امتحان نسبیت عام I : میان ترم
۱۸ اردیبهشت ماه ۱۳۹۳

کتاب باز

فقط ۲ ساعت

۱. متریک روی سطح کره دو بعدی را بنویسید.

(آ) تانسور اینشتین را برای این متریک دو بعدی به روش کارتان حساب کنید. تفاوت آن با تانسور ریچی را بیان کنید.

(ب) معادلات ژئودزیک روی کره را حساب کنید و نشان دهید خم‌های ϕ=ثابت و $(\theta = \pi/۲)$ ژئودزیک‌اند.

(ج) بردار $V^\mu = (۱, ۰)$ را روی دایره‌ای با عرض θ=ثابت انتقال موازی دهید. مولفه‌های بردار حاصل را بر حسب θ بیان کنید.

۲. نشان دهید اگر ω یک $p-$فرم و η یک $q-$فرم باشد، آنگاه

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-۱)^p \omega \wedge \mathrm{d}\eta \qquad (۱)$$

۳. نشان دهید اگر ξ^ν یک بردار کیلینگ باشد، آنگاه

$$\xi^{\nu;\lambda}{}_{;\lambda} + R^\nu{}_\sigma \xi^\sigma = ۰ \qquad (۲)$$

۴. نشان دهید

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}\mathcal{L}_{\vec{v}} - \mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{L}_{\vec{u}} = \mathcal{L}_{[\vec{u},\vec{v}]} \qquad (۳)$$

۵. تانسور ریمان، ریچی و نرده‌ای ریچی را برای متریک همدیس تخت حساب کنید.

موفق باشید.

نسبیت عام I :پاسخ پرسش‌های امتحان میان ترم

۱. متریک روی سطح کره دو بعدی به شعاع a در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\mathrm{d}s^{۲} = a^{۲}\mathrm{d}\theta^{۲} + a^{۲}\sin^{۲}\theta\mathrm{d}\phi^{۲} \tag{۴}$$

(آ) برای محاسبه تانسور اینشتین به روش کارتان ابتدا با توجه به شکل متریک پایه‌های مناسب (ناهولونوم یا غیر مختصاتی) را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که متریک فضازمان به صورت متریک مینکوفسکی درآید، البته در اینجا که فقط با قسمت فضایی روبرو هستیم، متریک باید اقلیدسی باشد:

$$\mathbf{e}^{(۱)} = a\mathrm{d}\theta \qquad , \qquad \mathbf{e}^{(۲)} = a\sin\theta\mathrm{d}\phi \tag{۵}$$

سپس برای استفاده در معادلات ساختاری کارتان، از این پایه‌ها مشتق خارجی می‌گیریم:

$$\mathrm{d}\mathbf{e}^{(۱)} = ۰ \tag{۶}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}^{(۲)} = a\cos\theta\ \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi = \frac{۱}{a}\cot\theta\ \mathbf{e}^{(۱)} \wedge \mathbf{e}^{(۲)} \tag{۷}$$

حال با توجه به معادله اول ساختاری کارتان (برای پیچش) داریم:

$$\frac{۱}{۲}\mathbf{T}^{i} = \mathrm{d}\mathbf{e}^{i} + \omega^{i}_{j} \wedge \mathbf{e}^{j} = ۰ \tag{۸}$$

$$\therefore\ \mathrm{d}\mathbf{e}^{i} = -\omega^{i}_{j} \wedge \mathbf{e}^{j} \tag{۹}$$

از شرط صفر بودن مشتق هموردای متریک که در اینجا دلتای کرونکر است و همینطور مثبت معین بودن متریک نتیجه می‌شود که:

$$\omega^{(۱)}_{(۱)} = \omega^{(۲)}_{(۲)} = ۰ \qquad , \qquad \omega^{(۱)}_{(۲)} = -\omega^{(۲)}_{(۱)} \tag{۱۰}$$

در نتیجه هموستارهای اسپینی به دست می‌آید:

$$\omega^{(۱)}_{(۲)} = -\omega^{(۲)}_{(۱)} = -\frac{۱}{a}\cot\theta\ \mathbf{e}^{(۲)} \tag{۱۱}$$

حال برای محاسبه تانسور انحنای ریمان از معادله دوم ساختاری کارتان برای دو-فرم انحنا استفاده

می‌کنیم:

$$\mathbf{\Omega}^i_j = \mathrm{d}\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \frac{۱}{۲} R^i_{jkl} \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^l \qquad (۱۲)$$

