

فصل ۵: توزیع کروی ماده و متریک شوارتس شیلد

رضا منصوری

۲۱ فروردین ۱۳۹۲

فهرست مطالب

۲	 ۰.۵ درآمد
۲	 ۱.۵ تقارن کروی
۳	 ۲.۵ متریک با تقارن کروی
۵	 ۳.۵ متریک شوارتس شیلد در مختصات دیگر
۵	 ۱.۳.۵ مختصات همسانگرد
۵	 ۲.۳.۵ مختصات ادینگتون-فینکلشتاین
۸	 ۳.۳.۵ مختصات پینلو-گولستراند
۸	 ۴.۵ متریک شوارتس شیلد با جمله کیهان‌شناختی
۱۰	 ۵.۵ پتانسیل مؤثر برای حرکت ذره در میدان شوارتس شیلد

۵.۰ درآمد

در الکترودینامیک ارتباط میان چشمه و میدان را معادلات ماکسول تعیین می‌کنند که خطی‌اند. با شناخت چشمه می‌توان این معادلات را حل کرد و میدان متناظر با چشمه مفروض را به دست آورد. مشابه این روش در نسبیت عام مقدور نیست؛ چون معادلات حاکم بر گرانش در نسبیت عام ناخطی‌اند و شناخت تانسور انرژی-تکانه کمک چندانی به حل معادلات نمی‌کند. یکی از راه‌های مرسوم حل این معادلات استفاده از تقارن برای کاهش تعداد مؤلفه‌های مجهول متریک و در نتیجه ساده کردن معادلات است. یکی از اولین جواب‌هایی که برای نسبیت عام به دست آمد، جواب با تقارن کروی برای هنگامی است که تانسور انرژی حضور ندارد؛ یعنی حل معادلات خلأ با تقارن کروی. انگیزه این فرض شناخت میدان گرانش در خارج از یک ستاره کروی است. اگر خارج ستاره ماده وجود نداشته باشد و بتوانیم فرض کنیم خارج از ستاره خلأ داریم، در این صورت باید معادلات خلأ را حل کرد. می‌توان از تقارن کروی ستاره استنباط کرد که میدان خارج آن هم باید تقارن کروی داشته باشد. به علاوه اگر به حد کافی از ستاره دور بشویم شدت میدان به سمت صفر باید برود. یعنی انتظار داریم متریک جواب در بینهایت برابر متریک فضای مینکوفسکی بشود. این دو شرط، تقارن کروی و تخت بودن در بینهایت، دو شرط اساسی برای به دست آوردن میدان گرانش اطراف یک توزیع جرم با تقارن کروی است.

۱.۵ تقارن کروی

تعریف شهودی این است که همان تقارن‌های کره (دوبعدی) را داشته باشیم. به زبان ایزومتري‌ها یعنی بردارهای کیلینگ با همان جبر سه بردار کیلینگ کره، به شرح زیر:

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3 \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1 \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2$$

