آشنایی با اصول اولیه یک آزمایش

فهرست

۱- اهمیت و مفهوم خطا و خطای تخمینی یک کمیت

۱-۱ عدم امکان اندازه گیری دقیق کمیت و تعریف خطا

اندازه گیری دقیق یک کمیت فاقد معناست زیرا عوامل زیادی مانع رسیدن ما به مقدار واقعی کمیت می باشد که حذف همه آنها به طور کامل ممکن نیست. بعضی از این عوامل عبارتند از :

۱- وسایل اندازه گیری کمیات

۲- شخص آزمایشگر

۳- عوامل پیچیده و متغیر محیط

خطای یک کمیت = مقدار اندازه گیری شده − مقدار واقعی آن کمیت $\varepsilon = x - X$

با اینکه اندازه گیری دقیق یک کمیت امکان ندارد اما داشتن تخمینی از خطای یک کمیت اهمیت خاصی دارد. شاید بپرسید چرا تخمینی از خطا؟ چون داشتن دقیق خطای یک کمیت معادل داشتن دقیق آن کمیت است .

۱-۲ خطای تخمینی یک کمیت بیانگر چیست؟

خطای تخمینی یک کمیت بیان می کند که تا چه اندازه می‌توان به مقدار کمیت داده شده اطمینان پیدا کرد.

مثال: طول یک میز ۱۲۰ سانتی متر و خطای تخمینی آن ۵ سانتی متر گزارش داده شده است که آن را به این صورت

می‌نویسیم: $120 \pm 5cm$.

تعبیر اولیه این عبارت این است که طول واقعی میز عددی بین ۱۱۵ و ۱۲۵ سانتی متر(۵-۱۲۰، ۵+۱۲۰) می‌باشد اما معنی دقیق تر آن می گوید طول واقعی میز به احتمال حدود ٦٨ درصد بین ۱۱۵ و ۱۲۵ سانتی متر و به احتمال حدود ۹۵ درصد بین ۱۱۰ و ۱۳۰ سانتی متر(۵*۲-۱۲۰ ، ۵*۲+۱۲۰) می‌باشد که در ٤-۲ به آن خواهیم پرداخت *یعنی حداکثر چیزی که خطای تخمینی یک کمیت بیان می کند این است که مقدار واقعی کمیت با احتمال معینی در داخل گستره ای در اطراف مقدار گزارش داده شده می‌باشد.*

مثال: فرض کنید کمیتی از ۱/۲٤ به ۱/۳۵ تغییر کند. اگر خطای این اعداد حدود ۰/۰۱ باشد این تغییر مهم است ولی اگر خطای آنها در حدود ۰/۱ باشد این تغییرات اهمیتی ندارد.

اصولا کم کردن خطاهای موجود در یک آزمایش همیشه کار ساده ای نیست. به این خاطر اگر آزمایشی برای مقاصد خاصی انجام می شود باید ببینیم به چه دقتی احتیاج است تا دچار زحمت مضاعف و بیهوده نشویم.

۱-۳ خطای نسبی و درصد خطای نسبی

حال با دو تعریف جدید آشنا می‌شویم:

خطای نسبی(انحراف نسبی)

$$\frac{x-X}{X} \cong \frac{x-X}{x} = \frac{\varepsilon}{x}$$

درصد خطای نسبی(درصد انحراف)

$$100\times\frac{\varepsilon}{x}$$

۲- خطای وسایل اندازه گیری

ما با وسایل اندازه گیری گوناگونی در کارهای آزمایشگاهی روبرو هستیم مثل خط کش، کولیس، ریز سنج،زمان سنج، نیرو سنج، ترازو، دماسنج و ... که بعضی از آنها هم به صورت دیجیتال(رقمی) هستند. هدف از این بخش این است که بدانیم هر وسیله اندازه گیری تا چه دقتی مقدارکمیت مورد نظر را به دست می‌دهد همچنین با بعضی نکات در مورد خواندن درست کمیات آشنا می‌شویم.

۲-۱ *وسایل اندازه گیری مدرج*

گروهی از وسایل اندازه گیری دارای قسمتی مدرج هستند که باید با چشم خوانده شوند مثل خط کش، کولیس، ریزسنج، ترازو و ... . نکته اول در خواندن کمیت در این وسایل این است که راستای چشم عمود بر صفحه مدرج باشد

و اما خطای این وسایل:

یک قانون سردستی می‌گوید که خطای آنها نصف کوچکترین درجه بندی موجود است.

مثال: خواسته شده با خط کشی عرض یک میز اندازه گرفته شود. یک طرف میز روی صفر خط کش و طرف دیگر خط کش بین ۵۸/۲ و ۵۸/۳ سانتی متر می افتد یعنی عرض میز باید عددی بین این دو عدد باشد پس طول میز برابر $58.25\pm0.05cm$ است.

خب احتمالا باید متوجه شده باشید که این قانون سردستی از کجا آمده است البته اگر شاخص وسیله به یک درجه در روی صفحه مدرج خیلی نزدیک باشد می‌توانیم خطا را باز کاهش دهیم مثلا ربع کوچکترین درجه بندی.

خطایی که برای وسایل اندازه گیری مدرج وجود دارد از دو جا ناشی می‌شود:

۱- از خود دستگاه : هر دستگاهی دقتی دارد که در محدوده همان دقت می‌توان به آن اعتماد کرد

۲- از خود شخص اندازه گیر: وقتی شاخص وسیله بین دو درجه بندی است و بین آنها درجه بندی وجود ندارد تشخیص مقدار این که شاخص در چه کسری از فاصله دو درجه بندی قرار دارد با چشم مشکل است و بالطبع تولید خطا می‌کند حال ممکن است وسیله ای نسبتا دقیق مدرج شده باشد اما خطای چشم مانع از رسیدن به دقت واقعی دستگاه باشد. استفاده از ورنیه(همان چیزی که در کولیس به کار رفته است) ابتکار زیبایی برای رفع این مشکل است.

۲-۲ *وسایل اندازه گیری دیجیتال*

این وسایل صفحه ای دارند که کمیت مورد نظر را به صورت یک عدد تحویل می‌دهند.

در رقم آخر این وسایل ابهامی وجود دارد پس با یک حساب سردستی می توان خطای آنها را برابر کوچکترین مقداری که می‌توانند نشان دهند قرار داد.

مثال: اختلاف پتانسیل یک باطری را با یک مولتی متر دیجیتال ۱/۲۵ ولت می‌خوانیم در نتیجه خطای آن برابر ۰/۰۱ ولت می باشد. $1.25 \pm 0.01V$

ممکن است دقت وسیله بیش از عددی باشد که نشان می‌دهد و عدد نشان داده شده عددی گرد شده از عددی دقیقتر باشد در این حالت خطای کمیت نصف کوچکترین مقدار است در ضمن ممکن است خطای وسیله روی آن نوشته شده باشد. حالتی که خطای وسیله بیشتر از کوچکترین مقدار باشد غیر استاندارد ولی ممکن است.

۲-۳ *دیگر خطاهای وسایل اندازه گیری*

تا حالا فرض می شد وسایلی که با آنها کار می‌کنیم در حد درجه بندی خود عدد درستی را نشان می‌دهند اما همیشه این گونه نیست و اکثر اوقات هم مجبور به تعویض وسیله هستیم ولی گاهی اوقات می‌توان با کمی اصلاح عدد درست را از وسیله گرفت. یک نمونه آن خطای صفر است. فرض کنید با نیروسنجی می‌خواهید وزن یک جسم را پیدا کنید. وقتی نیرو سنج را قائم نگه می‌دارید بدون آنکه جسم را به آن متصل کرده باشید نیروسنج به شما عددی غیر صفر می‌دهد این همان خطای صفر است. در این حالت خاص شما عدد را یادداشت می‌کنید و از عددی که در موقع وصل کردن جسم مورد نظر خوانده اید کم می‌کنید. در بعضی وسایل اندازه گیری امکاناتی وجود دارد که صفر دستگاه را تنظیم کنید مثل ترازوهای یک کفه ای.

۳- انواع خطاها وعوامل موثر در ایجاد آنها

۳-۱ *اندازه گیری متعدد یک کمیت و مفهوم خطای کاتوره ای و سیستماتیک*

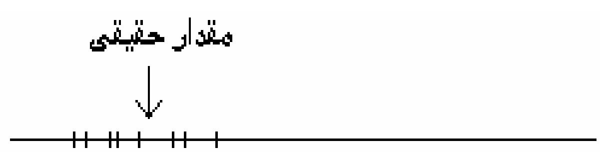
خطاها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- خطاهای کاتوره ای(تصادفی)

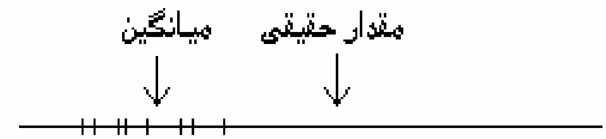
۲- خطاهای سیستماتیک (ذاتی)

کمیتی را چند بار اندازه گیری می‌کنیم و اعداد به دست آمده را روی یک محور مشخص می‌کنیم.

