زیر گروهِ nZ باشند. به عبارت دیگر داریم

$$p\sim q \qquad \leftrightarrow \qquad p+(-q)\in nZ. \tag{۸}$$

با توجه به این مطالب می توانیم مفهوم هم باقیماندگی یا به طور کلی هم ارزی نسبت به یک زیر گروه را تعریف کنیم.

■ **تعریف:** هرگاه H یک زیرگروه G باشد آنگاه

$$a \sim_R b \ \ mod\ H \qquad \leftrightarrow \qquad ab^{-1} \in H. \tag{۹}$$

اثبات این که این رابطه یک رابطه هم ارزی است، آسان است. با توجه به رابطه بالا، هرگاه $a \sim_R b$، آنگاه یک $h \in H$ وجود دارد به این معنی که $a = bh$ یا $b = ah^{-1}$. بنابراین هر دو عضوی که هم ارز باشند، هرکدام را می توان به صورت حاصل ضرب راستِ دیگری در یک عضو از H نوشت. این امر نامگذاری $\sim_R$ را توجیه می کند. هرگاه بخواهیم تمام عناصری را که بایک عنصر مثل a هم ارز هستند، پیدا کنیم می بایست تمام عناصر h را از طرف راست در آن ضرب کنیم. به این ترتیب یک زیر مجموعه از گروهِ G بدست می آید به صورت زیر

$$aH := \{ah \qquad | \qquad h \in H\}. \tag{۱۰}$$

این مجموعه یک هم مجموعه راست a [۷] خوانده می شود. اعضای آن همه با هم، هم ارز هستند. هر عضوی که با a هم ارز باشد نیز دراین مجموعه‌است. ضمناً بین aH و H یک تناظر یک به یک برقراراست. زیرا نگاشت پوشا و یک به یکِ زیر را می توان بین H و aH برقرار کرد:

$$\phi : H \longrightarrow aH, \qquad \phi(x) = xh. \tag{۱۱}$$

برخواننده است که یک به یک بودن و پوشا بودنِ این نگاشت را ثابت کند. از این قضیه و اثبات می توان نتیجه گرفت که رابطه‌ی یک به یک بین همه‌ی هم مجموعه‌های راست وجود دارد. این تناظر را به شکل مستقیم نیز می توان ثابت کرد.

■ تمرین : ثابت کنید که هر رابطه ی هم ارزی در یک مجموعه ، آن را به کلاس های هم ارزی افراز می کند.

دقت کنید که به دلیل اینکه گروه می تواند غیر آبلی باشد، دو نوع رابطه هم ارزی می توانیم تعریف کنیم که تعریف دوم به شکل زیراست:

---

[۷] Right Coset of a

تعریف: هرگاه H یک زیرگروه G باشد آنگاه

$$a \sim_L b \ \ mod\ H \qquad \leftrightarrow \qquad a^{-1}b \in H. \tag{۱۲}$$

دقت کنید که هر کدام از روابطِ $\sim_R$ و $\sim_L$ جداگانه روابط هم ارزی هستند ولی نمی توان از یکی دیگری را نتیجه گرفت. بنابراین این دو رابطه یک گروه را به دو شکل متفاوت افراز می کنند. به همان ترتیبی که هم مجموعه راست از a را تعریف کردیم می توانیم هم مجموعه چپ a [۸]

را نیز تعریف کنیم یعنی

$$Ha := \{ha \qquad\qquad | \qquad\qquad h \in H\}. \tag{۱۳}$$

از این که هم مجموعه‌ها همه تناظر یک به یک با زیرگروه H دارند به یک نتیجه مهم می رسیم و آن اینکه اگر زیرگروهِ H متناهی باشد، آنگاه تمام هم مجموعه ها تعداد اعضایشان با مرتبه‌ی H یا همان تعداد عناصر H برابر است. این مشاهده ما را به قضیه مهمی موسوم به قضیه لاگرانژ می رساند:

- **قضیه لاگرانژ:** هرگاه G گروهی متناهی و H یک زیرگروه آن باشد آنگاه $|H| \mid |G|$.