$$[\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ijk} \xi_k$$

این رابطه‌های جابه‌جایی همان رابطه‌های گروه دوران در سه بعد هستند، یعنی $SO(3)$. قضیه فروبینیوس می‌گوید: در صورتی که میدان‌های برداری جابه‌جاپذیر باشند، یا جابه‌جاگر آنها بسته باشد، آنگاه خم انتگرالی این میدان‌های برداری، زیرخمینه‌ای تعریف می‌کند که این بردارها روی آن تعریف شده‌اند. توجه کنید هنگامی که از ایزومتري صحبت کردم، صحبت از حرکت کردم، این حرکت به معنی یک لایه‌بندی برای خمینه است متناظر با گروه تقارن بردارهای کیلینگ. به هنگام تقارن کروی، این لایه‌بندی همان کره‌های هم‌مرکزی است از مرکز دلخواه که مرکز مختصات تلقی می‌شود. این کره‌ها، یا زیرخمینه‌های متناظر با تقارن کروی، که لایه‌های فضا زمان ما تلقی می‌شوند، اجازه می‌دهند مختصات متناظر با تقارن برای متریک انتخاب شود. با این تعریف، با استفاده از زیرخمینه‌هایی که لایه‌بندی متناظر با این تقارن است، مختصات کروی تعریف می‌شود. خواهیم دید جواب معادلات نسبیت عام متناظر با این تقارن، به شرط اینکه ماده در آن وجود نداشته باشد، یعنی تانسور انرژی-تکانه صفر باشد، ایستا است؛ یعنی تقارن دیگری هم باید داشته باشد. جالب است که تا کنون نتوانسته‌ایم بدون استفاده از مختصات اثبات کنیم که اگر سه بردار کیلینگ به شرح بالا برای فضا زمان فرض شود، آنگاه بردار $\frac{\partial}{\partial t}$ نیز یک بردار کیلینگ باید باشد! این ویژگی معلوم نیست در هر نظریه گرانشی دیگری وجود داشته باشد. فرض نبود ماده در فضا زمان در این مورد فرضی معقول است. علت این است که می‌خواهیم هندسه فضا، یا میدان گرانشی را در بیرون از یک ساختار مادی، ستاره یا کهکشان، با تقارن کروی به دست آوریم. بنابراین جوابی که به دست می‌آوریم برای بیرون ساختار است که فرض کرده‌ایم در آنجا ماده‌ای نیست! جالب است که این نتیجه مستقل از این است که چشمه میدان گرانشی، یعنی ستاره یا جسم کیهانی، ایستا است یا اینکه منبسط یا منقبض می‌شود. به نکته دیگری هم خوب است توجه کنید؛ وقتی ساختار کیهانی را متقارن کروی فرض می‌کنیم نتیجه می‌گیریم که تانسور انرژی باید متقارن کروی باشد، پس همین‌طور تانسور انیشتین. ولی ما هنگامی که از بردارهای کیلینگ متناظر و نیز از تقارن کروی فضا زمان صحبت می‌کنیم، متریک $g_{\mu\nu}$ را متقارن کروی گرفته‌ایم. اینکه از تقارن کروی $G_{\mu\nu}$ تقارن کروی $g_{\mu\nu}$ به دست آید اصلاً بدیهی نیست، اما ما این فرض را به دلیل سادگی و نیز به این دلیل که بدیل محاسباتی دیگری نداریم می‌پذیریم.

۲.۵ متریک با تقارن کروی

میدان گرانش را با تقارن کروی در نظر می‌گیریم. منظور میدان گرانش فضایی است که ماده وجود ندارد، یعنی $T_{\mu\nu} = 0$ پس معادله میدان می‌شود:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{یا} \quad R_{\mu\nu} = 0 \quad (۱)$$

اولین قدم تعیین مختصات مناسب است. متریک را در حالت کلی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\rho) dx^\mu dx^\nu = g_{..} dt^2 + g_{.i} dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (۲)$$

می‌خواهیم متریک تحت دوران فضایی ناورد باشد. با فرض اینکه مختصات فضایی بر لایه‌های تقارنی منطبق است، به سهولت می‌توان دید که متریک را باید بتوان به صورت زیر نوشت:

$$g_{..} = -f(r, t)$$

$$g_{.i} = +g(r, t) \frac{x^i}{r}$$

$$g_{ij} = +h(r, t) \delta_{ij} + J(r, t) \frac{x^i x^j}{r} \quad (۳)$$

که در آن

$$r^2 = \delta_{ij} x^i x^j = x^i x^i$$

پس متریک (۲) می‌شود.

$$ds^2 = -f dt^2 + 2g dr dt + [h + J] dr^2 + r^2 h d\Omega^2 \quad (۴)$$

که اکنون مختصات کروی در بخش فضایی به کار رفته است:

$$d\Omega^2 := d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2$$

به این ترتیب ده مؤلفه میدان $g_{\mu\nu}$ به چهار تابع f, g, h, J کاهش یافته است. حالا توجه می‌کنیم که تبدیل

$$r = u(\dot{r}, \dot{t})$$

$$t = v(\dot{r}, \dot{t}) \quad (۵)$$

شکل متریک را عوض نمی‌کند، زیرا این تبدیل تقارن کروی را حفظ می‌کند. با استفاده از این تبدیل مختصه فضایی جدید را طوری تعریف می‌کنیم که

$$\dot{r}^2 = r^2 h \quad (۶)$$

پس قسمت زاویه‌ای متریک می‌شود

$$d\sigma^2 = \dot{r}^2 d\Omega^2$$

که همانند فضای تخت است. یعنی سطح کره برابر است با $4\pi \dot{r}^2$ ؛ این مختصه را «شعاع هندسی» می‌نامند. چون ابهامی ایجاد نمی‌شود، مختصه $\dot{r}$ را مجدداً r می‌نامیم و متریک (۴) را به این صورت می‌نویسیم

$$ds^2 = -f(r, t) dt^2 + 2g(r, t) dt dr + [h + J] dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (۷)$$

حال با تبدیل زمان جمله ضربدری را از میان می‌بریم:

$$t = v(r, \dot{t})$$

$$dt = \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial \dot{t}} d\dot{t} \quad (۸)$$

