درسنامه نظریه گروه، درس دوازدهم

طبقه بندی جبرهای نیم ساده

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۱۳ خرداد ۱۳۹۵

۱ مقدمه

درهرشاخه ای از ریاضیات بعداز تعریف یک ساختارریاضی مثل گروه یا جبر و آشنا شدن با مثال های آن و بررسی خواص آن ساختار، مهم ترین هدفی که دنبال می شود طبقه بندی تمام انواع اشیایی است که مصداقی از آ ن ساختارهستند. یک طبقه بندی کامل ازگروه های متناهی هنوز انجام نشده است . درموردگروه های لی دیدیم که می توان ساختمان گروه را ازروی جبرلی آن بدست آورد. دردرس دهم دیدیم که برای هر جبر لی رابطه زیروجوددارد:

$$\begin{aligned} Lie\ \ Algebra &= Solvable \oplus_s Semisimple \\ Semisimple &= Simple \oplus Simple \oplus Simple \cdots . \end{aligned} \qquad (۱)$$

علیرغم مطالب زیادی که درمورد جبرهای حل پذیر دانسته شده است هنوزیک طبقه بندی کامل ازآنها بدست نیامده است. خوشبختانه جبرهای ساده ودرنتیجه جبرهای نیم ساده به طورکامل طبقه بندی شده اند . هدف ما دراین درس آن است که نشان دهیم که این طبقه بندی چگونه انجام

شده است و نتیجه طبقه بندی چیست. دراین بخش می خواهیم تمام جبرهای ساده را طبقه بندی کنیم. دیدیم که تمامی اطلاعات هر جبر ساده را می توان دردیاگرام دینکین آن گنجاند. بنابراین روشی که مادراین درس بکارمی بریم آن است که تمام دیاگرام های دینکین را طبقه بندی کنیم.

۲ طبقه بندی جبرهای ساده

نخست می خواهیم ببنیم که ساده بودن یک جبرلی چگونه دردیاگرام دینکین آن منعکس می شود. این بررسی ما را به یک نتیجه ساده می رساند وآن اینکه یک جبرلی ساده است اگر وفقط اگر دیاگرام دینکین آن یک پارچه باشد یعنی از دو قسمت مجزا تشکیل نشده باشد.

تعریف: یک سیستم ریشه های ساده که آن را با $\prod$ نشان می دهیم تجزیه پذیرخوانده می شود
هرگاه بتوان آن را به دو قسمت متعامد تجزیه کرد . به عبارت دیگر سیستم $\prod$ تجزیه پذیراست هرگاه بتوان نوشت:

$$\prod = \prod_1 \bigoplus \prod_2 \qquad | \qquad \prod_1 \perp \prod_2 . \tag{۲}$$

طبیعی است که دیاگرام دینکین چنین سیستمی از دوقسمت مجزا تشکیل خواهد شد، زیرا بنابرقواعد دینکین ریشه های ساده‌ای که برهم عمود باشند باهیچ خطی به هم وصل نمی شوند.

حال نشان می دهیم که دریک چنین سیستمی زیرجبرمربوط به هرکدام از قسمت های $\prod_1$ یا $\prod_2$ یک زیرجبرناوردا تشکیل می دهند وبنابراین سیستم $\prod = \prod_1 \oplus \prod_2$ متناظربایک جبرساده نیست.

■ **قضیه:** اگر یک سیستم ریشه ها تجزیه پذیرباشد، آنگاه

الف: ریشه های مربوط به دو قسمت مجزا بایکدیگر جابجا می شوند و

ب: هرکدام از قسمت ها همراه بایک قسمت از زیرجبرکارتان یک زیرجبرناوردا تشکیل می دهد.

- **اثبات الف:** فرض کنید که $\alpha \in \prod_1$ و $\beta \in \prod_2$. می دانیم که $\beta - \alpha$ یک ریشه نیست. بنابراین پایین ترین پلهٔ نردبان α که روی β بنامی شود عبارت است از خود β که نتیجه اش این می شود که $-p = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ که درآن $\beta + p\alpha$ بالاترین پله این نردبان است. اما باتوجه به شرط عمود بودن $\prod_1$ بر $\prod_2$ می فهمیم که $(\alpha, \beta) = 0$ و درنتیجه $p = 0$. این امربه این معناست که $\alpha + \beta$ نیز یک رشته نیست ودرنتیجه $[E_\alpha, E_\beta] = 0$. یعنی هرریشه متعلق به $\prod_1$ با هرریشه متعلق به $\prod_2$ جابجامی شود.