پراکندگی که در روی محور دیده می‌شود ناشی از خطاهای کاتوره ای(تصادفی) موجود می‌باشد. اگر خطاهای موجود در اندازه گیری فقط از نوع خطاهای کاتوره ای باشند نتایج اندازه گیریهای متوالی در اطراف مقدار حقیقی کمیت مورد نظر گسترده می‌شوند. طبق تعریف خطاهای کاتوره ای خطاهایی هستند که احتمال مثبت یا منفی بودن آنها مساوی است پس معقول به نظر می‌رسد که میانگین این اعداد تقریب خوبی از مقدار واقعی کمیت باشد و هرچه تعداد اندازه گیری ها افزایش پیدا کند به مقدار واقعی نزدیک تر شود.



همانطور که گفته شد در حضور خطاهای کاتوره ای به تنهایی نقطه میانگین اعداد به دست آمده تقریب خوبی از مقدار حقیقی کمیت مورد نظر می‌باشد. اثر خطاهای سیستماتیک موجود این است که یک جابجایی از مقدار واقعی در میانگین اعداد به وجود می‌آورد.



تشخیص و رفع خطاهای سیستماتیک در حالت کلی کار نسبتا مشکلی است و معمولا وقتی یک کمیت از طریق آزمایشهای مختلف به دست می‌آید قابل تشخیص است اما کار با خطاهای کاتوره ای و تشخیص درست کمیت نسبتا ساده است* چون اگر در آزمایشی خطاهای کاتوره ای بزرگی وجود داشته باشند، به صورت یک مقدار بزرگ در خطای نهایی آشکار خواهند شد ولی حضور ناپیدای یک خطای سیستماتیک ممکن است به ارائه یک نتیجه ظاهرا معتبر همراه با یک خطای تخمینی کوچک منجر شود که در واقع اشتباهی جدی است برای مثال به مقداری که میلیکان برای بار الکترون به دست آورده است توجه کرده و با مقدار کنونی آن مقایسه کنید:

مقدار میلیکان: $(1.591 \pm 0.002) \times 10^{-19} C$

مقدار کنونی: $(1.602189 \pm 0.000005) \times 10^{-19} C$

اکنون به حاد بودن چنین خطاهایی پی می‌برید که حتی بهترین آزمایشگران هم از آن در امان نبودند در واقع خطاهای سیستماتیک را باید یکی یکی کشف و حذف کرد. این کار قاعده کلی ندارد و با تجربه زیاد به دست می‌آید.

۳-۲ *خطاهای کاتوره ای(تصادفی)*

اصولا تمام عوامل موجود که تاثیر آنها مستقل از کمیات موجود در آزمایش است می‌توانند تولید خطای کاتوره ای کنند. به همین علت پراکندگی در غیاب خطاهای سیستماتیک حول مقدار واقعی نسبتا یکنواخت است یا به عبارتی دیگر احتمال مثبت یا منفی بودن این خطا یکی است. تغییرات دما، رطوبت، جریانات جوی، تغییرات جریانات برق، خود شخص اندازه گیر می‌توانند عامل تولید خطای کاتوره ای باشند. فرض کنید زمان تناوب یک آونگ را چندین بار با یک کرنومتر اندازه گرفته ایم. خطاهای حاصل در به کار انداختن کرنومتر و توقف آن و بی نظمیهای کوچک در حرکت آونگ تغییراتی در نتایج اندازه گیری متوالی به وجود می‌آورند که می‌توان آنها را به عنوان خطاهای کاتوره ای در نظر گرفت.

۳-۳ *خطاهای سیستماتیک(ذاتی)*

خطاهای سیستماتیک معمولا موقعی پیش می‌آیند که واقعیت آزمایش از مفروضات نظری تعدی می‌کند و از ضریب تصحیحی که این تفاوت را اعمال کند چشم پوشی می‌شود.

چند مثال از خطاهای ذاتی

۱- معیوب بودن وسیله اندازه گیری: ساده ترین نوع آن خطای صفر می‌باشد ،کرنومتری که کمی کند کار می‌کند، ولت سنجی که محور عقربه آن دقیقا در مرکز صفحه مدرجش نباشد(در اینجا یک خطای ذاتی تناوبی وجود دارد).

۲- اندازه گیری ارتفاع یک مایع در لوله وقتی از یک مقیاس متصل به لوله استفاده می‌کنیم و لوله دقیقا قائم نباشد: دراین حالت خطای ذاتی مثبت است و با افزایش ارتفاع زیاد می‌شود.

---

* در قسمت ٤ به کمک مفاهیم آماری به این موضوع پرداخته خواهد شد.

۳- اندازه گیری شتاب جاذبه زمین به وسیله یک سطح شیبدار که دارای اصطکاک می‌باشد ولی وجود آن فرض نشده باشد.

٤- **کمیات اولیه** : *یافتن مقدار مناسب و خطای تخمینی از روی اندازه گیریهای متعدد* یک کمیت

٤-۰ تعریف کمیات اولیه و ثانویه

مفهوم کمیت اولیه و ثانویه یک مفهوم من درآوردی ولی مفید می‌باشد.

کمیت اولیه: کمیتی که مستقیما از روی وسیله اندازه گیری خوانده می‌شود مثل طول یک میز، اختلاف پتانسیل دو سر یک باطری و زمان سقوط یک گلوله فلزی از یک ارتفاع مشخص.

کمیت ثانویه: این نوع کمیت مستقیما از روی وسیله اندازه گیری خوانده نمی‌شود بلکه توسط تابعی به کمیات اولیه و ثانویه دیگر ربط پیدا می‌کند مثل چگالی یک جسم که از روی تقسیم جرم بر حجم جسم به دست می‌آید. در این حالت جرم جسم می‌تواند کمیت اولیه (توسط ترازو) یا ثانویه(g / وزن(توسط نیرو سنج)) باشد. همین طور حجم می‌تواند کمیت اولیه (با حجم مایع جابجا شده مثل آب در یک استوانه مدرج) یا ثانویه(حجم=طول*عرض*ارتفاع (توسط خط کش یا کولیس) اگر مکعبی شکل باشد) باشد.

٤-۱ مقدار مناسب کمیت

در اینجا روی خطاهای کاتوره ای معطوف تمرکز کرده و فرض می‌کنیم خطاهای سیستماتیک وجود ندارد*. برای به دست آوردن درست یک کمیت چند بار باید اندازه گیری انجام شود . اعداد به دست آمده را $x_1, x_2, ..., x_N$ می‌نامیم. هدف نهایی در این قسمت دو چیز است:

۱- یافتن مقدار مناسب کمیت از روی اعداد موجود

۲- یافتن خطای تخمینی این مقدار از روی اعداد موجود

جواب قسمت اول همانطور که قبلا اشاره کرده بودیم میانگین این اعداد می‌باشد.

$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$ حال به دنبال جواب قسمت دوم می‌گردیم.

٤-۲ مفهوم پراکندگی

* خطاهای سیستماتیک فقط انتقالی در مقدار به دست آمده از کمیت به وجود می‌آورند.

