آزمایش شماره ۷
آونگ کاتر

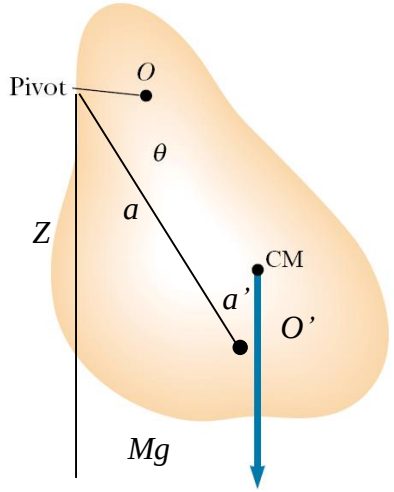
اگر چه شتاب ثقل زمین را می‌توان با استفاده از یک آونگ ساده و اندازه‌گیری دورهٔ تناوب آن بدست آورد، لکن در عمل به ویژه در زمین‌شناسی برای تعیین دقیق آن از نوعی آونگ مرکب به نام آونگ کاتر استفاده می‌کنند.
هدف آزمایش: اندازه‌گیری شتاب ثقل زمین به کمک آونگ کاتر.

نظریه

آونگ مرکب، هر جسمی که بتواند حول یک محور ثابت افقی تحت اثر نیروی جاذبه زمین نوسان کند آونگ مرکب نامیده می شود (شکل ۱). دورهٔ تناوب نو سانات یک آونگ مرکب حول محوری مانند OZ به فا صله a از مرکز جرم آن، CM، برابراست با:

$$T_{\circ} = ۲\pi \sqrt{\frac{I_{\circ}}{Mga}}$$

در این رابطه T دورهٔ تناوب نوسانات آونگ حول محور OZ، M جرم آونگ و I لختی دورانی آن نسبت به محور OZ است. می‌توان نشان داد که در صفحهٔ شامل OZ و CM، محور دیگری مانند $O'Z'$ به موازات OZ و در امتداد OG، به فاصله a' از G وجود دارد به طوری که دورهٔ تناوب نوسانات آونگ حول آن نیز برابر T است. در این حالت فاصله دو محور یعنی $L=a+a'$ برابر طول آونگ ساده‌ایست که زمان تناوب آن نیز همان T می‌باشد. یکی از دو محور OZ و $O'Z'$ را در هر حالت محور تعلیق و دیگری را محور نوسان گویند. برابر بودن نوسان آونگ مرکب با آونگ ساده‌ای به طول $L=a+a'$ را می‌توان از روابط زیر نتیجه گرفت.



شکل ۱- محور تعلیق و محور نوسان یک آونگ مرکب

$$T_{o} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{o}}{Mg\,a}} \qquad (۱)$$

$$T_{o'} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{o'}}{Mga'}} \qquad (۲)$$

حال چنانچه $T=T'$ باشد، خواهیم داشت،

$$\frac{I_{o}}{a} = \frac{I_{o'}}{a'} \quad \rightarrow I_{o'} = \frac{a'\,I_{o}}{a} \qquad (۳)$$

از طرفی چنانچه لختی دورانی جسم حول مرکز ثقل آن I_G باشد لختی دورانی آن حول محور OZ و $O'Z'$ که به ترتیب به فواصل a و a' از مرکز ثقل جسم قرار گرفته‌اند، طبق قضیه محورهای موازی چنین خواهد بود،

$$I_{o} = I_G + Ma^{2}$$

$$I_{o'} = I_G + Ma'^{2}$$

از تفاضل دو رابطه فوق چنین خواهیم داشت،

$$I_{o} - I_{o'} = M(a^{2} - a'^{2})$$

این رابطه، با جایگزینی $I_{0'}$ از معادله (۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود،

$$I_{o} - \frac{a'I_{o}}{a} = M(a^{2} - a'^{2}) \rightarrow \frac{I_{o}(a-a')}{a} = M(a+a')(a-a')$$

$$I_{o} = Ma(a-a') \qquad (۴)$$

با قرار دادن مقدار I_o از رابطهٔ (۴) در رابطهٔ (۱)، مقدار دورهٔ تناوب چنین بدست می‌آید:

$$T_{o} = T_{o'} = 2\pi\sqrt{\frac{a+a'}{g}} \qquad (۵)$$

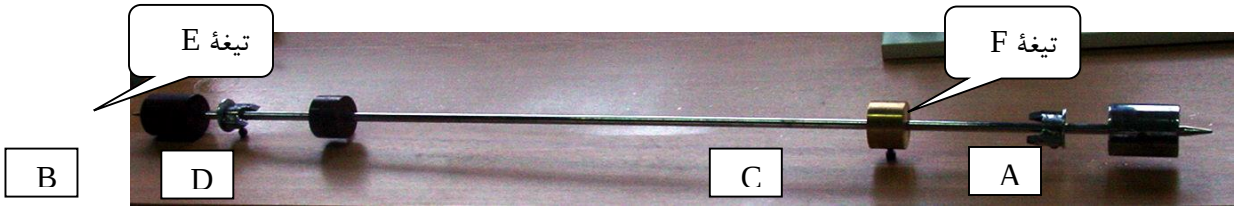
چنانچه $L=a+a'$ را طول آونگ ساده همزمان با آونگ مرکب بنامیم خواهیم داشت:

$$T_{o} = T_{o'} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (۶)$$

بدین ترتیب می‌توان در یک آزمایش ابتدا طول L را تعیین کرده سپس با اندازه‌گیری دورهٔ تناوب حول نقطهٔ تعلیق یا نوسان، مقدار g را بدست آوریم. این روش یعنی استفاده از طول آونگ ساده که همزمان با اندازه‌گرفتن فاصله محور تعلیق و محور نوسان آونگ مرکب بدست می‌آید، نخستین بار در سال ۱۸۱۸ بوسیله کاتر بکار رفت و یکی از دقیق‌ترین روش‌هایی است که برای اندازه‌گیری g بکار می‌رود در این آزمایش به جای تغییر فاصلهٔ L با جابجایی مکان محور نوسان (O')، مرکز جرم را در طول OO' در حالی که L ثابت است، جابجا می‌کنیم تا شرط (۴) برقرار گردد.

آونگ کاتر به ا شکال مختلف ساخته می شود. آونگ موجود در آزمایشگاه مطابق شکل ۲، از یک میله تشکیل شده است که دو وزنه A و B و دو تیغه E و F در دو انتهای آن ثابت شده‌اند. فقط دو مهره C و D روی آن حرکت می‌کنند. جنس وزنه‌های A و C از برنج و وزنه‌های B و D از جنس فیبر استخوانی است. بدین ترتیب اگر چه آونگ از نظر ظاهری تقارن دارد. لکن از نظر جرمی تقارن ندارد. تقارن ظاهری آونگ در هنگام آزمایش بسیار

مهم می‌باشد. این تقارن ظاهری برای آن است که هنگام نوسان حول هر یک از دو انتها (لبه تیغه‌های E و F) اثر مقاومت هوا بر آن یکسان باشد. لبه تیغه‌های E و F در هنگام نوسان روی یک پایه قرار می‌گیرند. باید دقت نمود که اولاً تیغه‌ها به صورت کاملاً افقی روی پایه قرار گیرد و تمام قسمت‌های آن به سطح پایه تکیه داشته باشد، ثانیاً برای حفظ تقارن ظاهری دستگاه مهره‌های C و D را باید همیشه به فواصل متساوی از دو انتهای میله قرار دارد. این آونگ با آنکه کاملاً متقارن به نظر می‌رسد لکن بعلت یکسان نبودن وزن مخصوص وزنه‌ها مرکز ثقل آن در وسط قرار ندارد و به وزنه A نزدیکتر است.



شکل ۲- شمای کلی آونگ کاتر مورد آزمایش

اینک چنانچه بتوانیم مهره‌های C و D را بطور متقارن در محلی قرار دهیم که دورهٔ تناوب نوسانات حول تیغه‌های E و F با هم برابر شوند - یعنی شرط (۴) ارضاء شود- توانسته‌ایم آونگ را به یک آونگ دو طرفه تبدیل کنیم.

مراحل انجام آزمایش

ابزار مورد نیاز: ۱- آونگ کارتر ۲- زمان‌سنج ۳- متر یا خط‌کش.