- **اثبات ب:** فرض کنید که $\prod_1$ n_1 بعدی و $\prod_2$ n_2 بعدی باشد. ازآنجا که ریشه های $\prod_1$ بر ریشه های $\prod_2$ عمود هستند می توانیم برای فضای ریشه ها پایه ای انتخاب کنیم که ریشه های متعلق به $\prod_1$ تنها n_1 مولفه غیرصفر داشته باشند و ریشه های متعلق به $\prod_2$ نیز n_2 مولفه غیرصفر متفاوت داشته باشند. دراین صورت زیرجبرکارتان C به طور طبیعی به دو زیرجبر C_1 و C_2 تقسیم می شود. دراین صورت به طور سمبلیک روابط جابجایی زیر را خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&[C_1, C_2] = 0 \qquad [C_1, \pi_2] = 0 \\
&[\pi_1, C_2] = 0 \qquad [\pi_1, \pi_2] = 0
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

به عنوان یک تمرین ساده خواننده می تواند نشان دهد که اگر یک عنصر با ریشه های ساده جابجا شود دراین صورت باتمام ریشه های جبر جابجا می شود. به عبارت بهتر می توان روابط بالا را به شکل زیرنوشت:

$$
\begin{aligned}
&[C_1, C_2] = 0 \qquad [C_1, \sum_2] = 0 \\
&[\sum_1, C_2] = 0 \qquad [\sum_1, \sum_2] = 0
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

این رابطه آخر بیان می کند که کل جبرِ A رامی توان به شکل زیرنوشت که درآن $A_1 = C_1 \oplus \sum_1$ و $A_2 = C_2 \oplus \sum_2$

$$
A = A_1 \oplus A_2. \tag{۵}
$$

درنتیجه جبرلی A یک جبرنیم ساده است.

ازاین به بعد یک سیستمِ π یا $\pi - system$ را به شکل زیرتعریف می‌کنیم .:

- **تعریف:** یک سیستم π مجموعه ای از بردارهای حقیقی است به قسمی‌که

- **الف:** این سیستم به مفهومی‌که دربالا توضیح داده شد تجزیه ناپذیراست،

- **ب:** بردارهای آن مستقل خطی هستند،

- **ج:** به ازای هردوبردار $\alpha,\ \beta \in \pi$، $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ یک عدد صحیح است.

هر$\pi-$ سیستمی را می توان به شکل یکتا با دیاگرام دینکین آن توصیف‌کرد.

درواقع یک $\pi - system$ با تعریفی‌که دربالا ارائه‌کردیم مجموعه ریشه های ساده یک جبر لی ساده است. بنابراین طبقه بندی جبرهای ساده معادل است با طبقه بندی $\pi - system$ ها و یا طبقه بندی دیاگرام های دینکینِ یکپارچه.

دریک $\pi-$ سیستم می توان بعضی از بردارها را حذف‌کرد. این‌کار به هیچ‌کدام از خواص الف تا ج لطمه نمی زند. بنابراین هرزیر سیستم از یک $\pi-$ سیستم خود یک $\pi-$ سیستم است. این نکته دربحث های بعدی ما اهمیت بسیار زیاد دارد.

حال قدم به قدم طبقه بندی سیستم های π یا دیاگرام های دینکین را انجام می دهیم. درادامه فرقی بین یک دیاگرام دینکین و یک $\pi-$ سیستم قائل نخواهیم شد. با توجه به این‌که یک زیر سیستمِ π خود می تواند یک $\pi-$ سیستم باشد، این امر به این معناست‌که در یک دیاگرامِ دینکین اگر بعضی از نقاط و تمام اتصالات آنها را حذف‌کنیم، بازهم یک دیاگرام دینکین مجاز بدست می آید. در استدلال های آینده مکررا از

شکل ۱: تنها دیاگرام های دینکین سه نقطه ای .

