

درسنامه نظریه گروه، درس هفتم: گروه های لی و جبرهای لی وابسته به

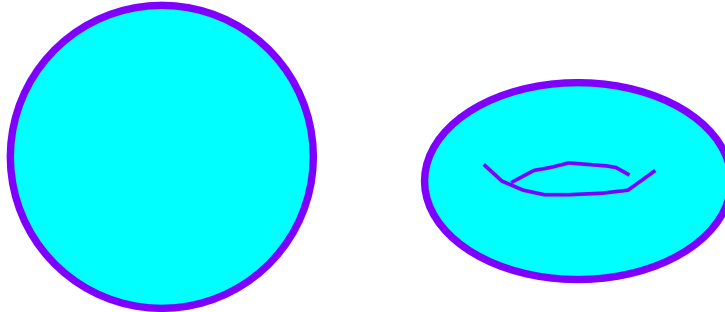
آنها

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲ اردیبهشت ۱۳۹۵

۱ مقدمه

دردرس گذشته باگروه های پیوسته آشنا شدیم. دراین درس با گروه های لی و جبرهای لی و رابطه آن دو باهم آشنا می شویم. نخست این دو مفهوم را به طور جداگانه شرح می دهیم و سپس رابطه آن دو را باهم روشن می کنیم. گروه های لی گروه های پیوسته ای هستند که عناصر آنها با تعداد محدودی پارامتر پیوسته ای مشخص می شوند. تعداد این پارامترها بعد گروه لی خوانده می شود. ضرب هر عضو دریک عضودیگر عضوی با پارامترهای جدید تولید خواهد کرد. دریک گروه لی پارامترهای جدید توابع مشتق پذیری از پارامترهای عناصر ضرب شونده هستند. هم چنین پارامترهای وارون یک عضو توابع مشتق پذیری از پارامترهای عضو اولی است. این قیود ساختارگروه لی را بشدت محدود می کند و به ما اجازه می دهد که تقریباً تمامی گروه لی را با مطالعه عناصر نزدیک به عضو واحد آن بدست بیاوریم، کاری که در مورد گروه های ماتریسی انجام داده ایم. در واقع گروه های ماتریسی نمونه های بسیار مهم گروه لی هستند. مسلماً گروه های گسسته گروه لی نیستند. هم چنین گروه تمام توابع وارون پذیر روی یک مجموعه پیوسته اگر چه یک گروه پیوسته است ولی یک گروه لی نیست زیرا هر عنصر آن با تعداد محدودی



شکل ۱: شکل سمت چپ یک کره و شکل سمت راست یک چنبره را نشان می دهد. این دو سطح توپولوژی متفاوت دارند. پارامتر مشخص نمی شود. در ادامه این درس مفهوم گروه لی را که در بالا به آن اشاره کردیم کمی بیشتر شرح می دهیم ولی این توصیف یک توصیف دقیق ریاضی نیست ولی برای منظور ما در این درس کافی است.

۲ مفهوم خمینه

اگر روزی به عنوان موجودات فضایی در روی یک سطح ناشناخته قرار بگیریم شاید اولین کاری که می کنیم آن است که تعیین می کنیم سطحی که روی آن قرار گرفته ایم چه شکلی است؟ آیا شکل یک کره است و یا شکل یک چنبره یا حتی چیزی پیچیده تر از آن. این کار را می توانیم با وسایل ابتدایی انجام دهیم. مثلاً می توانیم از یک نقطه شروع کنیم و قطعه طنابی را روی سطح سیاره بکشیم و بعد از طی مسیری دوسر آن را به هم ببندیم تا یک طناب بسته درست کنیم.

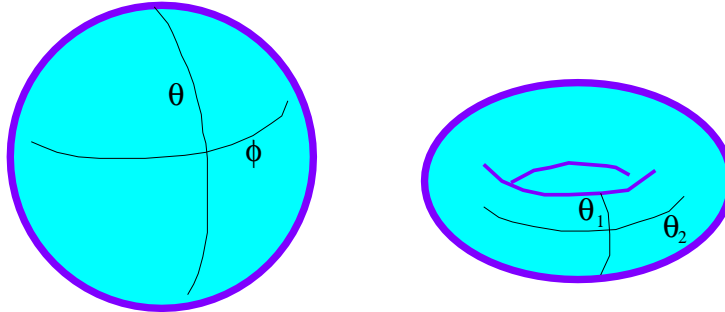
اگر بعد از آزمایش های فراوان ببینیم که طناب خود را بدون پاره کردن همواره می توانیم جمع کنیم می فهمیم که روی سطحی شبیه به کره یا بیضی گون یا یک سطح تخت قرار داریم. اما اگر بفهمیم که بعضی وقت ها طناب را نمی توانیم بدون پاره کردن جمع کنیم می فهمیم که سیاره احتمالاً با کره فرق دارد و احتمالاً چیزی شبیه به چنبره یا پیچیده تر از آن است. برای این نوع کارها تنها به آن نیاز داریم که مفهوم پیوستگی را بلد باشیم و نیازی به آن نداریم که نقاط فضای خود را مساحتی کرده