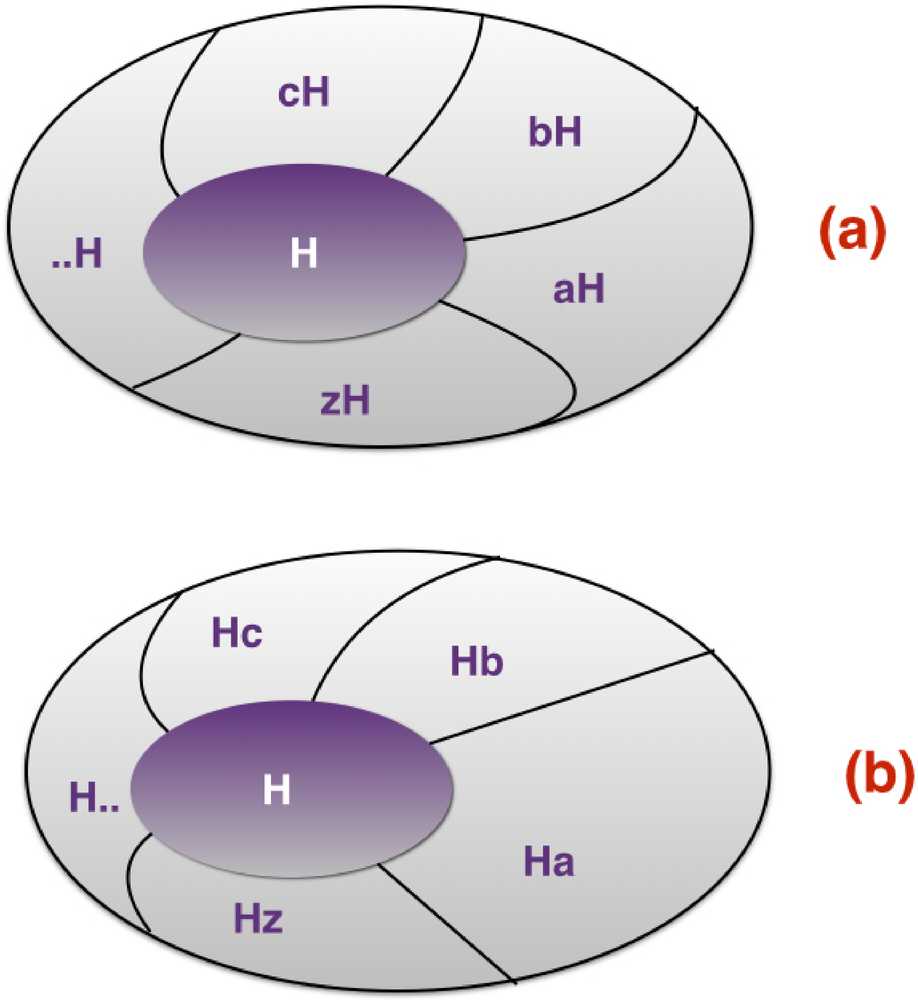
- **تعریف:** هرگاه $a \in G$ یک عضو از یک گروه باشد، به کوچکترین عدد m که دررابطه $a^m = e$ صدق کند، مرتبه a می گوییم و آن را با $|a|$ نمایش می دهیم. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد می گوییم مرتبه a نامتناهی دارد.

- **قضیه:** مرتبه یک عضو مرتبه گروه را می شمارد، به عبارت دیگر

$$\forall \ a \in G \quad |a| \mid |G|. \tag{۱۴}$$

اثبات: مجموعه $\langle a \rangle := \{e, a, a^2, \cdots\}$ را درنظر می گیریم. این مجموعه می بایست متناهی باشد. با استدلالی که درمورد دومین قضیه این درس کردیم نتیجه می گیریم که $\langle a \rangle$ یک زیر گروه G از مرتبه $|a|$ است و بنابرقضیه قبل نتیجه می

[۸] Left Coset of a



شکل ۱: a: هم مجموعه های راست عناصر گروه. برای بدست آوردن هم مجموعه راست یک عنصر مثل a کافی است که این عنصر را از راست در تمام عناصر H ضرب کرد. b: هم مجموعه های چپ عناصر گروه. برای بدست آوردن هم مجموعه چپ یک عنصر مثل a کافی است که این عنصر را از چپ در تمام عناصر H ضرب کرد.

گیریم که $|a|$ $|G|$ را می شمارد.

از این قضیه دو نتیجه می گیریم:

■ نتیجه یک:

$$\forall\, a \in G \quad a^{|G|} = e. \qquad (۱۵)$$

اثبات: در قضیه قبل دیدیم که مرتبه‌ی a مرتبه گروه را می شمارد یعنی عدد صحیحی مثل k وجود دارد به قسمی که $|G|=k|a|$. حال نتیجه می گیریم

$$a^{|G|}=a^{k|a|}=e^k=e. \tag{۱۶}$$

- **نتیجه دو:** (قضیه اویلر) اگر n یک عدد صحیح مثبت و عدد a نسبت به آن اول باشد آنگاه

$$a^{\phi(n)}\equiv 1 \quad mod \;\; n, \tag{۱۷}$$

که درآن $\phi(n)$ تعداد اعدادکوچکتراز n است که نسبت به n اول هستند.