این نکته استفاده می‌کنیم.

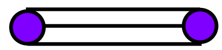
- **قضیه‌اول:** تنها $\pi-$ سیستم متشکل از ۳ بردار به یکی از دوفرم نشان داده شده درشکل (1) است.

- **اثبات:** می دانیم‌که مجموع زوایای بین سه بردار می بایست از ۳۶۰ درجه‌کمترباشد. ازطرفی تنها زوایای ممکن دریک $\pi-$ سیستم عبارتند از ۹۰، ۱۲۰، ۱۳۵ و ۱۵۰ درجه. سه زاویه ۱۲۰ درجه نمی توانیم داشته باشیم زیرابااستقلال خطی بردارها منافات داریم. بنابراین حتماً یکی از زوایا می بایست ۹۰ درجه باشد. ضمناً دوزاویه ۹۰ درجه نمی توانیم داشته باشیم زیرا منجربه تجزیه $\pi-$ سیستم به دوقسمت می شود. بنابراین تنها امکانات مجازبرای زوایا عبارتند از:

- **الف:** ۹۰ ، ۱۲۰ و ۱۲۰ درجه‌که مطابق با شکل a در (1) است و

- **ب:** ۹۰ ، ۱۲۰ و ۱۳۵ درجه‌که مطابق با شکل b در (1) است.

ازآنجاکه هرزیرسیستم از یک $\pi-$ سیستم خود یک $\pi-$ سیستم است نتیجه ای‌که از این قضیه بدست می آید این است‌که هر سه ریشه متصل ودرنتیجه تجزیه ناپذیراز یک $\pi-$ سیستم می بایست دریکی از دو حالت نشان داده شده درشکل (1) است. این نتیجه نشان می دهد‌که سه بردار ریشه نمی توانند در رئوس یک مثلث قرار بگیرند. بنابراین هیچ دیاگرام دینکینی نمی تواند دارای یک مثلث باشد، یعنی سه تا از ریشه‌های آن به هم وصل شده باشند.



شکل ۲: تنها دیاگرام دینکین با اتصال سه خطی.

- **قضیه‌دوم:** تنها دیاگرام دینکین با سه خط عبارت است از دیاگرام نشان داده شده در (2).

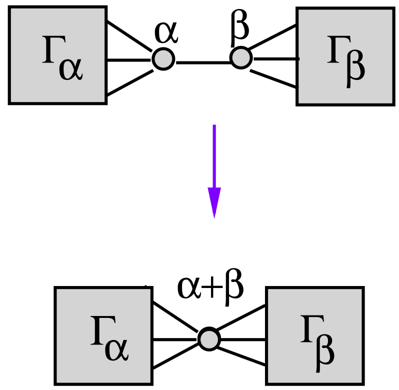
- **اثبات:** هرگاه یک نقطه دیگر بخواهیم به این دیاگرام وصل‌کنیم حداقل مجموع زوایا عبارت خواهد بود از $150 + 120 + 90 = 360$ که بااستقلال خطی بردارها منافات دارد.

- **قضیه سوم:** اگر در یک دیاگرام دینکین دو نقطه بایک خط به هم متصل باشند آنگاه دیاگرامی‌که درآن خط وسط ازبین رفته و دو نقطه یکی شده اند نیز یک دیاگرام دینکین است. شکل (3).

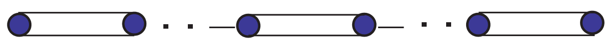
- **اثبات:** دوریشه مورد نظر را α و β می نامیم. بدلیل قضیه ای‌که‌دربالا ثابت‌کردیم هیچ نقطه ای وجود نداردکه هم به α و هم به β متصل باشد. بنابراین ساختمان ریشه ها مطابق شکل ۳ است، یعنی هیچ ریشه ای وجود نداردکه هم به α باشد و هم به β. البته دراین شکل‌کمی عدم دقت وجود دارد به این معناکه بخش های Γ_α و Γ_b لزوماً دو بخش‌کاملاً مجزا را تشکیل نمی دهند. ولی این امر در استدلال این قضیه خللی وارد نمی‌کند.