و به هر نقطه آن مختصاتی نسبت داده باشیم. با این نوع کارها می توانیم توپولوژی فضای خود را تشخیص دهیم و آن شاخه از ریاضیات که مارافادربه انجام این کارها می کند توپولوژی نامیده می شود. اما اگر بخواهیم کارهای بیشتری انجام دهیم مثلاً خطوط راست و زاویه و اشکال هندسی رسم کنیم و مساحت آنها را تعیین کنیم و پستی و بلندی های سطح سیاره خود را مشخص کنیم می بایست به نقاط مختلف سیاره مختصاتی نسبت بدهیم. مختصات خوب می بایست چنان باشند که به نقاط نزدیک روی فضا مختصات نزدیک نسبت دهند. بنابراین در درجه اول تابع مختصات که از سطح سیاره به چندتایی اعداد حقیقی یعنی R^n تعریف می کنیم می بایست تابعی پیوسته باشد. هم چنین می بایست رابطه وارون پذیری بین مختصات و نقاط وجود داشته باشد به نحوی که بتوان از هر نقطه به مختصات آن پی برد و بالعکس از مختصات هر نقطه به خود آن نقطه. بنابراین می بایست تابع مختصات ما وارون پذیر هم باشد. اگر چنین کاری انجام دهیم می گوئیم فضا را با یک نقشه مختصاتی پوشانده ایم. این نقشه که مثل یک صفحه شفاف روی فضا قرار می گیرد باعث می شود که هر نقطه از فضا یک مختصات معین داشته باشد. فضایی که به چنین مختصاتی مجهز شده است یک خمینه یا *Manifold* نامیده می شود. تعداد مختصاتی که به هر نقطه داده می شود بعد آن خمینه خوانده می شود.

البته پیش می آید که نتوانیم تمام خمینه را با یک نقشه مختصاتی بپوشانیم و شرط های بالا را اعمال کنیم. به عنوان مثال نقشه مختصاتی θ, ϕ در روی کره این عیب را دارد که به قطب شمال و جنوب مختصه ϕ معینی نسبت نمی دهد. هم چنین این مختصات در همه کره پیوسته نیست. برای رفع این نقیصه می توانیم مساحی سطح مورد نظر را به این ترتیب انجام بدهیم که از مهندسان و نقشه برداران متفاوت بخواهیم که هر کدام یک ناحیه از سطح را مختصه بندی کنند. نهایتاً می توان خمینه را با نقشه های همپوشان که هر کدام تنها قسمتی از خمینه را در بر می گیرند پوشاند. این پیچیدگی ها در نظریه خمینه ها به تفصیل و با دقت مورد بحث قرار می گیرند. مادر این جا می توانیم از این ظرافت ها صرف نظر کنیم و فرض کنیم که تمام خمینه با یک نقشه پوشانده شده است و تمام نقاط خمینه بجز تعداد اندکی یا به عبارت دقیق تر ناحیه ای با اندازه صفر دارای مختصات هستند. این ساده انگاری خللی در بحث های آینده ما ایجاد نخواهد کرد. چند مثال ساده زیر به درک مفهوم خمینه کمک می کند.

■ مثال: کره دوبعدی را می توان با یک نقشه مختصاتی پوشاند. مختصات این نقشه در قطب شمال و جنوب ایراد دارند. هم چنین در روی یکی از نصف النهارها مختصه ϕ دو مقدار 0 و 2π را اختیار می کند. این ایراد تاوقتی که با توابع پریودیک در ϕ کار می کنیم جدی نیست. هر نقطه با مختصات x, y, z در روی کره مختصات θ, ϕ زیر را خواهد داشت.

$$x = \sin \theta \sin \phi$$



شکل ۲: سطوح توپولوژیک کره و چنبره با قراردادن نقشه های مختصاتی روی آنها تبدیل به خمینه می شوند.

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta \cos \phi \\ z &= \cos \theta \end{aligned} \quad (۱)$$

■ مثال: کره سه بعدی را همانند کره دوبعدی می توان بایک نقشه مختصاتی پوشاند که به هر نقطه سه مختصه (θ, ϕ, ψ) نسبت می دهد. هر نقطه بامختصات دکارتی x_1, x_2, x_3, x_4 مختصات θ, ϕ, ψ زیر را خواهد داشت.

$$\begin{aligned} x_1 &:= \sin \theta \sin \phi \sin \psi \\ x_2 &:= \sin \theta \sin \phi \cos \psi \\ x_3 &:= \sin \theta \cos \phi \\ x_4 &:= \cos \theta \end{aligned} \quad (۲)$$

■ مثال: چنبره دوبعدی بامختصات θ^1, θ^2 ، شکل (2).

■ تمرین: کره n بعدی با معادله زیر در فضای R^{n+1} مشخص می شود:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1. \quad (۳)$$

یک مختصات موضعی برای کره n بعدی بدست بیاورید.

■ تمرین: سطوح زیر را که در فضای سه بعدی قرار گرفته اند و با معادلات داده شده توصیف می شوند، در نظر بگیرید:

الف:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

ب:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

■ تمرین: یک منحنی را که در صفحه $x - y$ با معادله زیر توصیف می شود را در نظر بگیرید. $y = f(x)$ تابع y یک تابع هموار و یک به یک است. این منحنی را حول محور y می چرخانیم تا یک سطح دوار دوبعدی بدست بیاید. برای این سطح پارامترهای موضعی را بدست آورید.

سطوح زیر را که در فضای سه بعدی قرار گرفته اند و با معادلات داده شده توصیف می شوند، در نظر بگیرید:

۳ گروه لی و خواص کلی آن

به طورحسی گروه لی به گروهی گفته می شود که عناصر آن بامختصات پیوسته مشخص شده اند. هر عنصر گروه مثل g با تعدادی پارامتر که بعد آن گروه لی خوانده می شود، مشخص می شود. برای یک گروه لی n بعدی این پارامترها را با $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$ نشان می دهیم. بنابراین هر عضو این گروه را باین پارامترها مشخص می کنیم و می نویسیم

$$a = g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n). \quad (۴)$$

پارامترها را چنان انتخاب می کنیم که عنصر واحد گروه پارامترهای صفر داشته باشد، یعنی :

$$g(0, 0, \dots, 0) = e. \quad (5)$$

حال فرض کنید که دو عضو این گروه مثل $a = g(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ و $b = g(\beta^1, \dots, \beta^n)$ را در یکدیگر ضرب کنیم و عنصر $c = g(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n)$ را بدست آوریم.