در آزمایشی زمان سقوط یک توپ کوچک از یک ارتفاع معین ($90.4 \pm 0.05cm$) چندین بار اندازه گیـری شـده است و اعداد زیر به دست آمده است:

t (s)	0.34	0.41	0.37	0.41	0.42	0.89	0.37	0.49	0.43	0.40	0.41	0.47

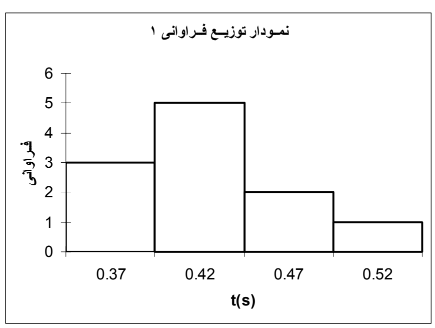
در بین این اعداد، عددی که مشخص شده است خیلی پرت به نظر می‌رسد و می‌توان بـا ملاحضـاتی آن را حـذف کرد. جالب است بدانید در این آزمایش خاص علت اینکه این عدد به دست آمده ایـن اسـت کـه کرنـومتر توسـط آزمایشگر صفر نشده واین عدد در واقع مجموع دو نتیجه متوالی می‌باشد.
حـال مـا ۱۱ عـدد داریـم (۰/۸۹ را دور انـداختیم). میـانگین اینهـا یعنـی مقـدار مناسـب کمیـت برابـر اسـت بـا:

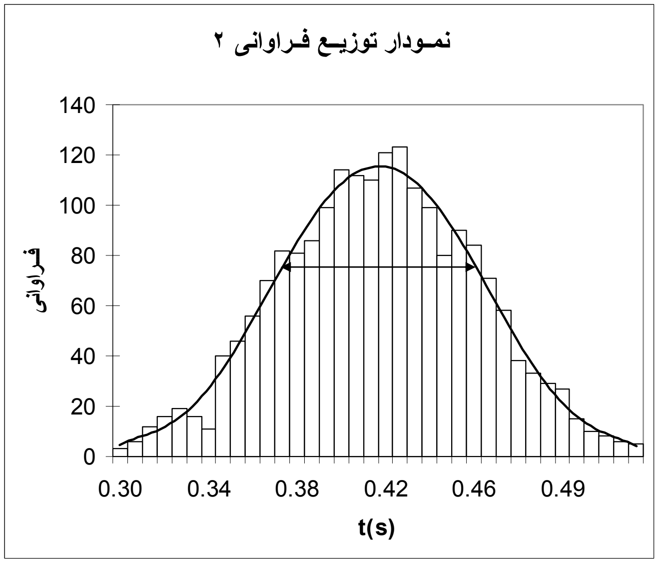
$$\frac{0.34+0.41+...+0.47}{11}=0.41s$$

اکنون چهار بازه مساوی متوالی تعریف‌کرده و تعداد اعدادی که در هر بازه هستند را شمرده و در جدولی یادداشـت می‌کنیم.

توزیع اعداد (فراوانی)	بازه ها(s)
۳	۰/۳۲–۰/۳۷
۵	۰/۳۷–۰/۴۲
۲	۰/۴۲–۰/۴۷
۱	۰/۴۷–۰/۵۲

همان طور که می‌بینید چون تعداد اندازه گیریها کم بوده است(در اینجا یازده تا) طول بازه ها طوری انتخـاب شـده اند که دارای تعداد فراوانی معقولی باشند. در نمودار توزیع فراوانی ۱ ، این فراوانی ها را به تصـویر کشـیده اسـت. حال فرض کنید تعداد اندازه گیریهای افزایش پیدا کنند مثلا به دو هزار بار برسند. اکنون نمودار توزیـع فراوانـی ۲، فراوانی این اندازه گیریها را نشان می‌دهد.





در اینجا طول بازه ها ۰/۰۱ در نظر گرفته شده است (طول بازه ها نباید کمتر از خطای وسیله اندازه گیری باشد) که می توان این مقدار را با طول ۰/۰۵ برای نمودار ۱ مقایسه کرد.

اگر اندازه گیریهایمان را باز ادامه دهیم به توزیعی هموار می‌رسیم که در نمودار توزیع فراوانی ۲ مشخص شده است. این توزیع هموار با تقریب خوبی یک توزیع گاوسی می‌باشد البته چون تعداد اندازه گیریها به بینهایت میل می‌کند از مفهوم فراوانی نسبی (به جای فراوانی) که عبارت است از فراوانی هر بازه تقسیم بر تعداد کل اندازه گیریها، استفاده می شود.

یعنی توزیع یا تابع گاوسی یک توزیع فراوانی نسبی می‌باشد و به همین علت مساحت زیر نمودار آن برابر ۱ می‌باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

f(x) تابع گاوسی می‌باشد و منظور از منفی و مثبت بینهایت جمع روی همه اعداد می‌باشد. این تابع در واقع یک تابع احتمال است و f(x)dx بیان کننده احتمال وجود نتیجه یک اندازه گیری در بازه x تا x+dx می باشد. این تابع یک تابع متقارن حول $x = X$ می‌باشد که ماکزیمم مقدار آن هم در همین نقطه می‌باشد(X مقدار واقعی کمیت است). میانگین اعداد اندازه گیری شده وقتی اندازه گیریها به سمت بینهایت میل کند برابر X می‌شود. این تابع به شکل $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$ می‌باشد. این تابع دو نقطه بحرانی در نقاط $x = X - \sigma$ و $x = X + \sigma$ دارد که پیکان دوسر موجود در نمودار ۲ این نقاط بحرانی و بازه بین آنها را مشخص می‌کند. σ(سیگما) معیار خوبی برای بیان پراکندگی حول میانگین دسته ای از اعداد (در اینجا مقادیر اندازه گیری شده) می‌باشد به روابط زیرتوجه کنید:

$$\int_{X-\sigma}^{X+\sigma} f(x)dx \approx 0.68 \quad \text{و} \quad \int_{X-2\sigma}^{X+2\sigma} f(x)dx \approx 0.95$$

این روابط بیان می‌کند که هر اندازه گیری به احتمال حدود ٦٨ درصد در بازه $\bar{x} - \sigma$ تا $\bar{x} + \sigma$ و به احتمال حدود ۹۵ درصد در بازه $\bar{x} - 2\sigma$ تا $\bar{x} + 2\sigma$ می‌باشد. σ را انحراف معیار، انحراف استاندارد* یا خطای معیار

Standard Deviation *

در یک تک مشاهده می‌نامیم. علت نامگذاری خطای معیار در یک تک مشاهده این است که σ خطای تخمینی هر اندازه گیری به تنهایی را از مقدار واقعی کمیت به ما می‌دهد اما چیزی که مطلوب ماست خطای تخمینی میانگین اندازه گیریهای معدود ما از مقدار واقعی کمیت می‌باشد.

کمیتی N بار اندازه گیری شده است . می توانیم فرض کنیم که ما مجموعه بزرگی از تعداد بسیار زیادی اندازه گیری داریم و آن را M می‌نامیم و این N اندازه گیری یک زیرمجموعه N عضوی از مجموعه M می‌باشد. σ در واقع خطای معیار اعضای مجموعه M که هر کدام یک اندازه گیری می‌باشد را نشان می‌دهد. حال ما مجموعه جدیدی به نام M' می‌سازیم که اعضای آن میانگین زیرمجموعه های N عضوی از مجموعه M می‌باشد. انحراف استاندارد یا خطای معیار این مجموعه را σ_m [*] می‌نامیم که به آن خطای استاندارد یا خطای معیار میانگین می‌گویند. این در واقع آن چیزی است که ما به دنبال آن بودیم. σ_m می‌تواند خطای تخمینی خوبی برای میانگین مقادیر اندازه گیری شده می‌باشد.

تعاریف کلی σ و σ_m به شرح زیر می‌باشد:

$$\sigma^2 = <\varepsilon^2> = <(x-X)^2>$$

که علامت < > به معنی متوسط گیری می‌باشد بین تمامی مقادیر موجود داخل آن می‌باشد که در اینجا بین همه مقدارهای اندازه گیری شده x (اعضای مجموعه M) است.

$$\sigma_m{}^2 = <(\bar{x}-X)^2>$$

در اینجا متوسط گیری بین همه اعضای مجموعه M' می‌باشد.

ثابت می‌شود که $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{n=1}^{N}(x_n-\bar{x})^2}{N-1}}$ و $\sigma_m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$ و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n-\bar{x})^2}{N(N-1)}}\ .$$

در این روابط x_n، n امین مقدار اندازه گیری شده از بین N اندازه گیری انجام شده است. در صورتی که N کمتر از ۱۳ تا باشد می‌توان σ_m را از رابطه ساده تر $\sigma_m = \dfrac{r}{N}$ که r تفاوت بین کمترین و بیشترین مقدار در بین x_n ها می‌باشد، به دست آورد[*]. ما به هدفمان در این فصل رسیدیم σ_m خطای تخمینی یک کمیت اولیه می‌باشد. این کمیت را در نهایت بدین صورت می‌نویسیم: $\bar{x} \pm \sigma_m$

حال به سراغ مثال اول این بخش برمی‌گردیم:

$$\bar{x} = \frac{0.34 + 0.41 + ... + 0.47}{11} \approx 0.41s$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{(0.34-0.41)^2 + (0.41-0.41)^2 + ...(0.47-0.41)^2}{11(11+1)}} \approx 0.013s$$

---

[*] Standard Error

[*] برای اثبات این روابط به مرجع(۱) فصل ۳ مراجعه کنید.

$$\sigma_m = \frac{0.49 - 0.34}{11} \approx 0.014s \approx 0.013s$$

مقدار نهایی به صورت $0.41 \pm 0.013s$ یا $0.41 \pm 0.01s$ نوشته می شود.