چون زاویه بین دو ریشه α و β ۱۲۰ درجه است بنابراین نتیجه می‌گیریم‌که $|\alpha + \beta| = |\alpha| = |\beta|$. حال اگر $\gamma \in \Gamma_\beta$ باشد داریم $\gamma \cdot \beta = \gamma \cdot (\alpha + \beta)$ واگر $\gamma \in \Gamma_\alpha$ آنگاه $\gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha$. بنابراین درشکل (3) دیاگرام بالایی را می توان تبدیل به دیاگرام پایینی‌کرد و هنوز یک دیاگرام دینکین مجازبدست آورد. قضیه فوق دو نتیجه اساسی دارد.

- **نتیجه اول:** هیچ دیاگرام دینکینی بیش از یک اتصال دوخطی ندارد.



شکل ۳: یک حرکت مجاز دردیاگرام های دینکین . منظوراز Γ_α تمام نقاطی است که به α متصل اند. همینطور برای Γ_β.



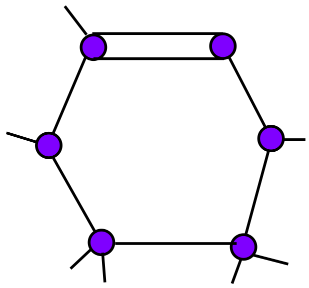
شکل ۴: دو اتصال دو خطی دریک دیاگرام دینکین که بین آنها اتصال های یک خطی وجود دارد.

- **نتیجه دوم:** هیچ دیاگرام دینکینی شامل حلقه نیست.

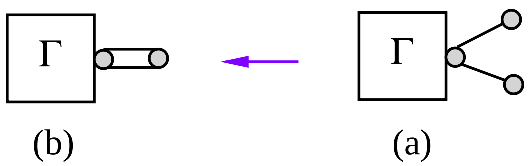
- **اثبات نتیجه اول:** اولاً هیچ دیاگرام دینکینی نمی تواند تماماً از اتصال های دوگانه درست شده باشد زیرا قبلاً دیدیم که هر سه ریشه متصل می بایست دریکی از دوحالت نشان داده شده درشکل (1) قراربگیرند. بنابراین می بایست درکنار اتصال های دوخطی، اتصال های یک خطی نیز وجود داشته باشند. فرض کنید که چنین دیاگرام دینکینی مجازباشد. دراین صورت وضعیتی مثل شکل (4) خواهیم داشت.

اما بنابرقضیه قبلی می توانیم اتصال های وسطی را یک به یک حذف کنیم و به یک دیاگرام دینکین برسیم که اتصال های دوخطی آن کناریکدیگر قرارگرفته اند که می دانیم مجازنیست. بنابراین دیاگرام دینکین اولیه نمی تواند یک دیاگرام دینکین مجازباشد.

- **اثبات نتیجه ب:** فرض کنید که یک دیاگرام مثل دیاگرام سمت چپ درشکل (5) برقرارباشد. دراین صورت می توانیم باحذف کردن اتصالات میانی آن به دیاگرام سمت راست درهمان شکل برسیم که می دانیم مجازنیست.



شکل ۵: با حذف کردن اتصالات یک خطی دردیاگرام سمت چپ به دیاگرام سمت راست می رسیم که یک دیاگرام غیرمجازاست.



شکل ۶: یک حرکت مجازدردیاگرام های دینکین: هرگاه دیاگرام سمت راست مجازباشد دیاگرام سمت چپ نیز مجازاست.

- **قضیه چهارم:** درشکل (3) اگر دیاگرام (a) یک دیاگرام دینکین باشد، آنگاه دیاگرام (b) نیز یک دیاگرام دینکین است.