بنابراین داریم

$$ab = c \quad \rightarrow \quad g(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)g(\beta^1, \dots, \beta^n) = g(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n). \quad (6)$$

یک خاصیت مهم گروه لی آن است که پارامترهای جدید می بایست توابع پیوسته و مشتق پذیری از پارامترهای a و b باشند یعنی توابع

$$\gamma^i = f^i(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n; \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n), \quad (7)$$

می بایست نسبت به همه متغیرهای خود پیوسته و مشتق پذیر باشند. هم چنین اگر معکوس عنصر $a = g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$a^{-1} = g(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n). \quad (8)$$

خاصیت مهم دیگر گروه لی آن است که پارامترهای عنصر a^{-1} توابع مشتق پذیری از پارامترهای عنصر a باشند. به عبارت دیگر توابع

$$\phi^i := h^i(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n), \quad (9)$$

توابع مشتق پذیری از متغیرهای خود هستند.

تمام این شرایط را می توان به صورت فشرده در تعریف زیر بیان کرد.

تعریف گروه لی: یک خمینه G یک گروه لی خوانده می شود هرگاه توابع ضرب $m : G \times G \rightarrow G$ و وارون $i : G \rightarrow G$ روی آن تعریف شده باشند به قسمی که

الف: باعمل ضرب بالا، G یک گروه توپولوژیک باشد

ب: توابع ضرب و وارون مشتق پذیرباشند.

ج: تمام گروه به عنوان خمینه همبند مسیری باشد.

در زیر چند مثال از گروه های لی و خمینه های مربوط به آنها می آوریم. خواننده خود ب راحتی می تواند تحقیق کند که شرایط دیگر گروه لی یعنی مشتق پذیری توابع ضرب و وارون در این مثال برقرار است.

■ مثال: گروه $U(1)$ یک گروه لی است. هر عضو $g = e^{i\theta} \in U(1)$ با یک پارامتر θ مشخص می شود. خمینه ی آن دایره ی S_1 است و ضرب و وارون در آن به شکل زیر تعریف می شوند:

$$g(\theta)g(\theta') = g(\theta + \theta') \quad g^{-1}(\theta) = g(-\theta). \quad (10)$$

■ مثال: گروه $GL(2, R)$ یک گروه لی است. عناصر این گروه را می توانیم به شکل زیر پارامتر بندی کنیم. این پارامترها مختصات روی خمینه این گروه خواهند بود.

$$g \in GL(2, R), \rightarrow g(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) = \begin{pmatrix} 1 + \theta^1 & \theta^2 \\ \theta^3 & 1 + \theta^4 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

خمینه این گروه تمام فضای R^4 است که از آن صفحه $(1 + \theta^1)(1 + \theta^4) - \theta^2\theta^3 = 0$ را برداشته باشیم. این خمینه اگر چه همبند مسیری نیست ولی همبند است یعنی نمی توان دو قسمت آن را در درون دو مجموعه باز که بایکدیگر اشتراک نداشته باشند محاط کرد. واضح است که نگاشت های ضرب و وارون در این گروه مشتق پذیر هستند.

■ مثال: گروه $SL(2, R)$ نیز یک گروه لی است. یک پارامتربندی برای این گروه به صورت زیر است:

$$g \in SL(2, R) \longrightarrow g = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

از آنجا که دترمینان این ماتریس می بایست برابر با یک باشد، پارامترهای فوق همه مستقل نیستند. از شرط $\det(g) = 1$ بدست می آوریم:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad (13)$$

و از آنجا می توانیم مختصات زیر را برای نقاط روی گروه بکار ببریم.

$$\begin{aligned} x_0 &= \cosh \theta \\ x_1 &= \sinh \theta \cos \alpha \\ x_2 &= \sinh \theta \sin \alpha \cos \beta \\ x_3 &= \sinh \theta \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad (14)$$

رابطه (13) نشان می دهد که خمینه این گروه یک هذلولی گون سه بعدی است.

■ مثال: گروه $SU(2)$ نیز یک گروه لی است. در این مورد داریم:

$$g \in SU(2) \longrightarrow g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 - ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

که در آن شرط $\det(g) = 1$ برقرار است که برحسب پارامترها به صورت زیر است:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (16)$$

این شرط بوضوح نشان می دهد که خمینه گروه $SU(2)$ کره سه بعدی است و همان مختصات کروی روی کره سه بعدی را می توان برای آن بکاربرد. بعدازاین مثال هاباید به یک موضوع مهم اشاره کنیم و آن اینکه بسیاری از گروه های لی خمینه های ساده و آشنایی که براحتی شکل و توپولوژی آنها قابل تشخیص باشد ندارند. مهم ترین موضوعی که ماباید به آن توجه کنیم این است که توابع ضرب و وارون گروه برحسب پارامترهایی که برای گروه تعریف کرده ایم مشتق پذیرباشد. این پارامترهای همان مختصات موضعی گروه خواهد بود.

■ تمرین: ثابت کنید که گروه های زیر، گروه های لی هستند:

یک - گروه $SO(n, R)$.

دو- گروه $SU(n)$.

سه - گروه $SP(2n, R)$.

۴ تعریف کلی جبر لی

■ فضای برداری A یک جبر لی خوانده می شود هرگاه یک عمل دوتایی دوخطی $A \times A \rightarrow A$: $[,]$ موسوم به براکت در آن تعریف شده باشد که درخاصیت های زیرصدق کند:

$$[x, y] = -[y, x]$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0. \quad (17)$$

رابطه آخراتحاد جاکوبی خوانده می شود.

یادآوری می شود که یک عمل دوخطی (bilinear) نسبت به هر دو متغیر خود خطی است یعنی: $[\alpha x + y, z] = \alpha[x, z] + [y, z]$ و $[x, \alpha y + z] = \alpha[x, y] + [y, z]$.

هرگاه فضای برداری A حقیقی (مختلط) باشد، جبرلی مربوطه نیز یک جبر حقیقی (مختلط) خوانده می شود. بعد جبر همان بعد فضای برداری است.