از هموستارهای اسپینی مشتق خارجی می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega^{(۱)}_{(۲)} &= -\mathrm{d}\omega^{(۲)}_{(۱)} = -\frac{۱}{a}\cot\theta\,\mathrm{d}\mathbf{e}^{(۲)} + \frac{۱}{a\sin\theta}\mathrm{d}\theta \wedge \mathbf{e}^{(۲)} & (۱۳)\\ &= \frac{۱}{a^۲}\mathbf{e}^{(۱)} \wedge \mathbf{e}^{(۲)} & (۱۴)\end{aligned}$$

و واضح است که ضرب گوه‌ای هموستارها نیز صفر است، پس دو‌ـفرم انحنا به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{\Omega}^{(۱)}_{(۱)} = \mathbf{\Omega}^{(۲)}_{(۲)} = ۰ \qquad (۱۵)$$

$$\mathbf{\Omega}^{(۱)}_{(۲)} = -\mathbf{\Omega}^{(۲)}_{(۱)} = \frac{۱}{a^۲}\mathbf{e}^{(۱)} \wedge \mathbf{e}^{(۲)} \qquad (۱۶)$$

حال با توجه به پادمتقارن بودن تانسور ریمان نسبت به دو اندیس k و l در رابطه ۱۲ و نتایج فوق، تنها مولفه‌های غیر صفر تانسور ریمان به این صورت است:

$$R^{(۱)}_{(۲)(۱)(۲)} = -R^{(۱)}_{(۲)(۲)(۱)} = \frac{۱}{a^۲} \qquad (۱۷)$$

$$R^{(۲)}_{(۱)(۱)(۲)} = -R^{(۲)}_{(۱)(۲)(۱)} = -\frac{۱}{a^۲} \qquad (۱۸)$$

از ادغام این تانسور به تانسور ریچی می‌رسیم:

$$R_{(۱)(۱)} = R^{(۱)}_{(۱)(۱)(۱)} + R^{(۲)}_{(۱)(۲)(۱)} = \frac{۱}{a^۲} \qquad (۱۹)$$

$$R_{(۱)(۲)} = R^{(۱)}_{(۱)(۱)(۲)} + R^{(۲)}_{(۱)(۲)(۲)} = ۰ \qquad (۲۰)$$

$$R_{(۲)(۲)} = R^{(۱)}_{(۲)(۱)(۲)} + R^{(۲)}_{(۲)(۲)(۲)} = \frac{۱}{a^۲} \qquad (۲۱)$$

و از ادغام تانسور ریچی به نرده‌ای انحنا می‌رسیم:

$$R = \frac{۲}{a^۲} \qquad (۲۲)$$

تانسور اینشتین به راحتی به دست می‌آید:

$$G_{(۱)(۱)} = R_{(۱)(۱)} - \frac{۱}{۲}R = ۰ \qquad (۲۳)$$

$$G_{(۱)(۲)} = R_{(۱)(۲)} = ۰ \qquad (۲۴)$$

$$G_{(۲)(۲)} = R_{(۲)(۲)} - \frac{۱}{۲}R = ۰ \qquad (۲۵)$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، در دو بعد تانسور انیشتین صفر می‌شود در حالیکه تانسور ریچی دارای یک درجه آزادی (یعنی همان نرده‌ای انحنا) است.

(ب) برای محاسبه خم ژئودزی کافی است از کنش $S = \int g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \mathrm{d}\lambda$ وردش بگیریم (شعاع کره را یک می‌گیریم):

$$\mathcal{L} = \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2 \tag{۲۶}$$

$$\theta : \qquad \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \tag{۲۷}$$

$$\phi : \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sin^2\theta\dot{\phi}\right) = 0 \to \ddot{\phi}\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} = 0 \tag{۲۸}$$

مشخص است که خم $\phi =$ در معادلات فوق صدق می‌کند و معادله آن به صورت $\theta = c\lambda + \theta_0$ در می‌آید که مبین دایره‌های عظیمه‌ای است که از قطب‌ها می‌گذرند. همینطور خم $\theta = \pi/2$ نیز در این معادلات صدق می‌کند $\phi = c'\lambda + \phi_0$ که مبین دایره استوا است.