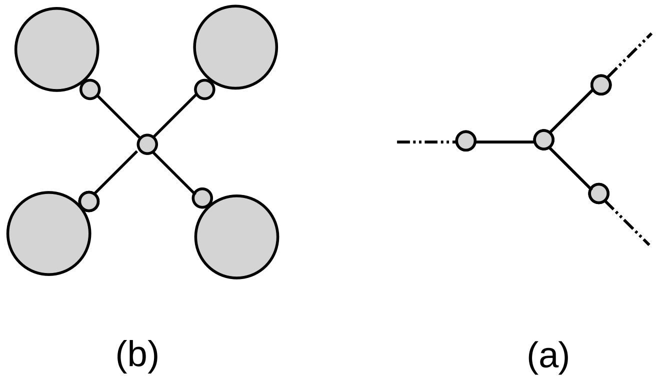
- **اثبات:** ازدیاگرام (a) داریم:

$$\alpha \cdot \beta = -1, \quad \alpha \cdot \gamma = -1, \quad \beta \cdot \gamma = 0. \tag{۶}$$

طول ریشه هارانیز برابربایک گرفته ایم. حال بدست می آوریم:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = -2, \quad |\beta + \gamma|^2 = 4, \tag{۷}$$

که ازآن نتیجه می‌گیریم زاویه بین α و $\beta + \gamma$ برابراست با ۱۳۵ درجه. بنابراین دیاگرام b نیز یک دیاگرام دینکین مجازمی شود.



شکل ۷: تنها شاخه های مجاز دریک دیاگرام دینکین شاخه های سه تایی هستند.

یک نتیجه ازاین قضیه آن است که تنهاشاخه ممکن دریک دیاگرام دینکین عبارت است از یک شاخه سه تایی، مثل دیاگرام a در (7) .
برای اثبات آن فرض کنید که یک دیاگرام دینکین مثل دیاگرام b در (7) داشته باشیم. می توانیم تنهاشاخه وسطی را به عنوان یک دیاگرام دینکین درنظربگیریم، زیراهرزیرسیستم یک $\pi-$ سیستم تجزیه ناپذیرخود یک $\pi-$ سیستم است. حال شاخه وسطی را درنظرمی گیریم و باکابردن مکرر قضیه چهارم به دیاگرامی می رسیم که قبلاً ناممکن بودن آن را ثابت کرده ایم، شکل (8).

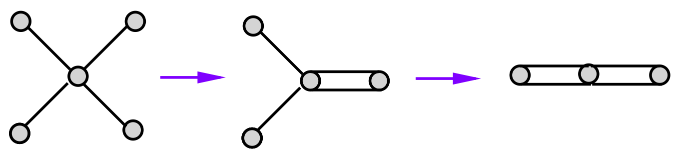
یک نتیجه دیگر این قضیه آن است که هیچ دیاگرام دینکینی نمی تواند هم یک شاخه داشته باشد و هم یک خط دوبل. هیچ دیاگرام دینکینی نیز نمی تواند دارای دو شاخه باشد.

- **قضیه پنجم:** هیچ دیاگرام دینکینی نمی تواند یکی از دیاگرام های نشان داده شده در (10) را شامل باشد.

- **اثبات:** می توان نشان داد که بردارهای مربوط به این دیاگرام ها مستقل خطی نیستند. کافی است که مجموعی از بردارهای مربوط به این دیاگرام ها به صورت $y=\sum_i p_i\alpha_i$ درنظرگرفت که درآن p_i ها اعداد صحیح مثبت هستند ونشان داد که $y\cdot y=0$. یافتن این ضرایب را به عنوان تمرین به عهده خواننده می گذاریم.

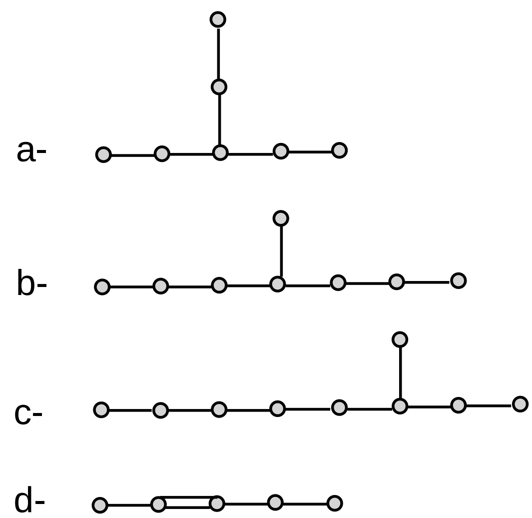
- تمرین : دیاگرام های (۱۰) را در نظر بگیرید و ثابت کنید که این دیاگرام ها با استقلال خطی بردارها سازگار نیستند.