هرگاه برای فضای برداری A یک پایه $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ انتخاب کنیم می توانیم براکت بین عناصر پایه را بدست آوریم و در نتیجه براکت هر دو برداری از فضا بدست می آید. از آنجا که براکت دو بردار پایه خود یک بردار دیگر از فضا است می توان $[e_i, e_j]$ را بر حسب بردارهای پایه فضا بسط داد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$[e_i, e_j] = f_{ij}^k e_k. \quad (18)$$

ضرایب f_{ij}^k ضرایب ساختاری جبر خوانده می شوند. این ضرایب بنا بر رابطه $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$ ، نسبت به شاخص های پایین پادمتقارن بوده و علاوه بر آن بنا بر اتحاد جاکوبی در رابطه زیر صدق می کنند:

$$f_{ij}^m f_{mk}^n + f_{jk}^m f_{mi}^n + f_{ki}^m f_{mj}^n = 0 \quad (19)$$

۱.۴ مثال هایی از جبرهای لی

■ مثال: فضای R^3 با ضرب خارجی بردارهای یک جبرلی است. در این جبر داریم

$$[\vec{r}, \vec{r}'] := \vec{r} \times \vec{r}'. \quad (20)$$

■ مثال: فضای ماتریس های حقیقی مربعی n بعدی که آن را با $M_n(R)$ نشان می دهیم یک جبرلی است. در این فضا براکت به صورت زیر تعریف می شود:

$$[a, b] = ab - ba. \quad (21)$$

■ مثال: در مکانیک کلاسیک، فضای توابع تعریف شده روی فضای فاز یک جبرلی بی نهایت بعدی است. در این فضا براکت همان گروه پواسون است:

$$[f, g](p, q) \equiv \{f, g\} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (22)$$

■ تمرین: آیا مجموعه تمام ماتریس های مربعی و بالامتثلی تشکیل یک جبر لی می دهد؟ اگر پاسخ شما مثبت است یک پایه برای این جبر پیدا کنید. ماتریس ها $n \times n$ هستند.

■ تمرین: آیا مجموعه تمام ماتریس های پادمتقارن و حقیقی تشکیل یک جبر لی می دهد؟ اگر پاسخ شما مثبت است یک پایه برای این جبر پیدا کنید. ماتریس ها $n \times n$ هستند.

■ تمرین: آیا مجموعه تمام ماتریس های پادهرمیتی و حقیقی تشکیل یک جبر لی می دهد؟ اگر پاسخ شما مثبت است یک پایه برای این جبر پیدا کنید. ماتریس ها $n \times n$ هستند.

۵ مولدهای گروه لی

دو عضو گروه لی مثل $a = g(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ و $b = g(\beta^1, \dots, \beta^n)$ را در یکدیگر ضرب کنیم و عنصر $c = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ را بدست آوریم.

بنابراین داریم

$$ab = c \quad \longrightarrow \quad g(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)g(\beta^1, \dots, \beta^n) = g(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n). \quad (23)$$

می دانیم که پارامترهای γ^i توابع مشتق پذیری از پارامترهای α^i و β^i هستند، یعنی

$$\gamma^i = f^i(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n). \quad (24)$$

باتوجه به خاصیت عضو خنثی وهم چنین رابطه (5) توابع f^i دارای خاصیت زیر هستند:

$$\begin{aligned} f^i(0, 0, \dots, 0; \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n) &= \beta^i, \\ f^i(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n; 0, 0, \dots, 0) &= \alpha^i. \end{aligned} \quad (25)$$

حال اگر عناصر a و b را در نزدیکی عنصر واحد گروه انتخاب کنیم، مختصات α^i و β^i نیز بسیار کوچک خواهند بود، و در نتیجه مختصات γ^i بسیار کوچک خواهند بود. می توانیم γ^i را به صورت زیر تا مرتبه دو برحسب α^i و β^i ها بسط دهیم:

$$\gamma^i = \alpha^i + \beta^i + C_{jk}^i \alpha^j \beta^k + \dots \quad (26)$$

در نوشتن این بسط از قیود 25 استفاده کرده ایم. دقت کنید که افزودن جملات دیگری نظیر $\alpha^i \alpha^j$ به این بسط ناقض شرط (25) خواهد بود.

ازاین به بعد برای سادگی ازاین به بعد بحث خود را به گروه های ماتریسی به عنوان مهم ترین گروه های لی محدود می کنیم. این کار تجزیه تحلیل ما را از بسیاری جهات ساده می کند اگر چه نتایجی که نهایتاً بدست می آوریم برای همه گروه های لی برقرار هستند.

از آنجا که پارامترهای هر سه عنصر کوچک هستند می توانیم آنها را حول صفر بسط دهیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} a &= I + \alpha^i T_i + \frac{1}{2} \alpha^i \alpha^j T_{ij} + \dots, \\ b &= I + \beta^i T_i + \frac{1}{2} \beta^i \beta^j T_{ij} + \dots, \\ c &= I + \gamma^i T_i + \frac{1}{2} \gamma^i \gamma^j T_{ij} + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن از قرارداد جمع روی شاخص های تکراری استفاده کرده ایم و T_i ها و T_{ij} ها ماتریس هستند. ضمناً دقت کنید که $T_{ij} = T_{ji}$.