پس بخش زمانی متریک می‌شود

$$ds^2|_{v=\phi=\text{ثابت}} = -f\left(\frac{\partial v}{\partial \dot{t}}\right)^2 d\dot{t}^2 - 2\frac{\partial v}{\partial \dot{t}} \left(f\frac{\partial v}{\partial r} - g\right) dr d\dot{t} \quad (۹)$$

با انتخاب

$$f\frac{\partial v}{\partial r} = g \quad (۱۰)$$

یا

$$v(r, \dot{t}) = \int \frac{g}{f} dr + v(\dot{t}) \quad (۱۱)$$

جمله ضربدری صفر می‌شود. اینجا نیز مختصه جدید زمان، $\dot{t}$ را مجدداً برای سهولت با t نمایش می‌دهیم. پس می‌توان متریک را به صورت نمایی زیر نوشت

$$ds^2 = -e^{2\mu(r,t)} dt^2 + e^{2v(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (۱۲)$$

که اکنون تنها دو تابع $\mu(r, t)$ و $v(r, t)$ به صورت مجهول می‌مانند که برای تعیین آنها باید از معادلات دینامیکی نسبیت عام استفاده کرد. به سهولت دیده می‌شود که این هر دو تابع باید مستقل از زمان باشند و یکی منفی دیگری است، به طوری که نتیجه نهایی می‌شود:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (۱۳)$$

که در آن M یک ثابت است با بعد فیزیکی طول که آن را شعاع شوارتس شیلد می‌نامند:

$$Q = \frac{2MG}{c^2} \quad (۱۴)$$

چند ویژگی مهم این متریک را ذکر می‌کنیم:

الف) متریک ایستا است. مستقل از اینکه جرم مرکزی ایستاده باشد یا نه!

ب) متریک فقط به ثابت M و جرم مرکزی وابسته است. مثلاً جرم ساختار کروی (ستاره یا کهکشان)، مستقل از ساختار درونی آن و مستقل از ساختار تانسور انرژی-تکانه‌ی جرم مرکزی است؛ حتی اگر جرم نوسان داشته باشد، در متریک خارج جسم تأثیری ندارد!

ج) ثابت M برابر جرم شیء مرکزی است. اثبات این گزاره بدیهی نیست، اما در فاصله زیاد از مرکز که میدان ضعیف است، استلال فصل اول نشان داد که این گزاره درست است.

د) متریک در بینهایت به متریک مینکوفسکی تبدیل می‌شود، یعنی در بینهایت مینکوفسکی است.

ه) این متریک دو تکینگی دارد که باید درکش کرد. اول تکینگی در نقطه $2M = r$ یا $Q = r$. خواهیم دید این تکینگی مختصاتی است، یعنی اینکه به علت انتخاب نامناسب مختصات است و با انتخاب مختصات مناسب رفع

می‌شود. دوم تکنیکی در نقطه $r = 0$ ، که تکنیکی فیزیکی است، یعنی مستقل از مختصات وجود دارد و باید آن را درک کرد.

(و) در حد میدان ضعیف، در فواصل دور از مرکز داریم

$$g_{00} = 1 + 2\phi$$

$$g_{11} = 1 - 2\phi$$

که در آن $\phi = \frac{GM}{rc^2}$ متناسب با پتانسیل گرانش نیوتونی است که نسبت به ۱ بسیار کوچک است.

۳.۵ متریک شوارتس شیلد در مختصات دیگر

به کار بردن مختصات دیگر به درک نتایج فیزیکی هر متریک کمک می‌کند. علاوه بر این برای شناخت تکنیکی در مختصات شوارتس شیلد هم راه مناسبی است. در اینجا به چند نمونه اکتفا می‌کنیم.

۱.۳.۵ مختصات همسانگرد

می‌خواهیم مختصاتی انتخاب کنیم که ضریب متریک برای بخش فضایی یکدست باشد؛ به عبارتی دیگر سه جهت مختصاتی فضا همسانگرد باشد.

$$r = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 \bar{r} \quad (15)$$

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{M}{2\bar{r}}}{1 + \frac{M}{2\bar{r}}}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2) \quad (16)$$

شعاع شوارتس شیلد، یعنی $r = 2M$ در مختصات قبلی یا $\bar{r} = \frac{M}{2}$ در مختصات همسانگرد. در اینجا ضریب متریک (dr^2) دیگر تکیه نیست!

متریک همسانگرد شوارتس شیلد این خاصیت را دارد که بخش فضایی آن (مقطع‌های $t = \text{ثابت}$) همدیس تخت است!