- دیاگرام های دینکین نشان داده شده در شکل (؟؟) را در نظر بگیرید. تمامی ریشه های مربوط به این دیاگرام ها را بدست آورید.

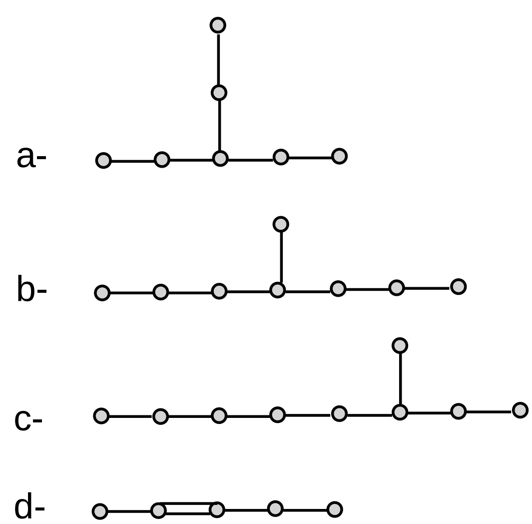


شکل ۸: هرگاه وجودِ یک شاخه ۴ تایی یابیشتر را فرض‌کنیم باانجام عملیات مجاز به یک دیاگرام غیرممکن می رسیم.

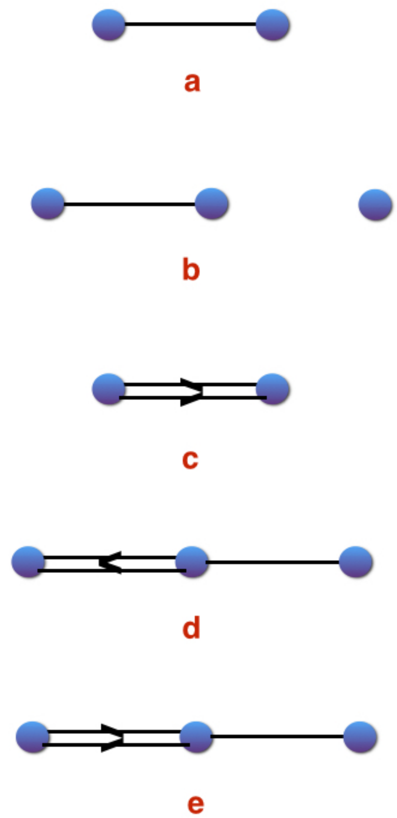
بادرنظرگرفتن تمام محدودیت های اعمال شده تنها دیاگرام های دینکین مجاز مطابق شکل های (11) و (12) خواهند بود. شکل (11) نشان دهنده سری جبرهای ماتریسی‌کلاسیک است‌که دردرس یازدهم به توصیف آنها پرداخته ایم . شکل (12) نشان دهنده جبرهای لی موسوم به جبرهای استثنایی است یا $Exceptional\ \ Lie\ \ Algebras$ است. دراین درس فرصت پرداختن تفصیلی به ساختمان این جبرها رانداریم.



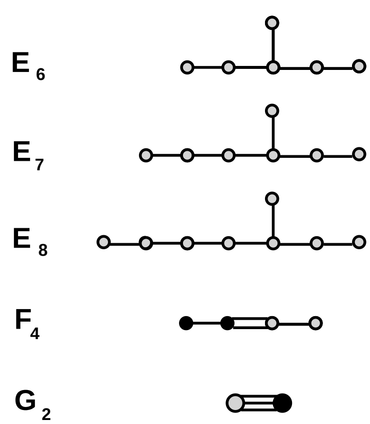
شکل ۹: دیاگرام هاییکه بااستقلال خطی بردارهامنافات دارند وبنابراین دیاگرام دینکین نیستند.



شکل ۱۰: دیاگرام هاییکه بااستقلال خطی بردارهامنافات دارند وبنابراین دیاگرام دینکین نیستند.



شکل ۱۱: چند نمونه ساده از دیاگرام های دینکین (مربوط به یکی از مسئله ها) - جهت فلش ریشه بزرگتر را نشان می دهد.



شکل ۱۲: دیاگرام های دینکین مربوط به جبرهای لی استثنایی .