اثبات: می دانیم که Z_n^* با عمل ضرب یک گروه است. مرتبه این گروه یعنی تعداد اعدادصحیح کوچکتراز n که نسبت به آن اول هستند. این تعداد برابراست با $\phi(n)$. حال اگر a عددی بزرگ تراز n باشد باقیمانده تقسیم آن بر n را با a' نشان می دهیم و درنتیجه $a=kn+a'$ که a' عددی است که نسبت به n اول است (زیرااگر چنین نباشد a نیز نسبت به n اول نخواهد بود،)و ازآن نیز کوچکتراست. درنتیجه $a'\in Zn^*$. باتوجه به نتیجه یک خواهیم داشت:

$$a'^{\phi(n)}\equiv 1 \quad mod \;\; n. \tag{۱۸}$$

حال باجایگذاری $a'=a-kn$ واستفاده از بسط دو جمله ای بدست می آوریم که

$$a^{\phi(n)}\equiv 1 \quad mod \;\; n. \tag{۱۹}$$

- **نتیجه سه:** (قضیه کوچک فرما) اگر p عددی اول باشد و a هرعدددلخواهی باشد آنگاه

$$a^p\equiv a \quad mod \quad p. \tag{۲۰}$$

اثبات: اگر a نسبت به p اول نباشد، چون p خود عدداول است، معنایش این است که به طور کامل دارای فاکتور p است و بنابراین برآن قابل تقسیم است. درنتیجه خواهیم داشت $a^p\equiv a\equiv 0 \quad mod \;\; p$. اگر a نسبت به p اول نباشد آنگاه

بااستفاده از قضیه اویلر و اینکه $\phi(p) = p - 1$، خواهیم داشت

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad mod \quad p, \tag{۲۱}$$

و ازآنجا باضرب کردن طرفین در a بدست می آوریم که $a^p \equiv a \quad mod \quad p$. درنتیجه برای هر عدد دلخواه a تساوی 20 را ثابت کرده ایم.

- **قضیه:** هرگاه G گروهی متناهی و ازمرتبه عدد اول p باشد، آنگاه G یک گروه دوری است.

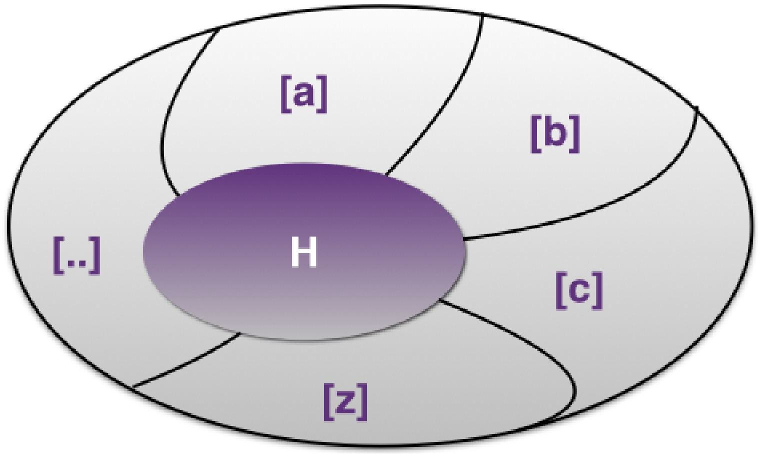
اثبات: اگر G عضوی غیر از e نداشته باشد که قضیه بدیهی است. پس فرض می کنیم که عضوی غیراز e مثل a دارد. می دانیم که $\langle a \rangle := \{e, a, a^2, \cdots\}$ یک زیرگروه G است. چون گروه G متناهی است، این زیرگروه نیز باید متناهی باشد. اگر مرتبه آن از مرتبه G کمترباشد باید عدد p را بشمارد که باتوجه به اول بودن عدد p تنها وقتی ممکن است که مرتبه آن مساوی با خود p باشد. درنتیجه زیرگروه $\langle a \rangle$ با خود G یکی می شود و G گروه دوری می شود.