نکته مهم: خطای وسیله اندازه گیری (در اینجا کرنومتر) برابر ۰/۰۱s می باشد و چون این خطا کمتر از $\sigma_m \approx 0.013s$ است مشکلی پیش نمی آید اما اگر در آزمایشی σ_m کوچکتر از خطای وسیله اندازه گیری کمیت مورد نظر بود به جای σ_m از خطای وسیله اندازه گیری استفاده می کنیم برای مثال اگر $\sigma_m = 0.006s$ باشد آنگاه نتیجه به جای $0.41 \pm 0.006s$ برابر $0.41 \pm 0.01s$ است.

انحراف میانگین: تعریفی است که ممکن است استفاده شود. $\dfrac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{N}$

۵- کمیات ثانویه: *اندازه گیری مقدار مناسب و خطای تخمینی از روی کمیات اولیه و ثانویه مرتبط*

کمیت ثانویه ما توسط تابعی به کمیات اولیه و ثانویه دیگر ربط پیدا می‌کند یعنی $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. در اینجا y کمیت ثانویه مورد نظر ما (کمیت وابسته) و $x_1, x_2, \ldots, x_N$ کمیات اولیه و ثانویه مرتبط(کمیات مستقل) می‌باشند که خطاهای تخمینی آنها برابر $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_N$ * است. هدف نهایی این قسمت دو چیز است:

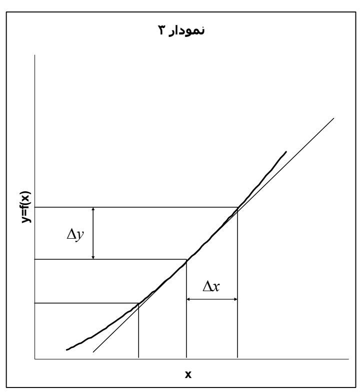
۱- یافتن مقدار مناسب کمیت از روی کمیات مستقل

۲- یافتن خطای تخمینی این مقدار (Δy) از روی کمیات مستقل

جواب قسمت ۱ ساده است کافیست مقادیر مختلف $x_1, x_2, \ldots, x_N$ را در تابع f قرار دهیم تا مقدار مناسب کمیت $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ به دست آید.

۵-۱ محاسبه خطا در توابع یک متغیره

ما حالتی در نظر می‌گیریم که تابع f تابعی از یک کمیت باشد یعنی $y = f(x)$.



همان طور که در نمودار ۳ دیده می‌شود وقتی x به اندازه Δx تغییر کند y به اندازه Δy تغییر می‌کند.

* اینها در واقع σ_m کمیات $x_1, x_2, \ldots, x_N$ می‌باشند.

به خط مماس در نقطه x توجه کنید. شیب این خط طبق تعریف برابر مشتق تابع f در نقطـه x مـی‌باشـد کـه بـه صـورت $\frac{df}{dx}$ مـی‌نویسـند. اگـر Δx کوچـک باشـد همـانطور کـه از روی شـکل دیـده مـی‌شـود Δy از رابطـه $\Delta y \approx \frac{df}{dx}\Delta x$ به دست می‌آید.

<u>چند مثال:</u>

$$y = ax + b \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a \Rightarrow \Delta y = a\Delta x$$

$$y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \Rightarrow \Delta y = nx^{n-1}\Delta x \Rightarrow \Delta y = \frac{n}{x}y\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = n\frac{\Delta x}{x}$$

$$y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \Delta y = \frac{\Delta x}{x}$$

$$y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow \Delta y = e^x\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \Delta x$$

۲-۵ محاسبه خطا در توابع چند متغیره

در اینجا f تابعی از چند کمیت می‌باشد $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$. مقدار Δy در اینجا بدون اثبات آمده است.*

$$(\Delta y)^2 = (\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2)^2 + ...(\frac{\partial f}{\partial x_N}\Delta x_N)^2 = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + ... + (\Delta y_N)^2$$

$\frac{\partial f}{\partial x_n}$ به مشتق جزیی تابع f نسبت به x_n معروف است یعنی مشتق تابع f نسبت به کمیـت مسـتقل x_n مـی‌باشـد وقتی فرض کنیم دیگر کمیات تغییری نمی‌کند. Δy_n هم بیان کننده تغییرات تابع f نسبت بـه کمیـت x_n مـی‌باشـد وقتی x_n به اندازه Δx_n تغییر کند و دیگرکمیات مستقل تغییری نکنند.

<u>چند مثال مهم:</u>

$$y = x_1 + x_2 \Rightarrow (\Delta y)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$$

$$y = x_1 - x_2 \Rightarrow (\Delta y)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$$

$$y = x_1 \times x_2 \Rightarrow (\frac{\Delta y}{y})^2 = (\frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{\Delta x_2}{x_2})^2$$

$$y = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow (\frac{\Delta y}{y})^2 = (\frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{\Delta x_2}{x_2})^2$$

محاسبه مستقیم Δy_n:

$$\Delta y_n = f(x_1, x_2, ..., x_n + \Delta x_n, ...x_N) - f(x_1, x_2, ..., x_n, ...x_N)$$

یا

$$\Delta y_n = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n + \Delta x_n, ...x_N) - f(x_1, x_2, ..., x_n - \Delta x_n, ...x_N)}{2}$$

به کمک این روش دیگر احتیاجی به مشتق گیری ندارید(البته معادل آن است).

<u>مثال:</u>

* برای دیدن اثبات به مرجع (۱) فصل ۳ مراجعه کنید.

$$y = f(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 + x_2)}{\cos(x_2)} \Rightarrow \Delta y_1 = \frac{\sin(x_1 + \Delta x_1 + x_2)}{\cos(x_2)} - y, \Delta y_2 = \frac{\sin(x_1 + x_2 + \Delta x_2)}{\cos(x_2 + \Delta x_2)} - y$$
$$(\Delta y)^2 = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2$$

حال به آزمایش اشاره شده در ابتدای ٤-٢ بر می‌گردیم. توپ از ارتفاع $h = 90.4 \pm 0.05cm$ رها می‌شود و پس از

$t = 0.41 \pm 0.01s$ ثانیه به زمین می‌رسد هدف، مقدار و خطای g می‌باشد.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow g = \frac{2h}{t^2} \Rightarrow (\frac{\Delta g}{g})^2 = (\frac{\Delta h}{h})^2 + (\frac{\Delta t^{-2}}{t^{-2}})^2 \Rightarrow (\frac{\Delta g}{g})^2 = (\frac{\Delta h}{h})^2 + 4(\frac{\Delta t}{t})^2$$
$$g = \frac{2 \times 90.4cm}{(0.41s)^2} = 1.07 \times 10^3 \frac{cm}{s^2} = 10.7 \frac{m}{s^2}$$
$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{(\frac{0.05cm}{90.4cm})^2 + 4(\frac{0.01s}{0.41s})^2} \approx \sqrt{4(\frac{0.01s}{0.41s})^2} \approx 0.05 \Rightarrow \Delta g \approx 0.5 \frac{m}{s^2}$$

پس نتیجه آزمایش به صورت $10.7 \pm 0.5 \frac{m}{s^2}$ می‌باشد. همانطور که می‌بینید آزمایش بسیار بد انجام شده است و نتیجه اصلا خوب نیست چون علاوه بر خطای کاتوره ای زیاد خطای سیستماتیک قابل ملاحظه ای دارد چون مقدار مقدار واقعی g در بازه آن قرار نمی‌گیرد*.

در اینجا بیشترین خطای موثر در خطای نهایی خطای زمان سقوط یعنی Δt می‌باشد علت هم کم بودن t و در نتیجه بزرگ بودن خطای نسبی $\frac{\Delta t}{t}$ می‌باشد. شاید حالا متوجه شده باشید چرا گالیله از سطح شیبدار برای محاسبه g استفاده کرد چون با این کار زمان t افزایش پیدا می‌کند البته وجود اصطکاک در آزمایش سطح شیبدار معضل بزرگی است. امروزه برای اندازه گیری دقیق g از زمان سنج های بسیار دقیق استفاده می‌کنند*. آونگ کاتر هم مقدار دقیقی را نتیجه می‌دهد.

٦- مفهوم ارقام معنادار به عنوان روشی سردستی برای محاسبه خطای کمیات ثانویه

در عمل محاسبه خطای کمیات ثانویه از روی روابط بخش ٥-٢ ممکن است خسته کننده باشد. در اینجا می‌خواهیم با یک مفهوم رایج یعنی ارقام معنا دار و قوانینی که بر آن حاکم است آشنا شویم. برای آنکه دقت کمیتی را بیان کنیم به همراه مقدار کمیت خطای آن را هم می‌نویسیم $x \pm \Delta x$ اما با به کار بردن مفهوم ارقام معنادار دقت یک کمیت در مقدار بیان شده آن مستتر است برای مثال وقتی می‌گوییم که وزن یک توپ ٢٣٥ gr است به خطای آن که برابر ١ gr می‌باشد هم اشاره کرده ایم به عبارتی وزن توپ $235 \pm 1gr$ می‌باشد.