در نتیجه رابطه (??) به شکل زیر درمی آید:

$$(I + \alpha^i T_i + \frac{1}{2} \alpha^i \alpha^j T_{ij} + \dots)(I + \beta^i T_i + \frac{1}{2} \beta^i \beta^j T_{ij} + \dots) = (I + \gamma^i T_i + \frac{1}{2} \gamma^i \gamma^j T_{ij} + \dots). \quad (28)$$

حال بسط (26) را در رابطه (28) قرار می دهیم و بدلیل کوچکی پارامترها آن ها را تارتبه دوم نگاه می داریم. یک مقایسه ساده نشان می دهد که رابطه زیرین ضرایب ماتریسی برقرار است:

$$T_{jk} = T_j T_k - C_{jk}^i T_i. \quad (29)$$

این رابطه دوتیجه مهم در بردارد. اول اینکه ضرایب بسط درجه دوم یعنی T_{jk} ها برحسب ضرایب بسط درجه اول یعنی T_j ها تعیین می شوند. دقت کنید که این خاصیت در مورد بسط یک تابع کاملاً غیرعادی و استثنایی است. دوم این که اگر این رابطه را از رابطه مشابه آن که با عوض کردن جای اندیس های j, k بست می آید عوض کنیم و از خاصیت $T_{jk} = T_{kj}$ استفاده کنیم نتیجه می شود

$$T_j T_k - T_k T_j = (C_{jk}^i - C_{kj}^i) T_i, \quad (30)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$[T_j, T_k] = f_{jk}^i T_i. \quad (31)$$

در این رابطه $[a, b]$ براکت یا تعویضگر خوانده می شود و به معنای $ab - ba$ است و ضرایب f_{jk}^i که نسبت به اندیس های پایین خود پادمتقارن هستند ثابت های ساختاری گروه لی خوانده می شوند. چنانکه رابطه (29) نشان می دهد ضرایب درجه دوم نیز برحسب آنها بدست می آید و هرگاه استدلال بالا را تارتبه های بالاتر ادامه بدهیم خواهیم دید که در واقع ضرایب همه رتبه ها برحسب T_i ها بدست می آیند. به همین دلیل ماتریس های T_i مولد های گروه خوانده می شوند. دومین نتیجه ای که بدست آورده ایم آن است که همانطور که رابطه (31) نشان می دهد، مولد های جبر تحت عمل تعویضگری براکت بسته هستند. هرگاه ساختاری شبیه به این داشته باشیم آن را یک جبر لی می خوانیم.

بنابراین نشان داده ایم که T_i ها مولد های گروه لی یک فضای برداری را بوجود می آورند که همان فضای مماس بر گروه در نقطه واحد هستند و این فضای برداری یک جبر لی نیز هست. این که چرا به T_i ها که فقط بردارهای مماس بر یک نقطه هستند، مولد های گروه لی می گویند به این دلیل است که در بسط هر عنصر گروه حول نقطه واحد گروه می توان تمام ضرایب بسط را با در دست داشتن مولد هاب دست آورد. در واقع دیدیم که هر عنصر با پارامترهای $\theta^1, \dots, \theta^n$ حول عنصر واحد بسطی به شکل زیر دارد:

$$g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n) = I + \theta^i T_i + \frac{1}{2!} \theta^i \theta^j T_{ij} + \frac{1}{3!} \theta^i \theta^j \theta^k T_{ijk} + \dots \quad (32)$$

و همه ضرایب بسط از ضرایب رتبه یک یعنی T_i ها بدست می آیند. ضمناً دقت می کنیم که عبارت ساده ای برای مولد ها بدست آورد. براحتی معلوم می شود که

$$T_i = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^i} \Big|_{\theta=0}. \quad (33)$$

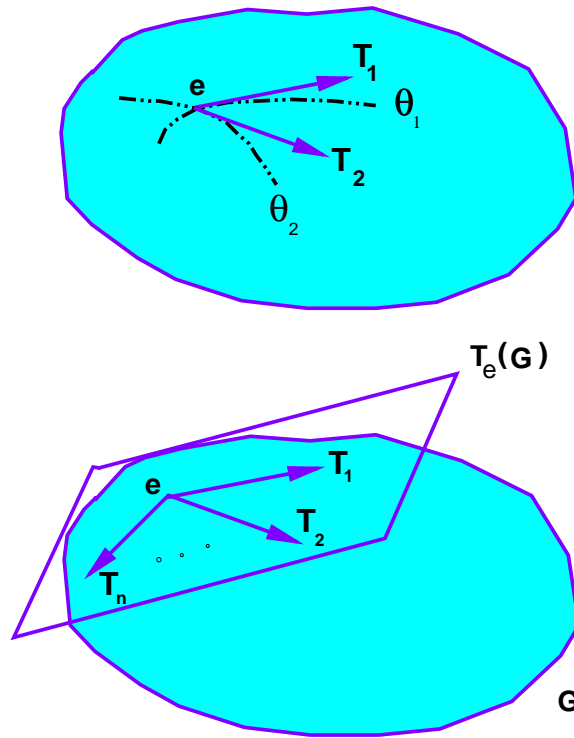
این رابطه بیان می کند که مولدهای T_i مماس بر خم های یک پارامتره $g(0, \dots, \theta_i, \dots, 0)$ هستند که از نقطه واحد گروه عبور می کنند. معنای هندسی این امر این است که T_i بردارهای مماس بر خمینه گروه در نقطه واحد و در جهت پارامتر θ_i است. مجموعه تمام این بردارهای مماس در نقطه واحد یک فضای خطی می سازد که آن را فضای مماس بر گروه در نقطه واحد می خوانیم. شکل (3) رابطه گروه لی و جبرلی را از نظر هندسی نشان می دهد. قبلاً نشان دادیم که مجموعه مولد ها تحت رابطه براکت یک مجموعه بسته است. در ریاضیات یک فضای خطی را که در آن یک رابطه براکت با این خواص تعریف شده باشد یک جبرلی خوانده می شود. هرگاه به جای مختصات θ_i مختصات دیگری مثل θ'_i برای همسایگی عنصر واحد انتخاب کنیم و مولدهای جدید را با T'_i نشان دهیم آنگاه این مولدهای جدید چیزی نیستند جز ترکیب خطی از مولدهای جدید. دلیل اش هم این است که

$$T'_i = \frac{\partial g}{\partial \theta'^i} \Big|_{=0} = \frac{\partial j}{\partial \theta^i} \Big|_{=0} \frac{\partial g}{\partial j} \Big|_{=0} = S_i^j T_j, \quad (34)$$

که در آن $S_i^j := \frac{\partial j}{\partial \theta^i} \Big|_{=0}$. در اینجا باز هم از مشتق پذیر بودن توابع مختصاتی نسبت به هم استفاده کرده ایم. بنابراین هر تغییر مختصات یک نگاشت خطی در فضای مماس روی نقطه واحد گروه یعنی روی جبرلی القا می کند.