۴ زیر گروه های بهنجار و گروه های خارج قسمت

دیدیم که برای یک زیرگروه دلخواه، هم مجموعه‌های چپ و راست لزوماً یکی نیستند. در حالت خاصی یک زیر گروه، هم مجموعه های چپ و راست اش با هم یکسان خواهند بود. به عبارت دیگر از رابطه‌ی $a \sim_L b$ می توان رابطه‌ی $a \sim_R b$ را نتیجه گرفت. وقتی که تعریف این دو رابطه هم ارزی را در نظر بگیریم براحتی می توانیم خاصیت این زیر گروه های ویژه را پیدا کنیم. کافی است که به ازای هر $b \in G$ و هر $h \in H$ بتوانیم bh را به صورتِ $h'b$ بنویسم که در آن h' عضو دیگری از زیر گروهِ H است. این خاصیت را در تعریف زیر بیان می کنیم:

- **تعریف:** زیر گروه H از گروه G را بهنجار می گوییم هرگاه

$$\forall \ \ g \in G, \ \ \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H. \tag{۲۲}$$



شکل ۲: برای یک زیرگروه بهنجار، هم مجموعه راست هر عضو با هم مجموعه چپ آن عضو برابر است. یعنی $aH = Ha = [a]$.

برای چنین زیر گروهی یک هم مجموعه راست یک هم مجموعه چپ نیز هست . در واقع داریم:

■ **قضیه:** اگر H زیر گروهِ بهنجارِ G باشد آنگاه به ازای هر a، $aH = Ha$.

اثبات: نخست ثابت می کنیم که $aH \subset Ha$:

$$if \quad x \in aH \longrightarrow x = ah \quad \longrightarrow \quad x = h'a \quad x \in Ha, \quad \longrightarrow \quad aH \subset Ha. \qquad (۲۳)$$

با همین استدلال می توان ثابت کرد که $Ha \subset aH$ و در نتیجه قضیه ثابت می شود.

■ **قضیه:** زیر گروه H از G بهنجاراست اگر و فقط اگر

$$\forall \quad g \in G \quad gHg^{-1} = H. \qquad (۲۴)$$

اثبات: فرض کنید که زیر گروه بهنجاراست. بنابرتعریف واضح است که $gHg^{-1} \subset H$. حال باید ثابت کنیم که $H \subset gHg^{-1}$. برای این کار یک عضو مثل $h \in H$ درنظرمی گیریم . می نویسیم:

$$h = g(g^{-1}hg)g^{-1} = gh'g^{1} \in gHg^{-1}, \qquad (۲۵)$$

که در تساوی وسط از بهنجاربودن H استفاده کرده ایم. بنابراین ثابت کرده ایم که H و gHg^{-1} زیر مجموعه یکدیگر هستند ودرنتیجه این دوباهم مساوی هستند. حال فرض کنید که شرط بالابرقراراست. آنگاه بهنجاربودن زیرگروه H

واضح می شود.

قبلاً ثابت کردیم که اگر یک زیر گروه بهنجارباشد، آنگاه یک هم مجموعه چپ یک هم مجموعه راست نیز هست و بالعکس. آیا وارون این خاصیت نیز برقراراست؟ یعنی اگر یک زیر گروه چنان باشد که هر هم مجموعه‌چپ آن هم مجموعه راست اش نیز باشد و بالعکس، آیا می توان نتیجه گرفت که آن زیر گروه بهنجاراست. پاسخ این سوال مثبت است و در قضیه زیر داده شده است.

■ **قضیه:** زیرگروه H در G بهنجاراست اگر و فقط اگر هر هم مجموعه چپ H درG یک هم مجموعه راست H در G باشد.

اثبات: یک طرف این قضیه را در همان ابتدا ثابت کردیم. اینک طرف دیگرش را می بایست ثابت کنیم. یعنی فرض می کنیم که هر هم مجموعه چپ یک هم مجموعه راست است ، یعنی $Ha = aH$. دراین صورت یک عضو دلخواه مثل $g \in G$ درنظر می گیریم

$$aHa^{-1} = aa^{-1}H = H, \qquad (۲۶)$$

و باتوجه به قضیه قبل نتیجه می گیریم که H یک زیرگروه بهنجاراست.

۱.۴ مثالهایی از زیر گروه های بهنجار

مسلم است که هر گروه دو زیر گروه بهنجار بدیهی دارد، یکی زیرگروه تک عضوی $\{e\}$ و دیگری خود گروه. هم چنین بدیهی است که هر زیر گروه از یک گروه آبلی حتماً بهنجار است. علاوه براین مثالهای ساده می توان به مثال های زیر توجه کرد.

