۱.۰ تمرین‌های فصل ۱

۱. لاگرانژی ذره‌ی آزاد را به صورت زیر بگیرید

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}}$$

الف) معادله‌ی حرکت ذره را به دست آورید.
ب) متریک $g_{\mu\nu}$ چه نقشی در این حرکت دارد؟ اگر به جای این لاگرانژی عبارت

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}$$

را بگیریم در معادلهٔ حرکت چه تفاوتی پیش می‌آید؟
ج) این دو معادله هم‌ارزند؟ چرا؟
د) چرا این دو لاگرانژی به دو نتیجه متفاوت می‌رسند؟
ه) اگر ذره فوتون باشد می توانیم همین روابط را به کار بگیریم؟

۲. فضازمان ریندلر با متریک زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2 = -x^2dt^2 + dx^2 \tag{1}$$

که در گستره‌ی مختصات $0 < x < \infty$ و $-\infty < t < \infty$ تعریف شده است.
الف) تبدیل مختصات زیر را اعمال کنید

$$u = t - ln(x) \tag{2}$$
$$v = t + ln(x) \tag{3}$$

متریک نتیجه را حساب کنید. آیا می‌توان تعریف گستره‌ی مختصات جدید را تعمیم داد؟
ب) حالا با تبدیل جدید

$$U = -e^{-u} \tag{4}$$
$$V = e^{v} \tag{5}$$

متریک جدید را به‌دست آورید و باز هم در مورد گستره‌ی اعتبار مختصات صحبت کنید.
ج) حالا متریک جدید با تبدیل

$$T = \frac{1}{2}(V+U) \tag{6}$$
$$X = \frac{1}{2}(U-V) \tag{7}$$

به‌صورت مینکوفسکی در می آید. در مورد گستره‌ی این مختصات جدید هم بحث کنید.
د) در این فضای مختصات جدید، خم‌های $t = constant$ و $x = constant$ را رسم کنید. در مورد ویژگی‌های آن‌ها بحث کنید. چه ارتباطی میان فضای اولیه و این فضای مینکوفسکی وجود دارد؟