۶ نگاشت نمایی

در این قسمت می خواهیم نشان دهیم که هر عنصر گروه لی را می توان به صورت $g = e^{\Phi^i T_i}$ نمایش داد که در آن T_i ها مولد های بی نهایت کوچک یعنی عناصر جبر هستند و Φ_i ها توابعی مشتق پذیر از پارامترها یعنی مختصات موضعی گروه هستند. می توان در واقع Φ^i را به عنوان مختصات موضعی نقاط گروه بکاربرد. اثبات ما در این قسمت ممکن است از دقت ریاضی بهره



شکل ۳: T_1 و T_2 دو بردار مماس بر گروه در نقطه واحد گروه هستند (شکل بالا). مجموعه تمام بردارهای مماس جبرلی گروه را تشکیل می دهد (شکل پایین).

مند نباشد ولی ایده های اصلی و فیزیکی رابطه جبر و گروه لی را در بردارد. نخست دقت کنید که اگر عنصر گروهی را در نزدیکی نقطه واحد در نظر بگیریم می توان آن را به شکل زیر بسط داد:

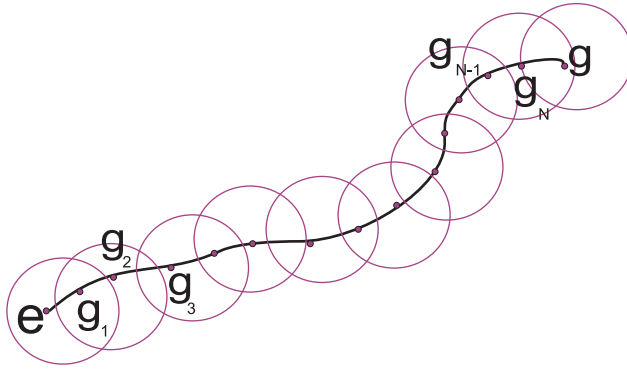
$$g \approx I + \epsilon^i T_i \quad (35)$$

که در آن ϵ^i ها پارامترهای بی نهایت کوچک و T_i ها مولدهای گروه لی هستند. دقت کنید که این مولدها مستقل از ϵ^i ها هستند. حال می دانیم که اگر g عضو گروه لی G باشد هر توانی از آن نیز عضو گروه G خواهد بود. بنابراین می توان نوشت

$$g^N = (I + \epsilon^i T_i)^N \in G. \quad (36)$$

حال اگر پارامترهای θ^i ، پارامترهای کوچکی نباشند می توان عدد N را آنقدر بزرگ انتخاب کرد که پارامترهای $\frac{\theta^i}{N}$ هر اندازه که بخواهیم کوچک شوند بطوری که بسط (35) برای پارامترهای $\epsilon^i = \frac{\theta^i}{N}$ با دقتی که بخواهیم برقرار باشد. در نتیجه می توان نوشت که به ازای هر مقدار از پارامترهای $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ ،

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (I + \frac{\theta^i}{N} T_i)^N \in G \quad (37)$$



شکل ۴: هر عضو گروه مثل g با یک مسیر پیوسته به عنصر واحد متصل می شود.

که از آن نتیجه می گیریم به ازای هر مقدار از پارامترهای $(\theta^1, \dots, \theta^n)$

$$e^{\theta^i T_i} \in G. \quad (38)$$

تاکنون نشان داده ایم که به ازای هر مقدار از پارامترها عناصر $g \equiv e^{\theta^i T_i}$ عضو گروه G هستند. این مطلب یک بار دیگر مناسب بودن نام مولد را برای T_i ها نشان می دهد. بالعکس همه عناصر گروه را می توان به این صورت نوشت. برای فهم این مطلب به شکل؟؟ توجه می کنیم.

بنابر تعریف گروه لی و هم بند مسیری بودن آن، هر عضو گروه مثل g با یک مسیر پیوسته به عنصر واحد متصل می شود.

حال عناصر g_1, g_2 تا g_N را روی این مسیر در نظر می گیریم. می توانیم بنویسیم

$$g = g(g_N^{-1} g_N)(g_{N-1}^{-1} g_{N-1})(g_{N-2}^{-1} g_{N-2}) \cdots (g_3^{-1} g_3)(g_2^{-1} g_2)(g_1^{-1} g_1)e. \quad (39)$$

حال طرف راست را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$g = (g g_N^{-1})(g_N g_{N-1}^{-1})(g_{N-1} g_{N-2}^{-1}) \cdots (g_3 g_2^{-1})(g_2 g_1^{-1})g_1. \quad (40)$$

نکته مهم این است که در عبارت جدید هر کدام از عناصر داخل پرانتز در نزدیکی عنصر واحد گروه هستند. این امر از خاصیت توپولوژیک بودن گروه ناشی شده است. (چون g_1 نزدیک g_2 است، پس g_1^{-1} نزدیک g_2^{-1} است. چون $g_2 g_2^{-1}$ برابر با واحد است، پس $g_2 g_1^{-1}$ نزدیک عنصر واحد است. این استدلال برای همه پرانتزها درست است.)