۲.۳.۵ مختصات ادینگتون-فینکلشتاین

این مختصات را ادینگتون در سال ۱۹۲۴/۱۳۰۳ و فینکلشتاین در سال ۱۹۵۸/۱۶۳۷ فرمول‌بندی کردند. ایده اصلی این مختصات، استفاده از ژئودزیک‌های نورگونه است؛ به عبارتی دیگر گویی به دستگاه مختصات همراه فوتون‌هایی می‌رویم که به سوی مرکزاند یا به دور از مرکز. همین ایده را می‌توان به ذرات جرم‌دار، یا ناظرهای در حال سقوط آزاد گسترش داد.

برای رسیدن به نتیجه، ابتدا می‌پردازیم به مطالعه ژئودزیک‌های نورگونه‌ی شعاعی در فضا زمان شوارتس شیلد. پس بنا به تعریف باید داشته باشیم

$$ds^2 = 0 \quad \text{و} \quad \vartheta = \phi = \text{ثابت} \quad (17)$$

بنابراین از متریک شوارتس شیلد به دست می‌آید

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \quad (18)$$

انتگرال‌گیری از این معادله می‌دهد

$$t = \pm \left[r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \right] + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (19)$$

که در آن u و v دو ثابت انتگرال گیری متناظر با علامت های $+$ و $-$ است. علامت مثبت منجر می شود به سیگنال های برون-رو و علامت منفی منجر به سیگنال های درون-رو می شود. با تعریف مختصه جدید

$$r^* = r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \quad (20)$$

به دست می آوریم

$$t = \pm r^* + \left(\frac{u}{v} \right) \quad (21)$$

به این ترتیب با این مختصه r^* جدید ژئودزیک های نوری خط های مستقیم می شوند! به طور مثال برای ژئودزیک های درون-رو داریم

$$t = -r^* + v \quad (22)$$

ثابت انتگرال گیری v ژئودزیک های نورگونه ی درون-رو را از هم متمایز می کند. توجه کنیم این معادله در نقطه $r = 2m$ تکینگی ندارد؛ بنابراین مسیر نور درون-رو در بیرون و داخل افق با همین معادله بیان می شود. این نتیجه، راه نشان می دهد که v را مختصه جدید تعریف کنیم:

$$dt = dv - \alpha^{-1} dr \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{r - 2m}{r} \quad (23)$$

با این تبدیل مختصات برای متریک به دست می آوریم

$$ds^2 = \alpha dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2 \quad (24)$$

توجه کنیم که α به ازای $r = 2m$ صفر می شود؛ یعنی خم زمان گونه به فضاگونه تبدیل می شود. اما، به علت وجود جمله ضربدری $dvdr$ ، صفر شدن α در نقطه $r = 2m$ به معنی تکینگی در متریک نیست. به وضوح دیده می شود که معادله ژئودزیک نورگونه شعاعی می شود $v = \text{ثابت}$!

متریک بالا در معادلات انیشتین صدق می کند، جز در نقطه $r = 0$ ، که تکینگی دارد. به علاوه، چون با تبدیل مختصات از متریک شوارتس شیلد به دست آمده است، پس در تمام نقاط به جز $r = 0$ و $r = 2m$ در معادلات انیشتین صدق می کند. اما در نقطه $r = 2m$ ضرایب متریک و مشتقات آن هیچ ناپیوستگی ندارند، از این جهت معادلات انیشتین در نقطه $r = 2m$ نیز صادق است. پس اگرچه تبدیل مختصات در نقطه $r = 2m$ صادق نیست، اما متریک نتیجه در تمام نقاط در معادلات انیشتین صدق می کند.

حال می پردازیم به شناخت بهتر این ژئودزیک ها. می بینیم که سیگنال های نوری به ازای ثابت v در نقطه $r = 2m$ غیرعادی نیستند و بی هیچ مسئله ای از این نقطه می گذرند و پیوستگی خطوط با ثابت v در دو طرف افق حفظ می شود.

برای این سیگنال های درون-رو در خارج افق، یعنی $r > 2m$ ، r کاهنده است و t افزاینده؛ زیرا

$$\frac{dt}{dr} = - \left(1 + \frac{2m}{r - 2m} \right) < 0 \quad \text{به ازای} \quad r > 2m \quad (25)$$

اما به ازای $r < 2m$ داریم

$$\frac{dt}{dr} > 0 \quad (26)$$

یعنی داخل افق، هم r کاهنده است و هم t کاهنده! اما توجه داشته باشیم که داخل افق r مختصه‌ای زمان گونه است. به همین قیاس می‌توانیم ژئودزیک‌های نورگونه‌ی شعاعی برون-رو را برای انتخاب مختصه‌ای جدید انتخاب کنیم. برای این ژئودزیک‌های برون-رو داریم

$$\frac{dt}{dr} = + \left(1 + \frac{2m}{r-2m} \right) \quad (27)$$

و از آنجا

$$t = r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| + u = r^* + u \quad (28)$$