■ **مثال:** در گروه $GL_n(C)$ زیر گروهِ $SL_n(C)$ یعنی زیرگروه ماتریس های با دترمینان واحد یک زیر گروه بهنجاراست.

■ **مثال:** در گروه $SL_2(C)$ زیر گروه شامل ماتریس های I و $-I$ یک زیر گروه بهنجار است.

۲.۴ گروه های خارج قسمت

هرگاه H یک زیرگروه بهنجاراز گروه G باشد هرهم مجموعه چپ آن هم مجموعه راست نیزخواهد بود. بنابراین بجای نماد Ha یا aH، نماد ساده $[a]$ را بکارمی بریم و آن را یک کلاس می نامیم. مجموعه تمام این کلاس ها را با G/H نشان می دهیم و بین کلاس ها عمل ضرب زیر را تعریف می کنیم: $[a][b] := [ab]$. با این تعریف G/H تبدیل به یک گروه می شود که آن را گروه خارج قسمت یا $Qutient\ \ Group$ می گوییم. ضرب تعریف شده دربالا به دلیل بهنجاربودن زیرگروه خوش تعریف است ودارای ابهام نیست. اثبات این امر را به عهده خوانند ه می گذاریم. هم چنین از این تعریف ضرب می توان نتیجه گرفت که عضو خنثی گروه G/H عبارت است از $[e]$ و وارونِ عضو $[g]$ عضو $[g^{-1}]$ است. با توجه به این که عناصر گروهِ G/H همان هم مجموعه‌ها هستند، نتیجه می گیریم که مرتبه‌ی گروه $|G/H|$ برابر است با $|G|/|H|$.

۳.۴ مثال هایی از گروه های خارج قسمت

الف: G راگروه اعداد صحیح باعمل جمع و H را زیرگروهی ازآن می گیریم که ازاعداد صحیح به مضرب n تشکیل شده است، یعنی $H = nZ$. ازآنجا که Z آبلی است زیرگروه H حتماً بهنجاراست. زیرگروه H دارای هم مجموعه ها یا کلاس های زیراست:

$$[k] := k + H = k + nZ = \{k + nx, |x \in Z\}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots n - 1. \qquad (۲۷)$$

درواقع $[k]$ کلاس همه اعدادی است که باقیمانده تقسیم آنها بر n برابراست با k. حال مطابق تعریف داریم

$$[k] + [l] = [k + l], \tag{۲۸}$$

وازآنجاکه $[k + n] = [k]$ نتیجه می گیریم که جمع بالا به سنج n انجام می گیرد. بنابراین مجموعه کلاس ها یعنی G/H یا Z/nZ همان گروه دوری Z_n است:

$$Z/nZ \equiv Z_n. \tag{۲۹}$$

ب: G راگروه ماتریس های یکانی دو دردو یا $U(2)$ می گیریم و H را زیرگروه $SU(2)$ که ازماتریس های یکانی با دترمینان 1 تشکیل شده است. این زیرگروه بهنجاراست زیرا اگر $h \in SU(2)$ آنگاه $det(h) = 1$ و $det(ghg^{-1}) = deth = 1$. حال به ازای هر $\phi \in [0, 2\pi]$ ماتریس

$$g = e^{i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(2)$$

و کلاس

$$[g] = gH = \{gh \in U(2) | det(g) = e^{i\phi}\} \tag{۳۰}$$

کلاسی از ماتریس های $U(2)$ که دترمینان آنها برابراست با $e^{i\phi}$. می توانیم این کلاس را با $[e^{i\phi}]$ نشان دهیم. هرگاه عضوی از کلاس $[e^{i\phi}]$ را درعضوی از کلاس $[e^{i\phi}]$ ضرب کنیم عضوی بدست می آید که دترمینان آن برابراست با حاصلضرب دترمینان ها یعنی عضوی از کلاس $[e^{i\phi+i\phi'}]$. بنابرتعریف ضرب درگروه خارج قسمت داریم:

$$[e^{i\phi}][e^{i\phi'}] := [e^{i\phi+i\phi'}]. \tag{۳۱}$$

درنتیجه گروه تشکیل شده از کلاس ها با گروه $U(1)$ یعنی گروه اعداد یکانی (فازهای خالص) یکسان است، یعنی

$$U(2)/SU(2) \equiv U(1). \tag{۳۲}$$

این نتیجه باهمین استدلال تعمیم پیدامی کند به :

$$U(n)/SU(n) \equiv U(1). \qquad (۳۳)$$

ج: G راگروه ماتریس های یکانی دو دردو یا $U(2)$ می گیریم و H را زیرگروهی ازآن که ازماتریس های متناسب با واحد تشکیل شده است

$$H = \{g | g = e^{i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \qquad (۳۴)$$