حال هر کدام از عناصر داخل پرانتز را می توان به صورت زیر بسط داد و این بسط تا مرتبه اول ϵ^i صحیح است.

$$g_i g_{i-1}^{-1} \approx I + \epsilon^i T_i = e^{\epsilon^i T_i} \quad (41)$$

وقتی به حاصل ضرب دو عنصر مثل عنصر فوق می رسیم داریم

$$(g_i g_{i-1}^{-1})(g_{i-1} g_{i-2}^{-1}) = e^{\epsilon^i T_i} e^{\epsilon^{i-1} T_{i-1}} \quad (42)$$

اما در این جا از بسط *Cambell – Baker – Hausdorff* استفاده می کنیم که بر مبنای آن

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\dots} \quad (43)$$

این بسط با توجه به خاصیت مهم بسته بودن جبرلی تحت عمل تعویضگرها نشان می دهد که حاصل ضرب هر دو پرانتز را می توان بازهم به صورت $e^{\epsilon^i T_i}$ ها نوشت که در آن ϵ^i توابعی از ϵ^i ها و $\epsilon^{i'}$ ها نوشت. بنابراین در حد $N \rightarrow \infty$ حاصل ضرب همه پرانتزها را می توان به صورت تابع نمایی نوشت یعنی اینکه

$$g = e^{\Phi^i T_i}. \quad (44)$$

۷ جبرلی وابسته به گروه های لی ماتریسی

دردرس گذشته دیدیم که هر گاه یک عنصر گروه لی ماتریسی مثل $g(1, 2, \dots, n)$ را حول نقطه واحد بسط دهیم،

$$g(1, 2, \dots, n) = I + iT_i + \frac{1}{2}ijT_{ij} + \dots \quad (45)$$

آنگاه T_i ها مولد های گروه لی خوانده می شوند زیرا تمام ضرایب دیگر بسط از روی این ضرایب بدست می آید و می توان نهایتاً عناصر گروه را به صورت زیرنوشت:

$$g(1, 2, \dots, n) = e^{iT_i}. \quad (46)$$

برای بدست آوردن جبرلی گروه های لی ماتریسی متفاوت کافی است که یک پارامتر بندی صحیح از یک ماتریس عمومی در این گروه ها داشته باشیم و سپس مولد هارا از بسط (45) و یا رابطه

$$T_i := \left. \frac{\partial g}{\partial i} \right|_{=0}, \quad (47)$$

بدست آوریم.

معمولاً جبرلی یک گروه را با همان نام ولی با حروف کوچک نشان می دهیم. مثلاً جبرلی گروه $U(n)$ را با $u(n)$ و جبرلی گروه $SO(n)$ را با $so(n)$ نشان می دهیم. در زیر بخش زیر چند مثال از جبرهای لی گروه های ماتریسی ارائه می دهیم و تعیین جبرلی بقیه گروه هارا به تمرین ها واگذار می کنیم.

۱.۷ جبرلی $so(n)$

هرگاه $g \in SO(n)$ عضوی از گروه در نزدیکی واحد باشد می توان آن را به شکل $g \approx I + L$ نوشت. همانطور که در درس پنجم دیدیم متعامد بودن g به این معناست که L یک ماتریس پادمتقارن است. بنابراین می توان آن را بر حسب یک پایه برای ماتریس های پادمتقارن بسط داد. این پایه را به شکل زیر می نویسیم:

$$M_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \quad i < j, \quad (48)$$

و در نتیجه g بسط زیر را خواهد داشت:

$$g = I + \theta^{ij} M_{ij} + \dots \quad (49)$$

M_{ij} ها مولدهای جبرلی $so(n)$ هستند. روابط جابجایی آنها بر احوالی بدست می آید و عبارت است از:

$$[M_{ij}, M_{kl}] = \delta_{jk} M_{il} + \delta_{li} M_{kj} - \delta_{ik} M_{jl} - \delta_{lj} M_{ki}. \quad (50)$$

جبرلی $so(n)$ یک جبر $n(n+1)/2$ بعدی است.

به خصوص جبرلی $so(3)$ یک جبر سه بعدی است و برای مولدهای آن نامگذاری جدیدی را به ترتیب زیر قرار می دهیم

$$J_1 := M_{23}, \quad J_2 := M_{31}, \quad J_3 := M_{12}. \quad (51)$$

که باین نامگذاری جدید روابط جابجایی به شکل زیر درمی آید:

$$[J_1, J_2] = -J_3, \quad [J_2, J_3] = -J_1, \quad [J_3, J_1] = -J_2. \quad (52)$$

۲.۷ جبرلی $su(2)$

مولدهای این جبر ماتریس های پادهرمیتی و بدون ردّ دو در دو هستند. آنها را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$T_1 := \frac{i}{2}\sigma_1, \quad T_2 := \frac{i}{2}\sigma_2, \quad T_3 := \frac{i}{2}\sigma_3. \quad (53)$$

روابط جابجایی به شکل زیر است:

$$[T_1, T_2] = -T_3, \quad [T_2, T_3] = -T_1, \quad [T_3, T_1] = -T_2. \quad (54)$$

۳.۷ جبرلی $sl(2, R)$

مولدهای این جبر ماتریس های حقیقی و بدون ردّ دو در دو هستند. آنها را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$S_1 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

روابط جابجایی به شکل زیر است:

$$[S_1, S_2] = -S_3, \quad [S_2, S_3] = -S_1, \quad [S_3, S_1] = S_2. \quad (56)$$

در تمرین ها با جبرلی گروه های ماتریسی دیگر نیز آشنا خواهیم شد. فعلاً می بایست در مسیر حرکت خود کمی استراحت کنیم و بجای ادامه مطالعه جبرهای لی وساختارهای مربوط به آنها، توجه خود را به مطالعه نمایش های گروه ها بخصوص گروه های متناهی ونمایش روی توابع معطوف کنیم. این کار به خصوص باتوجه به نقش مهم نمایش ها در فیزیک اهمیت دارد. در آینده به موضوع ساختمان جبرهای لی باز خواهیم گشت.

■ تمرین: برای هر کدام از گروه های زیر یک پایه برای جبر لی بدست آورید. روابط جابجایی بین مولدها را نیز مشخص کنید:

الف- گروه $SO(n, R)$,

ب- گروه $SP(2n, R)$

پ- گروه $SU(n)$.