این ژئودزیک‌ها با پارامتر u مشخص می‌شوند. متریک متناظر می‌شود

$$ds^2 = \alpha du^2 + 2dudr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) \quad (29)$$

خطوط ثابت $u = u$ نماینده سیگنال‌های نوری هستند از $r = 0$ به $r = \infty$ ؛ پس حالا «زمان داخلی» r افزایش یافته است. می‌توان هم زمان هم مختصات ادینگتون-فینکلشتاین درون-رو و برون-رو را به کار برد. یعنی در مختصه جدید به جای t و r تعریف می‌کنیم

$$u = t - r^* \quad (30)$$

$$v = t + r^* \quad (31)$$

با این تبدیل مختصات، متریک شوارتس شیلد به این صورت نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dvdu + r^2 d\Omega^2 \\ &= \frac{2me^{-\frac{r}{2m}}}{r} e^{\frac{v-u}{2m}} dvdu + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (32)$$

این نتیجه به ما می‌گوید بهتر است مختصات دیگری انتخاب کنیم

$$U = -e^{\frac{-u}{2m}} \quad (33)$$

$$V = e^{\frac{v}{2m}} \quad (34)$$

تا متریک شوارتس شیلد سرانجام بشود

$$ds^2 = -\frac{22me^{-\frac{r}{2m}}}{r} dUdV + r^2 d\Omega^2 \quad (35)$$

می‌بینیم که این متریک در $r = 2m$ هیچ تکینگی ندارد، در صورتی که تکینگی $r = 0$ همچنان حفظ شده است.

۳.۳.۵ مختصات پینلو- گولستراند

۴.۵ متریک شوارتس شیلد با جمله کیهان شناختی

در به دست آوردن متریک شوارتس شیلد (۱۳)، جمله کیهان شناختی Λ را در معادلات انیشتین برابر صفر گرفتیم. اکنون فرض می‌کنیم $\Lambda \neq 0$. در این صورت، با همان فرض تقارن کروی و صفر بودن تانسور انرژی، معادلات انیشتین می‌شود

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (۳۶)$$

و یا

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (۳۷)$$

اکنون اگر همان متریک شوارتس شیلد (۱۳) را در این معادلات بنشانیم، نتیجه می‌شود (تمرین):

$$e^\mu = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \quad (۳۸)$$

و برای متریک به دست می‌آوریم

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (۳۹)$$

در تقریب نیوتونی برای پتانسیل به دست می‌آید

$$\phi = -\frac{M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2 \quad (۴۰)$$

جمله متناسب با Λ متناظر است با یک نیروی دافعه به اندازه $\frac{1}{3}\Lambda r$. بدیهی است که به ازای $\Lambda = 0$ متریک شوارتس شیلد به دست می‌آید. حد $M \rightarrow 0$ منجر می‌شود به

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (۴۱)$$

که دوسیه آن را در سال ۱۹۱۷/۱۸۹۶ کشف کرد. برای $\Lambda > 0$ یک تکنیکی شبیه به تکنیکی شوارتس شیلد وجود دارد:

$$r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \quad (۴۲)$$

این تکنیکی هم مختصاتی است. این متریک ایستا است، حول یک نقطه تقارن کروی دارد و حول همین نقطه منظم است. به سهولت می‌توان نشان داد که این متریک یک شبه کره است با انحنای $\frac{1}{3}\Lambda$. گیریم

$$\frac{3}{\Lambda} = a^2 > 0 \quad (a > 0) \quad (۴۳)$$

فضای مینکوفسکی ۵-بعدی زیر را در نظر می‌گیریم

$$ds^2 = dT^2 - (dX^2 + dY^2 + dW^2 + dZ^2) \quad (۴۴)$$

فوق سطح

$$X^\gamma + Y^\gamma + Z^\gamma + W^\gamma - T^\gamma = a^\gamma \quad (45)$$

که فضایی است با انحنا ثابت $K = \frac{-1}{a^\gamma}$. متریک القا شده روی این فوق سطح همان متریک دوسیه (41) است. کافی است تبدیل زیر را در معادلات بنشانیم:

$$X = r \sin \vartheta \cos \phi$$

$$Y = r \sin \vartheta \sin \phi$$

$$Z = r \cos \vartheta \quad (46)$$

$$\begin{cases} W = a \left(1 - \frac{r^\gamma}{a^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cosh \frac{t}{a} \\ T = a \left(1 - \frac{r^\gamma}{a^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sinh \frac{t}{a} \end{cases} \quad r < a \quad (47)$$