این گروه به وضوح باگروه $U(1)$ یکسان است . درضمن بهنجارهم هست. حال به ازای هر $g \in U(2)$ کلاس $[g]$ ازماتریس های به شکل $e^{i\frac{\phi}{2}}g$ تشکیل شده است که حتماً دارای یک عضو با دترمینان یک هست. این کلاس را می توان باهمان نماینده مشخص کرد. درنتیجه کلاس ها بااعضای $SU(2)$ تناظریک به یک پیدامی کنند. بنابراین ثابت کرده ایم که:

$$U(2)/U(1) \equiv SU(2). \qquad (۳۵)$$

این نتیجه باهمین استدلال تعمیم پیدامی کند به

$$U(n)/U(1) \equiv SU(n). \qquad (۳۶)$$

۵ کلاس های تزویجی

یکی دیگر از ساختارهای مهم در درون گروه که به خصوص در نظریه نمایش گروه های متناهی اهمیت دارد، کلاس های تزویجی است. برخلاف هم مجموعه‌ها که وابسته به یک زیر گروه خاص هستند، کلاس های تزویجی مستقل از هر زیرگروهی تعریف می شوند.

تعریف: گروه G را در نظر بگیرید. می گوییم دو عضو $a, b \in G$ با هم هم ارز هستند هرگاه یک عضوی از G وجود داشته باشد به قسمی که $b = gag^{-1}$. به عبارت دیگر می نویسیم

$$a \sim b \quad \leftrightarrow \quad \exists\, g \in G, \quad | \quad b = gag^{-1}. \tag{۳۷}$$

واضح است که این رابطه یک رابطه هم ارزی است. خواننده براحتی می تواند این گزاره را ثابت کند. می دانیم که هر رابطه هم ارزی یک مجموعه را به کلاس های هم ارزی افراز می کند. هرکدام از این کلاس ها یک کلاس تزویجی نامیده می شود. در یک گروه آبلی هر عضو گروه خود یک کلاس تزویجی است ولی در گروه های غیر آبلی چنین نیست. هم چنین هیچ تناظر یک به یکی بین کلاس های تزویجی مختلف وجود ندارد یعنی اینکه کلاس های مختلف می توانند تعداد اعضایشان متفاوت باشد. برای آنکه کلاس عناصری را که با عنصر $a \in G$ مزدوج هستند بدست بیاوریم کافی است که مجموعه زیر را بدست بیاوریم

$$C_a := \{gag^{-}1 \quad | \quad g \in G\}. \tag{۳۸}$$

به این ترتیب یک کلاس تزویجی بدست می آید که اعضای آن همه با هم رابطه تزویجی دارند و هم ارزند. دقت کنید که تعداد اعضای این مجموعه لزوماً با تعداد اعضای گروه یکی نیست.

مثال: در گروه S_3 با مولد های σ_1 و σ_2 کلاس های تزویجی عبارتند از:

$$C_1 = \{e\}, \qquad C_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\}, \qquad C_3 = \{\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\}. \tag{۳۹}$$

۶ مرکز یک گروه

■ **تعریف** مرکز یک گروه[۹] عبارت از مجموعه عناصری از گروه است که با همه عناصر گروه جابجا می شوند.

$$Z(G) := \{z \in G | zg = gz \quad \forall g \in G\}. \tag{۴۰}$$

[۹] Center of the Group

■ **قضیه:** مرکز یک گروه یک زیرگروه بهنجار آن است. درواقع مرکز یک گروه همواره یک زیرگروه آبلی است.