چند مثال:

* جمله ای زیبا از لانسلات هاگین : پژوهشگرانی که با تجربه سر و کار دارند آمار را به عنوان عذری برای انجام آزمایشهای بد تلقی نمی کنند

از مرجع(٢)

* فصل ٧ بخش ٤ مرجع(١) به تحلیل آزمایشی برای اندازه گیری دقیق g تا ٧ رقم اعشار می پردازد .

$3.25s \rightarrow$ سه رقم معنادار $\rightarrow 3.25 \pm 0.01s$

$3.0gr \rightarrow$ دو رقم معنادار $\rightarrow 3.0 \pm 0.1gr$

$0.042A \rightarrow$ دو رقم معنادار (صفرهای قبل از ٤٢ ارقام معنادار محسوب نمی‌شوند) $\rightarrow 0.042 \pm 0.001A \rightarrow$

بهتر است این کمیت بدین صورت نمایش داده شود(عدد نویسی علمی) $4.2\times10^{-2}A = 42mA$

$30cm \rightarrow$ یک رقم معنادار (قرارداد مرجع(۳) فصل ۱) $\rightarrow 30 \pm 10cm \rightarrow 3\times10^{1}cm$

$30.cm \rightarrow$ دو رقم معنا دار(قرارداد مرجع(۳) فصل ۱) $\rightarrow 30 \pm 1cm \rightarrow 3.0\times10^{1}cm$

این دو شیوه نوشتن اصلا توصیه نشده است و بهتر است به دو شکل سمت راست نوشته شود تا گیج کننده نباشد.

٦-١ *قوانین حاکم بر ارقام معنادار*

همان طور که می‌بینید در مفهوم ارقام معنادار خطای هر کمیت توانی از ۱۰ می‌باشد یا در واقع به این شکل ساده شده است. این ساده سازی قوانین ساده ای را به دنبال خواهد داشت.

قانون ۱: تعداد رقمهای اعشار مجموع یا تفاوت دو کمیت برابر تعداد رقمهای اعشار کمیتی است که کمترین رقم اعشار را دارد.

مثال:

$$22.0cm + 35cm = 57cm$$

$$42.1s + 2.12s = 44.2s$$

$12.6gr - 2gr = 11gr$ در اینجا ۱۰/٦ به ۱۱ گرد شده است

اثبات:

از بخش ٥-۲ داشتیم:

$$y = x_1 + x_2 \Rightarrow (\Delta y)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$$

$$y = x_1 - x_2 \Rightarrow (\Delta y)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$$

Δx_1 و Δx_2 یا مساوی اند یا حداقل به اندازه ضریب ۱۰ با هم تفاوت دارند(فرض می‌کنیم $\Delta x_1 > \Delta x_2$ یعنی x_1 کمیتی است که رقم اعشاری کمتری دارد) که در حالت اول $\Delta y = \sqrt{2}\Delta x_1 \approx \Delta x_1$ و در حالت دوم Δx_2 قابل صرف نظر است $(\Delta x_1)^2 \geq 100(\Delta x_2)^2$ که نتیجه می‌شود $\Delta y = \Delta x_1$ یعنی قانون ۱.

قانون ۲: تعداد ارقام معنا دار حاصلضرب یا نسبت دو کمیت برابر تعداد ارقام معنادار کمیتی است که کمترین ارقام معنادار را داراست.

مثال:

$$5.1cm \times 2.42cm = 12cm$$

$$\frac{5m}{24s} = 0.2\frac{m}{s}$$

اثبات: از بخش ٥-۲ داشتیم:

$$y = x_1 \times x_2 \Rightarrow (\frac{\Delta y}{y})^2 = (\frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{\Delta x_2}{x_2})^2$$

$$y = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow (\frac{\Delta y}{y})^2 = (\frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{\Delta x_2}{x_2})^2$$

فرض کنید $x_1 = 2.35s$ درنتیجه $\frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{0.01s}{2.35s} \approx 10^{-2}$ در واقع می‌خواهیم بیان کنیم که در حالت کلی $\frac{\Delta x}{x} \approx 10^{N-1}$ که N تعداد ارقام معنادار کمیت x می‌باشد حال اگر فرض کنیم $\Delta x_1 > \Delta x_2$ با همان استدلال اثبات قبلی ثابت می‌شود که $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1}$ یعنی قانون ۲.

۶-۲ *چند نکته مهم*

۱- در محاسبات طولانی شامل چندین جمع و تفریق و ضرب و تقسیم محاسبات را به طور کامل انجام می‌دهیم و قوانین را روی نتیجه نهایی اعمال کرده و در صورت لزوم گرد می‌کنیم.

مثال: محاسبه زیر با ماشین حساب ...۲۱۹۷/٤١٤٥ به دست آمده که به مقداری که می بینیدگرد شده است.

$$\frac{161.032s + 5.6s + 32.45s}{2.12kg} \times 23.4m = 2.20 \times 10^3 \frac{m.s}{kg}$$

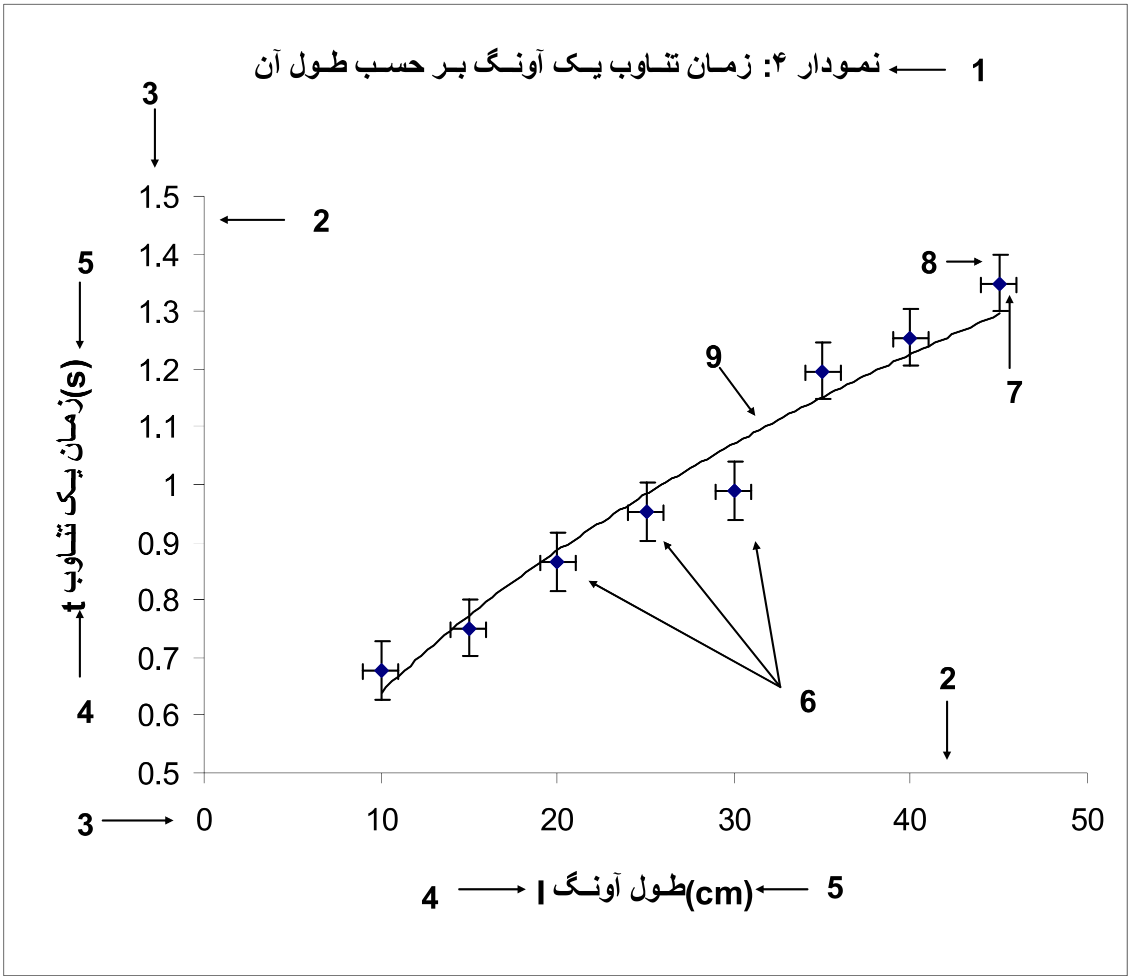
۲- بعضی اعداد در محاسبات دقت کامل دارند مثل $\frac{1}{2}$ در معادله $h = \frac{1}{2}gt^2$ که یک مقدار تجربی نمی‌باشد. با آنها طوری برخورد می‌شود گویا تعداد ارقام معنا دار آن بینهایت است مثلا در اینجا $\frac{1}{2} = 0.500000...$.