و یا

$$\begin{cases} W = a \left(\frac{r^\gamma}{a^\gamma} - 1\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sinh \frac{t}{a} \\ T = a \left(\frac{r^\gamma}{a^\gamma} - 1\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cosh \frac{t}{a} \end{cases} \quad r > a \quad (48)$$

در این نگاشت همواره $W + T \geq 0$. یعنی متریک دوسیه روی نیمی از شبه کره S_F^- نگاشته شده است. برای نگاشت کامل باید یک کپی دیگر از متریک برداشت؛ که از طریق انتخاب علامت $-$ در جذرهای بالا انجام می شود. متریک دوسیه به شکل های گوناگون در نوشتارها آمده و بحث شده است. اگر روی شبه کره (45) مختصات $(t, \chi, \vartheta, \phi)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$T = \sqrt{\frac{\gamma}{\Lambda}} \sinh \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} \cdot t \right] + \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} \cdot t} a^\gamma x^\gamma \quad (49)$$

$$W = \sqrt{\frac{\gamma}{\Lambda}} \cosh \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} \cdot t \right] - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} \cdot t} a^\gamma x^\gamma \quad (50)$$

$$x = a \cdot e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} \cdot t} \chi \sin \vartheta \cos \phi \quad (51)$$

$$\mathcal{Y} = a \cdot e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} \cdot t} \chi \sin \vartheta \sin \phi \quad (52)$$

$$\mathcal{Z} = a \cdot e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} \cdot t} \chi \cos \vartheta \quad (53)$$

می توان نشان داد (تمرین) که متریک دوسیه به صورت زیر نوشته می شود

$$ds^\gamma = dt^\gamma - a^\gamma e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{\gamma}} \cdot t} [d\chi^\gamma + \chi^\gamma (d\vartheta^\gamma + \sin \vartheta^\gamma d\phi^\gamma)] \quad (54)$$

که بیانگر مدلی از عالم همگن (بدون ماده) است که به طور نمایی منبسط می شود.

همین متریک، در مختصات دکارتی، معمولاً به صورت زیر نوشته می شود

$$ds^\gamma = dt^\gamma - e^{H \cdot t} [dx^\gamma + dy^\gamma + dz^\gamma] \quad (55)$$

که در آن $H = \sqrt{\frac{\gamma}{\Lambda}}$ ثابت هابل فضای دوسیه است.

مسئله: بردارهای کیلینگ متریک دوسیه را پیدا کنید. این متریک ده تقارن دارد متناظر با سه تبدیل فضایی، سه دوران فضایی، سه خیز لورنتس و یک انتقال در زمان.

۵.۵ پتانسیل مؤثر برای حرکت ذره در میدان شوارتس شیلد

برای محاسبه ژئودزیک‌ها مناسب‌تر این است که از اصل وردش استفاده نماییم

$$\delta \int L^\gamma d\lambda = 0$$

$$L^\gamma = e^\nu \dot{t}^\gamma - e^\lambda \dot{t}^\gamma - e^\mu r^\gamma \dot{\vartheta}^\gamma - e^\mu r^\gamma \sin^\gamma \vartheta \dot{\phi}^\gamma \quad (56)$$

λ و μ پارامتر روی ژئودزیک است!
 t و ϕ متغیرهای چرخه‌ای اند، یعنی در L^γ پیش نمی‌آیند، پس

$$-\frac{\partial L^\gamma}{\partial \dot{\phi}^\gamma} = e^\mu r^\gamma \sin^\gamma \vartheta \dot{\phi}^\gamma = \text{ثابت} =: 2l \quad (57)$$

$$\frac{\partial L^\gamma}{\partial \dot{t}^\gamma} = e^\nu \dot{t}^\gamma = \text{ثابت} =: 2F \quad (58)$$

معادله حرکت ϑ :

$$e^\mu r^\gamma \sin^\gamma \vartheta \cos^\gamma \vartheta \dot{\phi}^\gamma = 2 \frac{d}{d\lambda} (e^\mu r^\gamma \dot{\vartheta}^\gamma) \quad (59)$$

حالا مختصات را طوری فرض می‌کنیم که ژئودزیک مورد نظر این شرایط اولیه را داشته باشد:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\vartheta} = 0 \quad (60)$$