برای آشنایی اولیه با روش انجام آزمایش به سایت آزمایشگاه مراجعه نموده و مراحل انجام آزمایش را در گزارش تصویری مشاهده نمایید. http://physics.sharif.edu/genphyslabs1/002.htm

ابتدا فاصله هر یک از مهره‌های C و D را از تیغه مجاور خود (X) برابر ۱۰ سانتی‌متر قرار داده و پیچ آنها را روی میله محکم کنید. فقط مهره‌های C و D متحرک هستند و نباید مهره‌های A و B و همین‌طور تیغه‌ها جابه‌جا شوند. تکیه‌گاه را با استفاده از پیچ روی پایه طوری تنظیم کنید که تیغه‌های آونگ روی تکیه‌گاه قرار گرفته و در حین نوسان نلغزد. سپس آونگ را یک بار حول تیغه E و بار دیگر حول تیغه F با دامنه کم به نوسان درآورید. بعد از انجام چند نوسان و اطمینان از عدم لغزش تیغه آونگ روی تکیه گاه، مدت ۱۰۰ نوسان را اندازه گرفته و در جدول ۱ یادداشت کنید. سپس فاصله مهره‌های C و D را از تیغه‌ها به ترتیب ۲۰، ۳۰، ۴۰ سانتی‌متر قرار داده و هر بار مدت زمان ۱۰۰ نوسان را در جدول ۱ ثبت کنید.

با محاسبهٔ دورهٔتناوب هر مرحله جدول ۱ را کامل کنید. سپس بر روی کاغذ میلی‌متری با انتخاب مقیاس مناسب برای محور افقی که معرف تغییر مکان مهره‌ها روی آونگ باشد، و انتخاب مقیاس مناسب برای زمان روی محور عمودی، منحنی‌های تغییرات T و T' را بر حسب X رسم کنید. برای این‌کار هیچ لزومی ندارد که مبدإ زمانی از

صفر شروع شود. این دو منحنی یکدیگر را در نقطه‌ای که آنرا N می‌نامیم، قطع می‌کنند.، فا صلهٔ مهره‌ها از دو تیغه آونگ (X_N) را از روی برگهٔ رسم بخوانید.

پس از اینکه X_N را بدست آوردید، مهره‌های C و D را در فاصلهٔ X_N از لبهٔ تیغه‌ها قرار دهید. دقت کنید که فاصلهٔ دو تیغهٔ E و F همان فاصلهٔ بین دو تکیه‌گاه O و O' می‌باشد. حال نوسانات آونگ کاتر را برای ۱۰۰ نوسان حول هر دو محور (تیغه) بدست آورید. اینک دورهٔ تناوب متوسط این دو حالت (T_m) را حساب کنید. با خط‌کش فاصله دو تیغه را با دقت میلی‌متر اندازه بگیرید و جدول ۲ را کامل کنید.

خواسته‌ها

۱. مقدار T مربوط به فاصلهٔ X_N در نقطهٔ تلاقی منحنی‌های رسم شده چقدر است. آنرا با T_m مقایسه کنید.

۲. تحلیل داده‌های جدول ۲، مقدار g، شتاب ثقل زمین را محاسبه کنید. با توجه به اینکه مقدار g در تهران ۹۷۸ $cm/(Sec)^2$ است، درصد خطای نسبی (تفاوت نسبی) اندازه‌گیری را پیدا کنید.

سؤالات

با استفاده از رابطه دورهٔ تناوب و دقت اندازه‌گیری‌های طول و زمان، درصد خطای نسبی در اندازه‌گیری شتاب ثقل زمین را محاسبه کنید. درصد خطای نسبی محاسبه شده در خواستهٔ ۲ با این مقدار چه رابطه‌ای دارد؟ (راهنمائی: به برآورد خطای کمیت‌های مرکب رجوع کنید.)

جدول‌های آزمایش شماره ۷
آونگ کاتر

جدول ۱- ایجاد شرط آونگ دوطرفه

X، فاصلهٔ دو مهره از تیغه‌ها (cm)	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
زمان ۱۰۰ نوسان حول E (s)				
دورهٔ تناوب نوسانات حول E (s)				
زمان ۱۰۰ نوسان حول F (s)				
دورهٔ تناوب نوسانات حول F (s)				

	X_N (cm)

جدول ۲- آونگ دوطرفه

l فاصلهٔ دو تیغهٔ E و F (cm)	
زمان ۱۰۰ نوسان حول تیغهٔ E (s)	
زمان ۱۰۰ نوسان حول تیغهٔ F (s)	
دورهٔ تناوب میانگین T_m (s)	