۷- نمودار

ضرب المثلی چینی با این مضمون وجود دارد که "کاری که یک تصویر می‌کند هزار صفحه نوشته نمی‌کند". نمودار نمایش دهنده رابطه یک کمیت وابسته با یک یا دو کمیت مستقل است که در حالت اول نمودار دوبعدی و در حالت دوم سه بعدی می‌باشد*. طبق یک بینش فلسفی، یک کل، اطلاعات بیشتری از مجموع اطلاعات اجزاء آن دارد منظور اینکه یک نمودار به عنوان یک کل نمایش دهنده کمیات ، اطلاعاتی را به ما می‌دهد که اگر مقادیرکمیات را در جدولی می‌نوشتیم نمی‌توانستیم به دست آوریم. دیدن رفتارهای کلی کمیات در مقادیر مختلف مثل انتقال فازها، رفتارهای آشوبناک، خطی و غیرخطی بودن و ... در نمودارها کار متداولی است. به کمک نمودارها همچنین می‌توان روابط بین کمیات را در محدوده های مختلف حدس زد. حال ببینیم یک نمودار از چه بخشهایی تشکیل شده است.

۷-۱ *بخشهای مختلف یک نمودار*

* ما در اینجا فقط با نمودارهای دو بعدی کار می کنیم. تعمیم مطالب این بخش به نمودارهای سه بعدی کار ساده ای است.



این نمودار رابطه دوره تناوب یک آونگ را بر حسب طول آن به نمایش می‌گذارد. این نمودار حاصل جدول زیر است:

طول آونگ l(cm) $\pm 1cm$	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥
زمان یک تناوب t(s) $\pm 0.05s$	٠/٦٨	٠/٧٥	٠/٨٧	٠/٩٥	٠/٩٩	١/٢٠	١/٢٦	١/٣٤

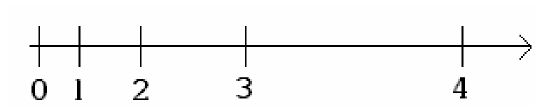
یک نمودار نشان دهنده رابطه یک کمیت وابسته با یک کمیت مستقل است $y = f(x)$. حال به قسمتهای مختلف نمودار ٤ می‌پردازیم:

١- عنوان: شامل شماره نمودار و توضیحی در مورد آن است.

٢- محورها: محور افقی متعلق به کمیت مستقل x و محور عمودی متعلق به کمیت وابسته $y = f(x)$ می‌باشد.

٣- درجه بندی محورها: هر محور باید دارای مبدا و مدرج باشد البته ممکن است مبدا آن در نمودار قرار نگیرد مثل محور عمودی همین نمودار. مکان مبدا و درجه بندی محورها باید به گونه ای باشد که نقاط نمودار(داده های آزمایش) قسمت اعظم نمودار را اشغال کند تا اطلاعات دقیق تری را از آنها بتوان گرفت. یک نکته قابل توجه این

است که ما عادت کرده ایم که فاصله بصری درجات یک محور از هم یکی باشد اما این کار هیچ لزومی‌ندارد شکل زیر نمونه ای از این تخطی می‌باشد:



حال چه لزومی دارد از این خرق عادتها صورت بگیرد؟ کمی صبر کنید دلیلش را خواهید فهمید.

٤- نام کمیت متعلق به هر محور

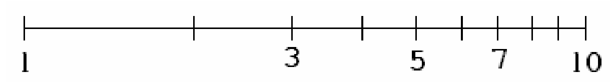
٥- واحد هر کمیت

٦- داده های تجربی ما

۷و۸- خطوط خطا : این خطوط خطای هر مقدار را نمایش می‌دهد. ۷ خطـای کمیـت مسـتقل و ۸ خطـای کمیـت وابسته می‌باشد و اندازه آنها دو برابر اندازه خطای هر مقدار می‌باشد. رسم این خطوط همیشه لزومی ندارد اما برای تعیین معادلات حاکم بر نمودار سودمند هستند.

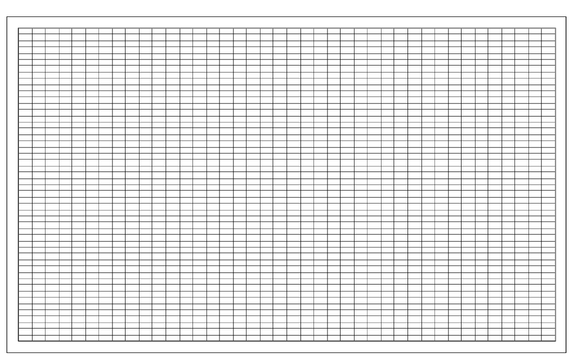
۹- بهترین منحنی یا تابع عبوری: این منحنی یک منحنی هموار است که از میان نقاط نمودار عبور داده شـده اسـت و بهترین تابعی است که می‌توان برای این کمیات در محدوده مشخص حدس زد.

حال برمی‌گردیم به سوالی که چنـد خـط پـیش مطـرح شـد. جـواب ایـن اسـت کـه آزمایشـگران دوسـت دارنـد نمودارهایشان خطی باشد یا حداقل از لحاظ بصری به شکل خط باشد اما مشکل اینست که همـه نمودارهـا خطـی نیستند. می توان کلکی زد و درجه بندی محورها را طوری دستکاری کرد تا نمودار حاصل ظاهرا به شکل یک خط درآید. راستش را بخواهید این کلک به ندرت سودمند می‌باشد ولی برای تابع هایی که به دو شکل $y = ae^{bx}$ و $y = ax^{b}$ می‌باشد کارآیی خوبی دارد اما چگونه؟ ما یک محور بدین شکل مـی‌سـازیم کـه فاصـله بصـری هـر دوعدد متناسب با تفاضل لگاریتم آنها می‌باشد به این محور، محور لگاریتمی گفته می‌شود.

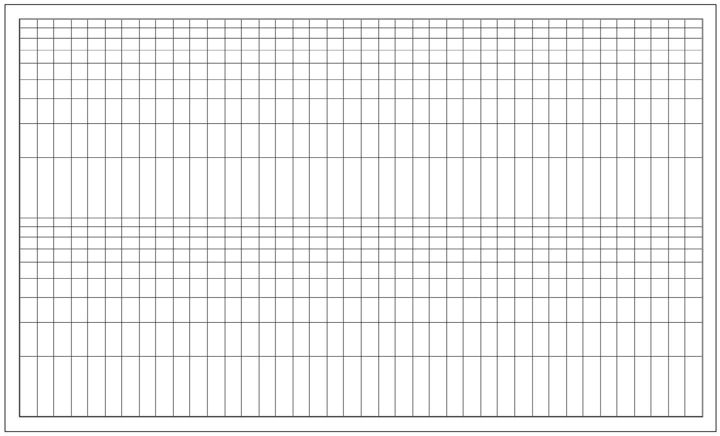


اگر در نمودار هر دو محور لگاریتمی باشد به آن نمودار تمام لگاریتمی گفته می‌شود و توابع به شکل $y = ax^{b}$ در آن خطی دیده می‌شوند و اگر فقط محور عمودی لگاریتمی باشد به آن نمودار نیم لگاریتمی گفته می‌شود و توابع به شکل $y = ae^{bx}$ خطی دیده می‌شوند. دو نوع کاغذ رسم برای رسم این نمودارها وجود دارد به نام کاغذ لگاریتمی و کاغذ نیم لگاریتمی. کاغذ میلیمتری هم برای رسم منحنیهای معمولی می‌باشد.