از معادله حرکت نتیجه می‌شود که مسیر در صفحه $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ می‌ماند. پس معادله حرکت ϕ می‌دهد

$$e^\mu r^\gamma \dot{\phi}^\gamma = l$$

معادله حرکت مختصه شعاعی: از این خاصیت استفاده می‌کنیم که $L^\gamma = \text{ثابت}$ ، یک ثابت حرکت است (=صفر برای مسیرهای نورگونه، $=1$ برای مسیرهای زمان‌گونه). در این صورت $s = \lambda$ ویژه زمان. پس معادلات زیر را برای به دست آوردن کامل ژئودزیک‌ها باید حل کنیم:

$$e^\mu r^\gamma \dot{\phi}^\gamma = l \quad (61)$$

$$e^\nu \dot{t}^\gamma = F \quad (62)$$

$$e^\nu \dot{t}^\gamma - e^\lambda \dot{r}^\gamma - e^\mu r^\gamma \dot{\phi}^\gamma = k \quad (k = L^\gamma = 1 یا 0) \quad (63)$$

مورد شوارتس شیلد

$$\begin{cases} e^\nu = 1 - \frac{2M}{r} \\ e^\mu = 1 \end{cases} \quad (64)$$

پس معادلات بالا می‌شوند

$$\begin{cases} r^\gamma \dot{\phi}^\gamma = l \\ \dot{t}^\gamma \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = F \\ \frac{\dot{r}^\gamma}{2} - \frac{Mk}{r} + \frac{l^\gamma}{2r^\gamma} - \frac{Ml^\gamma}{r^\gamma} = \frac{F^\gamma - k}{2} \end{cases} \quad (65)$$

در مورد $k = 1$ معادله آخر به شکل قانون پایستگی انرژی برای پتانسیل زیر است

$$v_{\text{مؤثر}} = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad (66)$$

جرم ذره، برابر یک فرض شده است. انرژی برابر است با

$$E = \frac{F^2 - 1}{2} \quad (67)$$

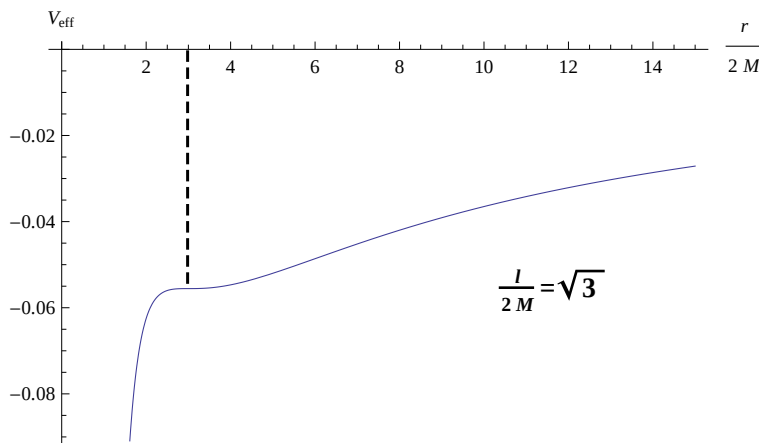
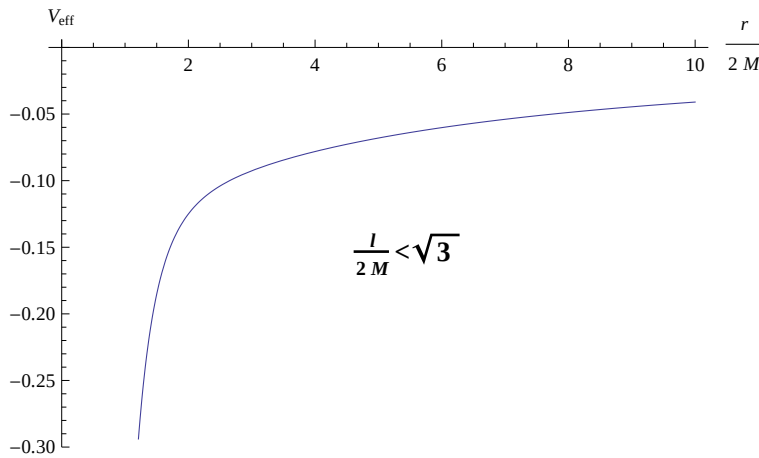
دوجمله اول، همان جمله‌های کلاسیک هستند. جمله سوم از نسبت عام می‌آید: $\frac{-Ml^2}{r^3}$.
قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای ($r^2 \dot{\phi} = l$) همان قانون کلاسیک نیوتونی است. تنها تفاوت در مشتق‌گیری نسبت به زمان ظاهر می‌شود که باید برای آن ویژه زمان منظور کرد.
مسیر نور: $k = 0$ ؛ پتانسیل مؤثر می‌شود