اثبات: نخست ثابت می کنیم که مرکز یک زیرگروه است. فرض کنید که z_1, z_2 متعلق به مرکز باشند و $g \in G$ یک عضو دلخواه از گروه باشد. دراین صورت

$$(z_1 z_2)g = z_1(z_2 g) = z_1(g z_2) = (z_1 g)z_2 = (g z_1)z_2 = g(z_1 z_2). \tag{۴۱}$$

پس مرکز گروه نسبت به ضرب بسته است. حال فرض کنید که $z \in Z$ یک عضو از مرکز گروه باشد. دراین صورت داریم $zg = gz$ و باضرب کردن دو طرف از چپ و راست در $z^{-1} \in G$ و استفاده از شرکت پذیری گروه و خاصیت عضو خنثی بدست می آوریم که $gz^{-1} = z^{-1}g$. بنابراین بدست می آوریم که $z^{-1} \in Z$. درنتیجه مرکز یک گروه خود یک زیرگروه می شود. حال ثابت می کنیم که Z یک زیرگروه بهنجاراست. فرض کنید که $z \in Z$ و $g \in G$ به ترتیب دو عضو دلخواه از مرکز گروه و خود گروه باشند. دراین صورت $gzg^{-1} = z$. این امر بهنجاربودن زیرگروه را ثابت می کند.

$$gzg^{-1} = z. \tag{۴۲}$$

■ **مثال:** مرکز گروهِ S_3 عبارت است از $Z(S_3) = \{e\}$.

■ **مثال:** مرکز گروهِ $SU(2)$ عبارت است از $Z(SU(2)) = \{I, -I\} \equiv Z_2$.

■ تعریف (مرکز یک گروه) : مرکز یک گروه [۱۰] به مجموعه تمام عناصری از گروه گفته می شود که با تمام عناصر گروه جابجا می شوند. مرکز یک گروه G با $Z(G)$ نشان داده می شود. بنابراین

$$Z(G) := \{c \in G \mid cg = gc \ \ \forall g \in G\} \tag{۴۳}$$

به عنوان مثال در گروه $G_2(R)$ مرکز گروه عبارت است از

$$Z(GL_2(R)) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \}. \tag{۴۴}$$

[۱۰] Center of a group

- تمرین: مرکز گروه $GL_2(C)$ و سپس مرکز گروه $GL_n(C)$ را تعیین کنید.

- مرکز گروه جایگشت های سه تایی را پیدا کنید.

- تعریف (مرکز ساز [۱۱]): یک زیر مجموعه مثل $S \in G$ در نظر بگیرید. مجموعه تمام عناصری از گروه را در نظر بگیرید که با اعضای S جابجا می شوند. این مجموعه را با $Z(S)$ نشان می دهیم. این مجموعه یک زیر گروه از G است و مرکز ساز مجموعه ی S خوانده می شود. (اثبات به عهده خواننده است.)

- تعریف (بهنجارساز [۱۲]): یک زیر مجموعه مثل $S \in G$ در نظر بگیرید. مجموعه تمام عناصری از گروه را در نظر بگیرید که با کلیت زیر مجموعه ی S

جابجا می شوند. منظور از این نوع جابجایی این است که $xS = Sx$ یعنی اینکه

$$xs = s'x \qquad\qquad s, s' \in S. \tag{۴۵}$$

این مجموعه را با $N(S)$ نشان می دهیم و آن را زیر گروه بهنجارساز [۱۳] مربوط به S می خوانیم. (اثبات این که این مجموعه یک زیر گروه از G است، به عهده خواننده است.)

- تمرین: در گروه S_3 مجموعه ی $S = \{\alpha, \beta\}$ را در نظر بگیرید. برای این مجموعه $Z(S)$ و $N(S)$ را بدست آورید.

- تمرین: در گروه S_3 مجموعه ی $S = \{e, \alpha, \beta\alpha\}$ را در نظر بگیرید. برای این مجموعه $Z(S)$ و $N(S)$ را بدست آورید. نشان دهید که S یک زیر گروه بهنجار از $N(S)$ است.

- تمرین: در گروه S_4 مجموعه ی $S = \{\alpha, \beta\}$ را در نظر بگیرید. برای این مجموعه $Z(S)$ و $N(S)$ را بدست آورید. دقت کنید که گروه جایگشت های چهارتایی سه تا مولد دارد.

---

[۱۱] Centralizer

[۱۲] Normalizer

[۱۳] Normalizer

۷ تمرین های اضافی:

■ تمرین: فرض کنید که G یک گروه و H و K دو زیرگروه آن باشند. مجموعه HK را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$HK := \{hk| \quad h \in H \quad k \in K\} \tag{۴۶}$$

نشان دهید که HK یک زیرگروه G است اگر و فقط اگر $HK = KH$.

■ تمرین: فرض کنید که G یک گروه باشد . زیر گروه $G^{(1)}$ بنا برتعریف زیر گروهی است که ازتمام اعضای به فرم $aba^{-1}b^{-1}$ تولید می شود. این زیرگروه را زیرگروه تعویضگر G می نامند. نشان دهید که $G^{(1)}$ یک زیر گروه بهنجار G است.

