تمرین های فصل ۴ نسبیت عام ۱ : معادلات انیشتین

۱) با استفاده از مختصات بهنجار ریمان نشان دهید عنصر حجم چهار بعدی در فضازمان برابر است با $dV = \sqrt{-g}d^4x$، که در آن g دترمینان متریک است.

۲) فضازمان فریدمان در مختصات روبرتسون-واکر را در نظر بگیرید و در آن نقطه ای انتخاب کنید. مختصات ریمان را در آن نقطه تعیین کنید.

۳) فضازمانی با متریک زیر در نظر بگیرید:

$$ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1+2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

این متریک را در مختصات لخت موضعی در یک نقطهٔ دلخواه بنویسید. از مرتبهٔ ϕ^2 صرف نظر کنید!

۴) نشان دهید

$$\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = g \cdot g^{\rho\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}$$

۵) رابطه های زیر را اثبات کنید:

$$v^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} v^\mu\right) ;$$ چهار بردار v^μ

$$A^\mu_{;\mu} =: \Box A = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A\right) ;$$ نرده ای A

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{-g} F^{\mu\nu}\right)$$

۶) معادلهٔ انحراف ژئودزیک شتاب را تعیین می کند. پس با مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ نیوتون باید بتوان میان مؤلفه- های تانسور انحناء و نیروی گرانش نیوتون رابطه برقرار کرد. از این ارتباط استفاده کنید و نشان دهید رابطهٔ $\kappa = 4\pi G$ میان ثابت گرانش نیوتون و ثابت جفت شدگی در معادلهٔ اینشتین برقرار است. (می توان به کتاب MTW ، ص۳۰، در این مورد مراجعه کنید!)

۷) هرگاه L لاگرانژی یک میدان باشد، تانسور انرژی تکانه متناظر با آن می شود:

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} L - q^A_{,\mu} \frac{\partial L}{\partial q^A_{,\nu}}$$

که در آن q^A میدان است.

الف) لاگرانژی میدان ماکسول را بگیرید

$$L = F^2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

تانسور انرژی-تکانه این میدان را حساب کنید. آیا جواب متقارن است؟ بحث کنید!

ب) معادلات ماکسول را در مختصاتی خمیده خط در نظر بگیرید. از روش وردش نسبت به متریک استفاده کنید و نشان دهید همان تانسور انرژی- تکانهٔ متعارف به دست می آید.

۸) نشان دهید رابطهٔ میان دو تانسور اینشتین برای هر دو متریک همدیس $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ به این صورت است:

$$\bar{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - 2\Omega^{-1}\nabla_\mu\nabla_\nu\Omega + 2\Omega^{-1} g_{\mu\nu}\nabla^2\Omega + 4\Omega^{-2}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\Omega - \Omega^2 g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\Omega\nabla_\sigma\Omega$$

مشتق هموردای ∇ برحسب متریک $g_{\mu\nu}$ حساب می شود!

۹) نشان دهید

$$\delta g^{\mu\nu} = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}$$

که در آن بردار ξ^{μ} تبدیل $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ را تعریف می کند. وردش مؤلفه های هموردا چه می شود: $\delta g_{\mu\nu}$ ؟

۸. *معادله های بی رد اینشتین (رک arXiv:1008.1196)*. تانسورهای بی رد اینشتین و انرژی تکانه را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\hat{G}_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \,, \hat{T}_{\mu\nu} := T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T \;\Rightarrow \hat{G}^{\mu}_{\mu} = 0 \,, \hat{T}^{\mu}_{\mu} = 0$$

عده ای با استفاده از این تانسور ها، معادلهٔ گرانش (unimodular) را این گونه تعریف می کنند

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \hat{T}_{\mu\nu}$$

الف) در مورد واگرایی تانسور های $\hat{G}_{\mu\nu}$ و $\hat{T}_{\mu\nu}$ چه می توانید بگویید؟

ب) نشان دهید که ویژگی شارهٔ کامل در این معادلات میدان با چگالی $\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)$ به جای چگالی ماده ρ وارد می شود! توجه کنید که این چگالی برای خلأ صفر می شود. پس ظاهراً ثابت کیهانشناسی در این معادلات وارد نمی شود.

ج) نشان دهید که این معادلهٔ میدان یک شرط انتگرال پذیری دارد که به یک ثابت منجر می شود؛ این ثابت را می توان ثابت کیهانشناسی مؤثر، $\hat{\Lambda}$ نامید. این نتیجه را بحث کنید.