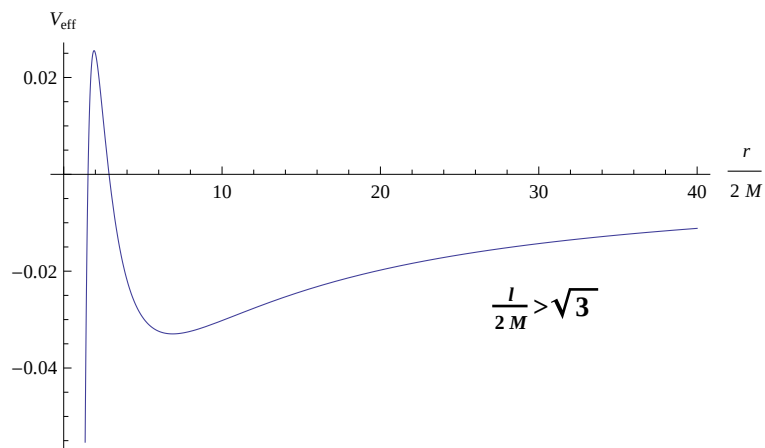
$$v_{\text{مؤثر}} = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad (68)$$

توجه: فوتون‌هایی که مسیرشان شعاعی است ($l = 0$)، پتانسیل مؤثرشان صفر است!

بحث نموداری: نمودار پتانسیل مؤثر بر حسب شعاع (بر حسب $\frac{r}{2M}$):

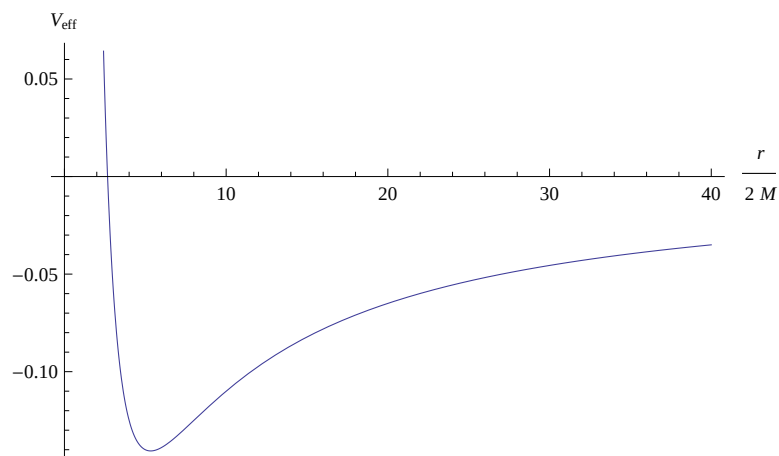
مورد $k = 1$



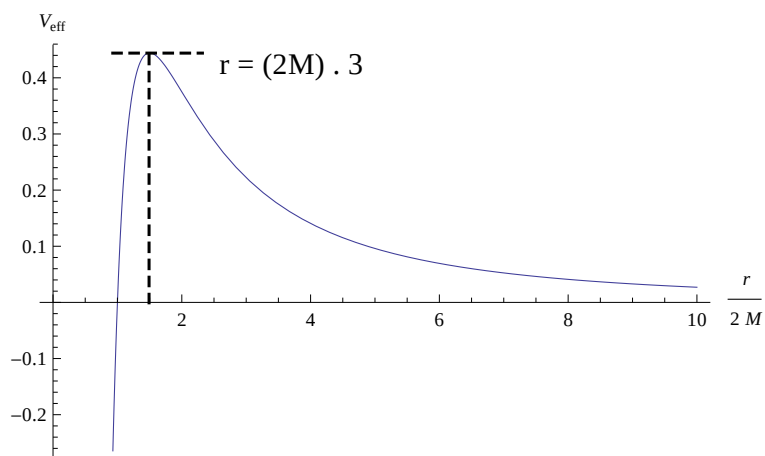


از مانع گشتاور زاویه‌ای می‌توان همواره با افزایش انرژی عبور کرد.

پتانسیل مؤثر نیوتونی: $l \neq 0$



پتانسیل مؤثر برای مسیرهای نورگونه ($k = 0$)



مسیر به ازای $r = 3$ برابر شعاع شوارتس شیلد، دایره‌ای ناپایدار است.

توجه: شعاع $r = 2M$ در هیچ یک از این موارد مانعی را نشان نمی‌دهد. تنها رابطهی زمان و ویژه زمان است که در آن بینهایت وارد می‌شود.