■ تمرین: F را میدانی بگیرید که مرتبه آن عدد اول p است. گروه ماتریس های $GL_2(F) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad | \quad ad-bc \neq 1\}$ را در نظر بگیرید. زیرگروهی را درنظر بگیرید که اعضای آن دارای شرط $ad-bc = 1 \quad mod \;\; p$ هستند. این زیر گروه با نماد $SL_2(F)$ مشخص می شود که درآن SL از لفظ $Special Linear Group$ آمده است. مرتبه این زیرگروه را تعیین کنید.

■ تمرین: گروه S_4 را درنظر بگیرید.

الف: تمام کلاس های تزویجی آن را بدست آورید.

ب : زیرگروهی از S_4 بدست آورید که با S_3یکسان باشد.

هم مجموعه های راست و هم مجموعه های چپ این زیرگروه را بدست آورید. آیا این زیرگروه بهنجاراست؟

■ تمرین: اگر $a \in G$، تعریف می کنیم $N(a) := \{x \in G | xa = ax\}$. نشان دهید که $N(a)$ یک زیرگروه G است. $N(a)$ را عموماً بهنجارساز ($Normalizer$) یا متمرکزساز ($Centralizer$) عضو a در G می خوانند. متمرکز ساز مولد σ_1 را درگروه جایگشت S_4 بدست آورید.

■ تمرین: اگر H زیر گروهی از G باشد و $a \in G$ مجموعه aHa^{-1} را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$aHa^{-1} := \{aha^{-1} | h \in H\} \qquad (۴۷)$$

الف : نشان دهید که aHa^{-1} یک زیر گروه G است.

ب : اگر H متناهی باشد مرتبه aHa^{1} چه خواهد بود.

ج :حال مجموعه زیر را تعریف می کنیم :

$$N(H) := \{a \in G | aHa^{-1} = H\} \qquad (۴۸)$$

نشان دهید که $N(H)$ یک زیر گروه G است. هم چنین نشان دهید که H یک زیر گروه $N(H)$ است.

■ تمرین: اگر N یک زیرگروه بهنجار G و H زیرگروه دلخواهی از G باشد نشان دهید که NH زیرگروهی از G است.

■ تمرین: نشان دهید که اشتراک دو زیرگروه بهنجار از یک گروه، یک زیرگروه بهنجار است.

■ تمرین: اگر H زیرگروهی از G باشد به قسمی که حاصلضرب هردوهم مجموعه راست H در G بازهم یک هم مجموعه راست H درG باشد، ثابت کنیدکه H یک زیرگروه بهنجار G است.

■ تمرین: چنانچه H زیرگروهی از G و N زیرگروه بهنجار G باشد، نشان دهید که $H \cap N$ یک زیرگروه بهنجار H است.

■ تمرین: G را مجموعه همه ماتریس های حقیقی 2×2 مانند $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ، بگیرید که که درآن $ad \neq 0$ و N را مجموعه همه ماتریس های به فرم $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ بگیرید.

الف : ثابت کنید که N یک زیرگروه بهنجار G است.

ب : ثابت کنید که G/N آبلی است.

■ تمرین: فرض کنید که G مجموعه همه علامات صوری مثل $x^i y^j$ باشد که درآن $i = 0, 1$ و $j = 0, 1, 2, \cdots n-1$ باشد. هم چنین فرض کنید که شرایط زیر روی x, y برقراراباشند:

$$x^i y^j = x^{i'} y^{j'} \longrightarrow i = i' \quad j = j' \tag{۴۹}$$

$$x^2 = y^n = e \quad n > 2 \tag{۵۰}$$

$$xy = y^{-1} x \tag{۵۱}$$

الف : حاصلضرب $(x^i y^j)(x^k y^l)$ را به شکل $x^\alpha y^\beta$ درآورید.

ب : بااستفاده از قسمت الف ثابت کنید که G گروهی ناآبلی است از مرتبه $2n$.

ج : ثابت کنید که مرکز این گروه به ازای n های فرد برابر $\{e\}$ است . اما به ازای n های زوج این مرکز بزرگتر از $\{e\}$ است.

■ تمرین: فرض کنید که H زیرگروهی از G باشد به قسمی که هرگاه $Ha \neq Hb$، آنگاه $aH \neq bH$. ثابت کنید که به ازای هر $g \in G$، $gHg^{-1} \subset H$.