

## تمرینهای فصل ۵ نسبیت عام ۱: متریک با تقارن کروی

۱. با استفاده از تمرین ۲۴ فصل ۳، معادله اینشتین را برای تقارن کروی با فرض  $T_{\mu\nu} = 0$  حل کنید.

۲. نردهای کِرچمن (Kretschmann) تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K} := R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

این نردهای را برای متریک شوارتس شیلد حساب کنید. آیا این نردهای تکنیکی دارد؟ (پاسخ:  $\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2}{r^6}$ )

۳. معادلات اینشتین را با تقارن کروی در  $1+1$  بعد حل کنید. نتیجه را بحث کنید!

۴. متریک شوارتس شیلد در مختصات همسانگرد به این صورت است:

$$ds^2 = \left( \frac{1 - \frac{M}{2\bar{r}}}{1 + \frac{M}{2\bar{r}}} \right)^2 dt^2 - \left( 1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^4 d\bar{x}^2$$

در صفحه  $\theta = \frac{\pi}{2}$  دو دایره به شعاع‌های  $\bar{r} = \frac{M}{2}$  و  $\bar{r} = \bar{R}$  در نظر بگیرید. مساحت میان این دو دایره را حساب کنید و نشان دهید

برابر است با

$$S = \pi(\bar{R} + M)^2 - \frac{9}{4} \pi M^2 + \frac{M^2}{4} \ln \frac{2\bar{R}}{M}$$

با استفاده از رابطه میان این مختصات و مختصات کروی، یعنی

$$r = \left( 1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^2 \bar{r}$$

مساحت بالا را در مختصات شوارتس شیلد (کروی) بنویسید و بگیرید:

$$r = R \gg M$$

$$R = 2m + \epsilon, \quad \epsilon \ll M$$

پاسخ‌ها:

$$S = \pi R^2 + 2\pi M^2 \quad \text{برای} \quad R \gg M$$

$$S = 8\pi M^2 \sqrt{2\epsilon} \quad \text{برای} \quad R = 2m + \epsilon$$

۵. متریک شوارتس شیلد ۴ بردار کیلینگ دارد. برای هر ذره آزاد می‌توان نشان داد به ازای هر بردار کیلینگ  $k^\mu$  یک ثابت حرکت

وجود دارد:

$$k_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{ثابت}$$

بردارهای کیلینگ متریک شوارتزشیلد را می‌شناسیم. مؤلفه‌های آنها را در مختصات شوارتس شیلد بنویسید و ثابت حرکت متناظر با

هر کدام را به دست آورید و پیرامون آن بحث کنید.

۶. داخل یک جسم با تقارن کروی استوانه باریکی در نظر بگیرید که از مرکز به سطح به طور شعاعی ادامه دارد و پر از تابش است. این استوانه در تعادل ترمودینامیکی با بقیه جسم است و نقش یک دماسنج را بازی می کند: دماسنج فوتونی! معادله تعادل هیدروستاتیکی داخل ستاره را بنویسید و معادله حالت تابش را به کار بگیرید تا نشان دهید شرط تعادل ثابت بودن دما نیست، بلکه باید

$$T \sqrt{g_{..}} = \text{ثابت}$$

باشد. بحث کنید!

۷. نشان دهید در مختصات شوارتس شیلد این متریک یک بردار کیلینگ به صورت  $\frac{\partial}{\partial t}$  دارد، که زمانگونه است در ناحیه ای که  $r >$

$2m$ . برای ناحیه  $r < 2m$  تعبیری دارید؟

۸. متریک به شکل کلی زیر را در نظر بگیرید

$$ds^2 = \phi dt^2 - \phi^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

که در آن  $\phi$  تابع  $r$  است.

الف) نشان دهید مؤلفه های تانسور اینشتین می شوند

$$G_0^0 = -G_1^1 = \frac{(\phi' - 1)}{r^2}, \quad G_2^2 = G_3^3 = \frac{\psi''}{2r}$$

بقیه مؤلفه ها صفرند. در اینجا  $\psi(r) = r \cdot \phi(r)$ !

ب) اگر این متریک جواب معادله اینشتین باشد، نشان دهید شرط زیر باید برای تانسور انرژی  $(\rho, p_1, p_2, p_3)$  قطر  $T_{\mu\nu}$  برقرار

باشد:

$$\rho + p = 0, \quad p_2 = p_3, \quad p_1' = \frac{2}{r}(p_2 - p_1)$$

ج) گیریم  $p_2 = \gamma p_1$  باشد، با  $\gamma$  ثابت! نشان دهید

$$\rho = -p = -\frac{p_2}{\gamma} = -\frac{p_3}{\gamma} = q \cdot r^{(\gamma-1)}$$

$$\phi = 1 - \frac{\kappa r}{2\gamma + 1} r^{2\gamma} - \frac{2M}{r}$$

که در آن  $q$  و  $M$  دو ثابت انتگرال گیری اند. حالت های مختلف این جواب را به صورت زیر بررسی کنید:

(۱)  $M = 0, \gamma = 1$ : نشان دهید جواب دوسویه به دست می آید؛  $q$  در اینجا چه نقشی دارد؟

(۲)  $M \neq 0, \gamma = 1, q \neq 0$ : در این حالت جواب شوارتس شیلد-دوسویه به دست می آید.

(۳)  $M \neq 0, \gamma = -1, q = \frac{e^2}{r}$ : در این حالت تانسور انرژی را بنویسید و نشان دهید متریک رایسنر-نورداستروم به دست

می آید، که به صورت زیر است

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa e^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

(۴) نشان دهید تانسور انرژی تکانه متریک رایسنر-نورداستروم از نوع تانسور انرژی میدان الکترومغناطیس است:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

مؤلفه‌های تانسور میدان الکترو مغناطیس را حساب کنید. رفتار شدت میدان الکتریکی را تعیین کنید.

(۵) متریک رایسنر-نوردستروم را می‌توان از متریک شوارتسشیلد با تبدیل

$$M \rightarrow M - \frac{\kappa e^2}{2r}$$

به دست آورد. این تبدیل جرم، یا "بازیهنجارش جرم" را بحث کنید.

(۶) مؤلفه‌های تانسور انحنا را به دست آورید و در مورد تکنیکی‌های متریک بحث کنید.

(۷) به ازای  $M^2 > e^2$  مؤلفه  $g_{rr}$  همواره مثبت است و مختصه  $r$  همواره فضاگونه، مگر در تکنیکی  $r = 0$ . پیرامون این

موضوع بحث کنید که تکنیکی  $r = 0$  "عریان" است و هیچ افقی دور آن را نگرفته است.

۹. نشان دهید برای ذره‌ای که به طور شعاعی در متریک شوارتزشیلد سقوط آزاد می‌کند میان  $r$  و ویژه زمان  $S$  رابطه زیر برقرار است

$$s = \sqrt{\frac{rR(R-r)}{2m}} + \sqrt{\frac{R^3}{2m}} \arccos\left(\frac{2r}{R} - 1\right)$$

که در آن  $R$  ماکزیموم  $r$  است به ازای  $s = 0$ !

۱۰. ثابت کیهانی را مخالف صفر بگیرید:  $\Lambda \neq 0$ . با استفاده از تانسور اینشتین برای متریک شوارتزشیلد نشان دهید متریک زیر جواب

معادله‌های اینشتین است:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

به ازای  $m = 0$  جواب دوسویه به دست می‌آید. از طریق تانسور انرژی این جواب را توجیه کنید!