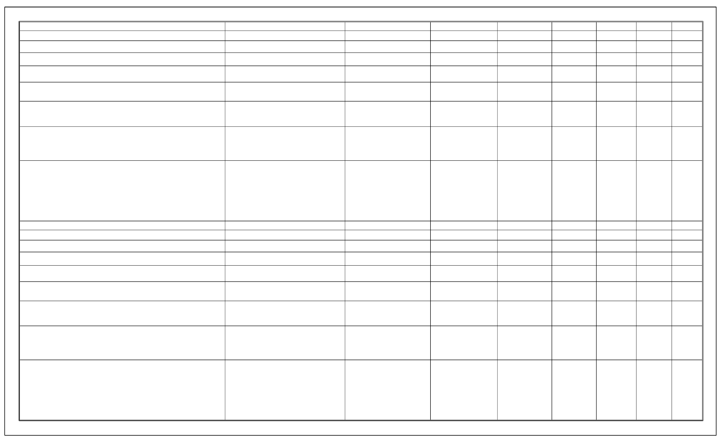
کاغذ میلیمتری



کاغذ نیم لگاریتمی



کاغذ تمام لگاریتمی



۲-۷ بهترین خط عبوری و روش کمترین مربعات

در نمودارهایی که خط نسبتا راستی می‌توان از میان نقاط آن عبور داد شیب و عرض از مبدا کمیتهای مهمی هستند .

مثال: در آزمایش آونگ رابطه روبرو برقرار است: $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow t^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$

پس انتظار می‌رود از روی شیب نمودار t^2 بر حسب l یعنی $\frac{4\pi^2}{g}$ بتوان مقدار g را حساب کرد.

به کمک معادلات زیر از روی مجموعه مختصات نقاط موجود آزمایش یعنی (x_i, y_i) (که x_i، iامین کمیت مستقل و y_i کمیت وابسته مرتبط می‌باشد) می‌توان شیب بهترین خط عبوری (a)، خطای آن(Δa)، عرض از مبدا (b) و خطای آن(Δb) را محاسبه کرد[*]:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}, b = \bar{y} - a\bar{x}, \Delta a \approx \sqrt{\frac{1}{D}\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-2}}, \Delta b \approx \sqrt{(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{D})\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-2}}$$

[*] برای اثبات این روابط به فصل ٤ مرجع(١) مراجعه کنید

که $d_i = y_i - ax_i - b, D = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$

اگر بهترین خطی که از مبدا می گذرد مورد نظر باشد، شیب خط و خطای آن از معادله زیر به دست می آید:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}, \Delta a \approx \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-1}}$$

مثالی از این حالت همین نمودار t^2 بر حسب l می باشد که در بالا بررسی شد.

در ضمن بدست آوردن این مقادیر از روی خود نمودار هم ممکن است کافیست بهترین خطی که با چشم تشخیص داده می شود از میان نقاط عبور داده و با انتخاب دو نقطه با فاصله نسبتا زیاد شیب خط عبوری که برابر $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ می باشد را حساب کرد. در ضمن چون درجه بندیهای دو محور افقی و عمودی از یک جنس و اندازه نیست استفاده از $tg\theta$ برای محاسبه شیب کار درستی نیست. در قسمت ۹-۲ نحوه محاسبه این مقادیر توسط کامپیوتر بیان می شود.

۸- قواعد نوشتن گزارش کار

هر آزمایش از جهت نظم و ترتیب و ماندگاری نتایج به دست آمده، نیاز به یک گزارش مکتوب دارد که باید بر طبق نظم و قواعد خاصی استوار باشد. در زیر به موارد لازم در هر گزارش کار آزمایشگاهی اشاره می‌کنیم:

۱- مشخص کردن عنوان و هدف از انجام هر بخش آزمایش و ذکر وسایل مورد استفاده

۲- رسم شکل که نحوه انجام آزمایش را نشان می‌دهد(شکل هایی که طرز چیدن وسایل را نشان می‌دهد): شکل در حد ممکن ساده باشد پس نقاشی نکنید.

۳- ارائه توضیح مختصر اما کافی درباره نحوه آزمایش و نکات اندازه گیری

٤- ارائه جدولهای اندازه گیری : کمیت و واحد آن یادتان نرود.

٥- به دست آوردن کلیه روابط لازم برای انجام محاسبات (در صورتی که روابط واضح نباشد)

٦- رسم نمودارهای لازم برای تحلیل آزمایش.

۷- محاسبات عددی لازم برای محاسبه مجهولات.

۸- محاسبه خطاهای کمیت های موجود که اندازه گیری یا محاسبه شده اند.

۹- ذکر عوامل خطاهای آزمایش به صورت مجزا و ارائه پیشنهادهای عملی برای رفع آنها و در صورت لزوم انجام آن

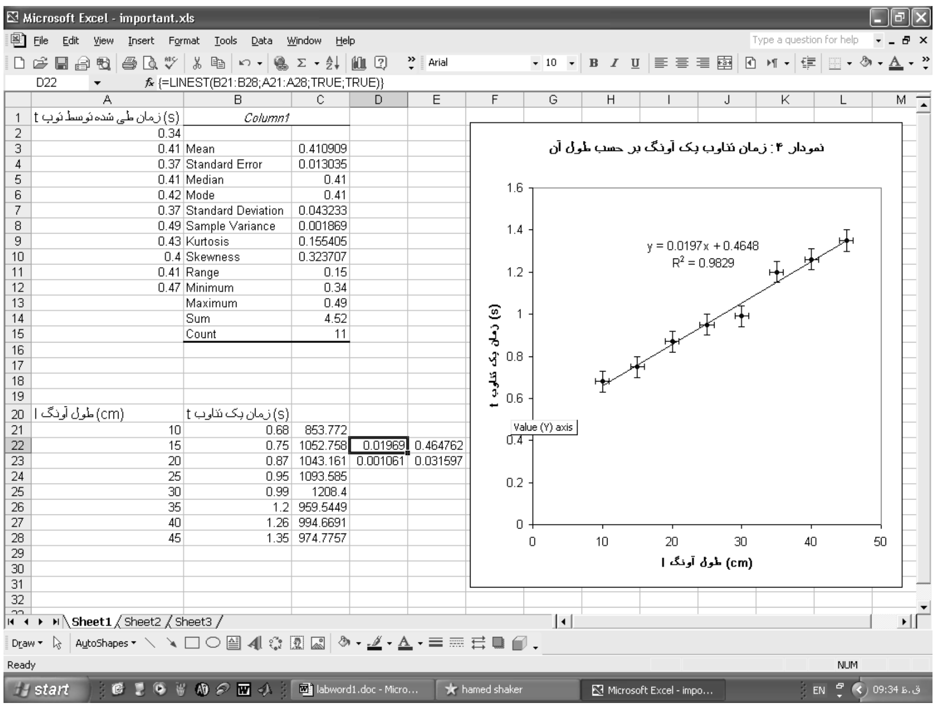
۹- کار با نرم افزار Excel

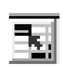
Excel جزء آن دسته از نرم افزارهایی است که به نرم افزارهای صفحه گسترده معروفند. شما می‌توانید در محیط Excel تمامی گزارش کار خود را بنویسید کافیست مقادیر آزمایش را بنویسید، excel به شما امکاناتی می‌دهد تا

اطلاعات لازم را از آنها بگیرید، محاسبات لازم را روی آنها انجام دهید، نمودارهای مربوط به آنان را رسم کنید و ...

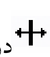
۹-۱ گرفتن اطلاعات آماری از مجموعه ای از مقادیر

می‌خواهیم اطلاعات لازم را از داده های آزمایش ابتدای ٤-٢ بگیریم. اعداد را در ستون A از ردیف ۲ تا ۱۲ وارد کرده (خانه های A2 تا A12) سپس از منوی Tools گزینه Data Analysis را انتخاب کنید (اگر چنین گزینه ای وجود نداشت گزینه ...Add-Ins را انتخاب کرده و در پنجره ای که باز می‌شود Analysis Toolpak را علامت بزنید سپس دکمه OK را فشار دهید. احتمالا از شما خواسته می‌شود سی دی Office را درون درایو قرار دهید). حال در پنجره Data Analysis گزینه Descriptive Statistic را انتخاب کنید.