۸ ضمیمه

برای خواننده ای که به تعریف دقیق خمینه علاقمند است این تعریف رادراینجا ارایه می کنیم. یک خمینه M فضای توپولوژیکی است که در آن یک دسته از زیرمجموعه های باز $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ تعریف شده است به

قسمی که اجتماع آنها همه M را می پوشاند. هرکدام از زیرمجموعه های بازمثل U_α با یک تابع پیوسته و وارون پذیر f_α بایک ناحیه باز از R^n همانریخت شده است. یعنی

$$f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow R^n \quad (57)$$

تصویر U_α تحت f_α را با $f_\alpha(U_\alpha)$ نشان می دهیم. n بعد خمینه نامیده می شود. به زبان ساده این شرط بیان می کند که خمینه به طور موضعی می بایست همانریخت با R^n باشد. مثلاً سطح یک کره به طور موضعی همانریخت با R^2 و داخل یک کره به طور موضعی همانریخت با R^3 است.

زوج (U_α, f_α) را یک نقشه و مجموعه تمام (U_α, f_α) ها را یک اطلس می خوانیم. تابع f_α درحقیقت به نقاط U_α مختصات نسبت داده است. اگر $p \in U_\alpha$ آنگاه مختصات p را دراین نقشه با

$$f_\alpha(p) = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \quad (58)$$

نشان می دهیم. حال باید مختصات نقشه های مختلف شرط مهمی را رعایت کنند و آن اینکه دراشتراک بین هر دو مجموعه باز مثل U_α و U_β تابع تغییر مختصات می بایست مشتق پذیرباشد، به عبارت بهترتابع

$$f_\alpha \circ f_\beta^{-1} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (59)$$

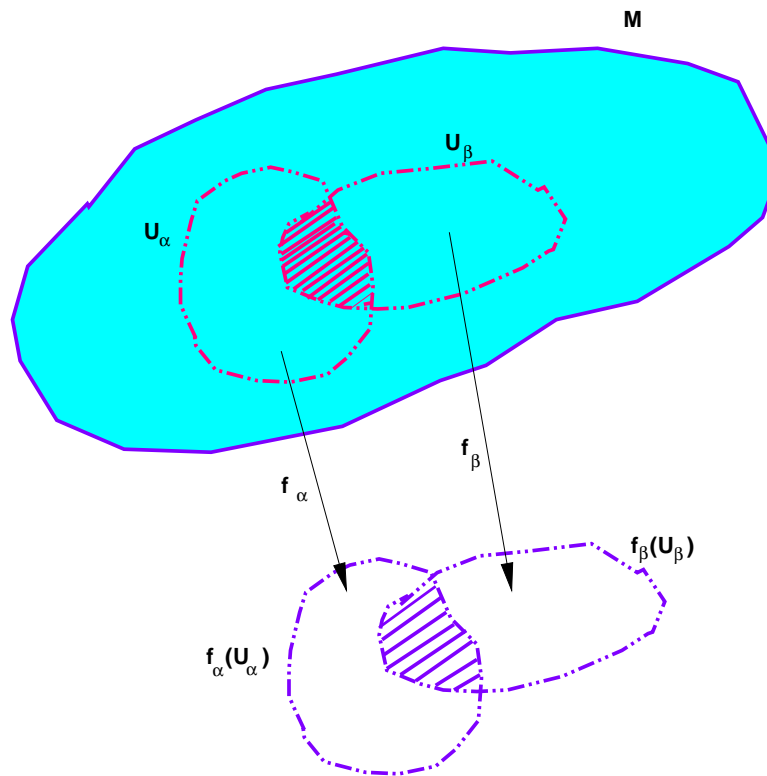
شکل (5) یک خمینه را با دوتا از نقشه ها نشان می دهد.

می بایست یک تابع مشتق پذیرباشد. اگر نقطه $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ آنگاه تابع فوق به زبان ساده ترکارزیرا انجام می دهد:

$$(x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta) \longrightarrow p \longrightarrow (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha). \quad (60)$$

دریک خمینه تمام توابع از نوع فوق می بایست مشتق پذیرباشند. به عبارت دیگر تمام مشتقات جزئی $\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta}$ می بایست وجود داشته باشند.

بین فضاهای توپولوژیک تنها می توانستیم درباره پیوستگی توابع صحبت کنیم ولی با داشتن مختصات روی خمینه هامی توانیم راجع به مشتق پذیری توابع نیز حرف بزنیم. فرض کنید که $H : M \longrightarrow N$ یک تابع باشد. اطلس روی خمینه m بعدی



شکل ۵: خمینه M و دوتا از نقشه های آن.

M را با $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ و اطلس روی خمینه n بعدی N را با $\{V_\alpha, g_\alpha\}$ نشان دهیم. فرض کنید که این تابع نقطه $p \in U_\alpha \subset M$ را به نقطه $H(p) \in V_\beta \subset N$ می نگارد. در این صورت تابع $g_\beta \circ H \circ f_\alpha^{-1}$ تابعی است از ناحیه ای از R^m به ناحیه ای از R^n است. حال تابع H را در نقطه p مشتق پذیر می گوئیم اگر تابع $g_\beta \circ H \circ f_\alpha^{-1}$ در مختصات نقطه p مشتق پذیر باشد. به عبارت خیلی ساده اگر مختصات نقطه p را در نقشه U_α با $(x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)$ و مختصات نقطه $H(p)$ را در نقشه V_β با $(y_1^\beta, \dots, y_n^\beta)$ نشان دهیم می بایست مشتقات جزئی

$$\frac{\partial y_i^\beta}{\partial x_j^\alpha} \quad (61)$$

وجود داشته باشند. بدلیل توابع تغییرمختصات در هر کدام از خمینه هامشتق پذیر هستند، هرگاه تابع H را بر حسب مختصات دیگری نیز بیان کنیم همچنان مشتق پذیر باقی خواهد ماند.