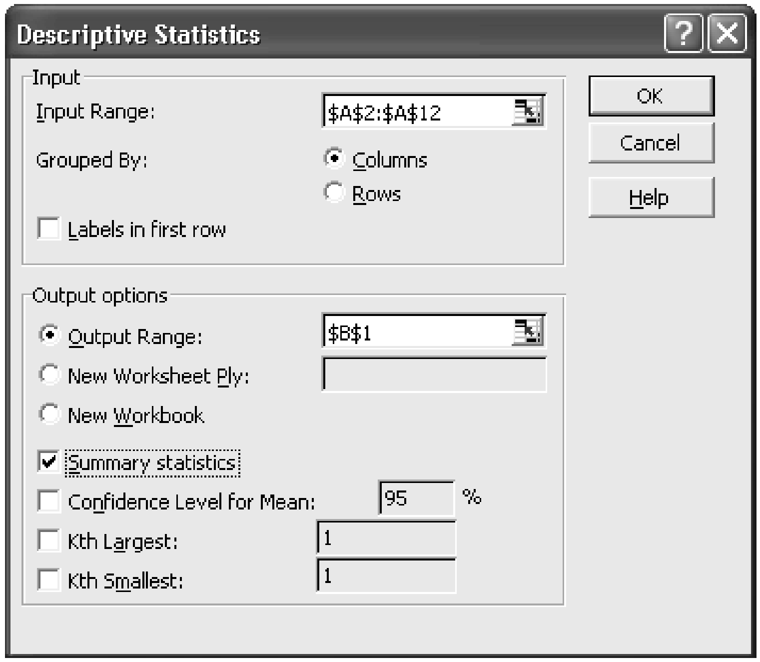
در قسمت Input Range آیکون  را انتخاب کنید. اشاره گر ماوس را روی A2 آورده و دکمه سمت چپ را نگه داشته سپس اشاره گر را به A12 برده و دکمه ماوس را رها کنید. دوباره آیکون را انتخاب کنید تا به پنجره اولیه برگردید. حال در قسمت Output options گزینه :Output Range را علامت زده سپس آیکون مربوطه را انتخاب کنید سپس B1 را انتخاب کرده و دوباره آیکون را انتخاب کنید(B1 محل شروع اطلاعات است). حال Summary statistics را علامت زده سپس OK را فشار دهید. اکنون می‌توانید اطلاعات را ببینید.

می‌توانید ستون B را برای دیدن اطلاعات بزرگ کنید به خط بین B و C که در شکل مشخص شده است بروید

ماوس به این شکل  در می‌آید حال دکمه سمت راست را نگه داشته و اندازه این ستون را تغییر دهید.

Mean : میانگین ، Standard Error : خطای استاندارد σ_m ، Standard Deviation : انحراف استاندارد σ

Minimum: کمترین مقدار موجود ، Maximum: بیشترین مقدار موجود، Sum: مجموع ، Count: تعداد ارقام



۹-۲ *رسم نمودار*

می‌خواهیم نمودار ٤ بخش ۷-۱ را رسم کنیم.

طول آونگ را در ستون A (A21-A28) و زمان یک تناوب را در ستون B (B21-B28) مقابل طول متناظر نوشته سپس علامت  در بالای صفحه یا گزینه Chart از منوی Insert را انتخاب کنید. در قسمت Standard types گزینه XY(Scatter) را انتخاب کرده و دکمه Next> را فشار دهید. سپس در قسمت Data range آیکون مربوطه را انتخاب کنید. حال ماوس را روی A21 آورده، دکمه سمت چپ را نگه داشته و ماوس را تا B28 حرکت دهید و دکمه ماوس را رها کنید. با انتخاب آیکون به حالت اول برگشته و دکمه Next> را فشار دهید.

در قسمت Titles می‌توانید عنوان نمودار و نوشته های هر محور را مشخص کنید.

انتخابهای زیر را انجام می‌دهیم:

Chart title : " نمودار٤: زمان تناوب آونگ بر حسب طول آن "

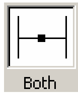
Value (X) axis : "l طول آونگ (cm) "

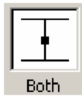
Value (Y) axis : "t زمان یک تناوب (s)"

حال دکمه Next> و سپس دکمه Finish را فشار دهید. نمودار کشیده می‌شود. شما هر تغییری که لازم دیدید می‌توانید روی نمودار انجام دهید مثلا هر قسمت را که نخواستید آن را انتخاب کرده و دکمه Delete را فشار دهید.

قرار دادن خطوط خطا روی نقاط نمودار

ماوس را روی یکی از نقاط روی نمودار برده و دکمه سمت راست ماوس را فشار دهید. در منویی که باز می‌شود گزینه

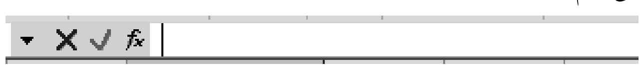
Format Data Series… را انتخاب کنید. حال به قسمت X Error Bars رفته و  را انتخاب کرده و مقدار خطا را در قسمت Fixed Value بنویسید که برابر ۱ cm می‌باشد و خودFixed Value را علامت بزنید.

همین کار را با Y Error Bars انجام داده که خطای آن برابر ۰/۰۵s می‌باشد و این دفعه  را انتخاب می‌کنیم.

رسم منحنی های عبوری مختلف از نقاط نمودار

روی یکی از نقاط نمودار رفته و دکمه سمت راست را فشار دهید سپس گزینه Add Trendline… را انتخاب کنید. در قسمت Type ، Linear را انتخاب کنید یعنی می‌خواهید یک خط از میان نقاط عبور دهید. حال به قسمت Options رفته و Display equation on chart و Display R-squared value on chart را علامت بزنید سپس دکمه OK را فشار دهید. خط عبوری و معادله آن و مقدار R^2 که معیاری برای میزان تطبیق کمیات با نمودار می‌باشد را مشاهده می‌کنید. می‌توانید منحنی های دیگری مثل منحنی توانی (Power) هم عبور دهید فقط کافیست در قسمت Type آن را مشخص کنید.

اگر می‌خواهید خطای a وb در خط عبوری پیدا کنید($y = ax + b$) ماوس را به D22 برده و دکمه سمت چپ را نگه داشته تا E23 می‌کشیم حال در قسمت بالای صفحه که در شکل زیر مشخص شده است را انتخاب می‌کنیم.

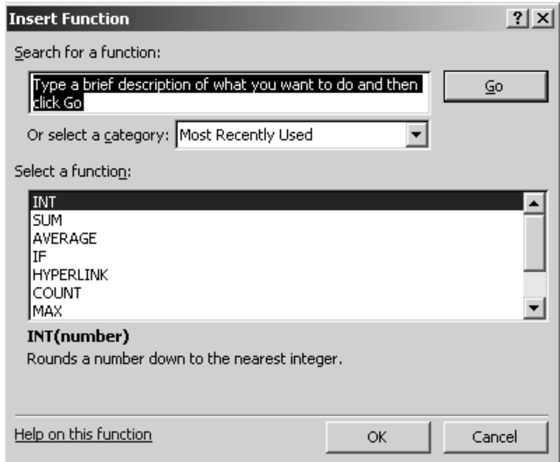


در قسمت Select a function تابع LINEST را انتخاب کرده و OK را فشار دهید. در Known_y's خانه B21 تا B28 را انتخاب کرده (به همان طریقی که قبلا آشنا شده اید) و در Known_x's خانه A21 تا A28 را انتخاب می‌کنید. قسمت Const و Stats را برابر true قرار دهید. حال کلیدهای ctrl+shift+enter را با هم فشار دهید. ستون اول مقدار و خطای a و ستون دوم مقدار و خطای b می‌باشد.

نکته: اگر Const را برابر false قرار دهید بیان کرده‌اید که خط از مبدا عبور می‌کند.

محورهای لگاریتمی

روی یکی از محورها که می خواهید لگاریتمی بشود بروید و دکمه سمت راست ماوس را فشار دهید. حال گزینه Format Axis… را انتخاب کنید. در قسمت Scale گزینه Logarithmic scale را علامت زده و OK را فشار دهید.



۳-۹ بعضی کارهای محاسباتی

در آزمایش آونگ طبق تئوری می‌دانیم $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{l}{t^2}$. می‌خواهیم بـه ازای هـر طـول و زمـان g مربوطه را حساب کنیم. ماوس را به خانه C21 برده و بنویسید =4*PI()^2*A21/B21^2 و دکمه enter را فشار دهید. مقدار g در سطر ۲۱ محاسبه می‌شود. حالا ماوس را روی C21 برده و دکمه سـمت راسـت مـاوس را فشار داده و گزینه Copy را انتخاب کنید. حال ماوس را روی C22 برده و دکمه سمت چپ ماوس را نگه داشـته تا C28

کشیده و سپس رها کنید. روی قسمت انتخاب شده دکمه سمت راست را فشار داده و گزینه Paste را انتخاب کنید . همه g ها محاسبه می شوند طبق واحد $\frac{cm^2}{s}$.

در انتها توصیه می‌شود برای استفاده های بیشتر و کاملتر به کتابهایی که در زمینه Excel نوشـته شـده انـد مراجعـه کنید.

مراجع

۱- فیزیک عملی، ج.ل. اسکوایرز، ترجمه محمد علی شاهزمانیان و محمد حسن فیض، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۷۰

۲- خطاهای مشاهده و محاسبه آن، تاپینگ ج. ، ترجمه محسن تدین، مرکز نشر دانشگاهی ۱۳٦٤

۳- شیمی عمومی جلد اول، چارلز مورتیمر، ترجمه علی پورجوادی،... مرکز نشر دانشگاهی، چاپ پنجم ۱۳۷۸