(ج) از معادلات ژئودزی ۲۷ و ۲۸ می‌توان هموستارها را در پایه مختصاتی به دست آورد:

$$\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \qquad , \qquad \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot\theta \tag{۲۹}$$

معادله انتقال موازی بردار Y^μ در امتداد خمی که بردار مماس آن $X^\rho(t)$ است، به صورت زیر است:

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}Y^\mu = \frac{\partial Y^\mu}{\partial t} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}Y^\nu X^\rho \tag{۳۰}$$

حال اگر خم مورد نظر دایره‌ای به معادله $\theta = \theta_0$ و $\phi = kt + \phi_0$ باشد، بردار مماس بر آن به صورت $X = (0, k)$ خواهد بود که برای سهولت آنرا بهنجار می‌کنیم $k = 1/\sin\theta_0$، در این حالت یک دایره کامل معادل پیمایش خم از $t = 0$ تا $t = 2\pi\sin\theta$ است. حال تغییرات بردار $V = (V^\theta, V^\phi)$ در اثر انتقال موازی در امتداد این خم به صورت زیر است:

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}V^\theta = \frac{\mathrm{d}V^\theta}{\mathrm{d}t} - \sin\theta\cos\theta X^\phi V^\phi = 0 \tag{۳۱}$$

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}V^\phi = \frac{\mathrm{d}V^\phi}{\mathrm{d}t} + \cot\theta\left(X^\theta V^\phi + X^\phi V^\theta\right) \tag{۳۲}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V^\theta}{\mathrm{d}t} - k\sin\theta_0\cos\theta_0 V^\phi = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}V^\phi}{\mathrm{d}t} + k\cot\theta_0 V^\theta = 0 \end{cases} \tag{۳۳}$$

دستگاه معادله‌های فوق به راحتی قابل حل است و جواب آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} V^\phi = A\cos(\cot(\theta_0)t) + B\sin(\cot(\theta_0)t) \\ V^\theta = A\sin\theta_0\sin(\cot(\theta_0)t) - B\sin\theta_0\cos(\cot(\theta_0)t) \end{cases} \tag{۳۴}$$

حال با توجه به شرط اولیه $V|_{t=۰} = (۱,۰)$ ضرایب A و B مشخص می‌شود:

$$A = ۰ \qquad , \qquad B = -\frac{۱}{\sin\theta_۰} \tag{۳۵}$$

در نتیجه مولفه‌های این بردار پس از انتقال موازی به اندازه یک دایره کامل به صورت زیر خواهند بود:

$$V^\theta = \cos(\cot(\theta_۰)t)|_{t=۲\pi} = \cos(۲\pi\cot(\theta_۰)) \tag{۳۶}$$

$$V^\phi = -\frac{۱}{\sin\theta_۰}\sin(\cot(\theta_۰)t)|_{t=۲\pi} = -\frac{۱}{\sin\theta_۰}\sin(۲\pi\cot(\theta_۰)) \tag{۳۷}$$

مشخص است در حالتی که این دایره یک دایره عظیمه باشد $(\theta_۰ = \pi/۲)$ آنگاه بردار انتقال یافته در هر نقطه برابر بردار اولیه خواهد بود.

۲.

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\left(\omega_{i_۱ i_۲\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_۱}\wedge\mathrm{d}x^{i_۲}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\eta_{j_۱ j_۲\cdots j_q}\mathrm{d}x^{j_۱}\wedge\mathrm{d}x^{j_۲}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}\right) \tag{۳۸}$$

$$= \frac{\partial\omega_{i_۱ i_۲\cdots i_p}}{\partial x^k}\eta_{j_۱ j_۲\cdots j_q}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^{i_۱}\wedge\mathrm{d}x^{i_۲}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_۱}\wedge\mathrm{d}x^{j_۲}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}$$
$$+\omega_{i_۱ i_۲\cdots i_p}\frac{\partial\eta_{j_۱ j_۲\cdots j_q}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^{i_۱}\wedge\mathrm{d}x^{i_۲}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_۱}\wedge\mathrm{d}x^{j_۲}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q} \tag{۳۹}$$

حال در جملهٔ دوم عبارت فوق اگر بخواهیم عبارت را به صورت مشتق خارجی فرم η بنویسیم باید $\mathrm{d}x^k$ را p بار از $\mathrm{d}x^i$ها رد کنیم که یک عامل $(-۱)^p$ به دست می‌آید:

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-۱)^p\omega\wedge\mathrm{d}\eta \tag{۴۰}$$

۳. از قاعده ناجابجایی مشتق دوم هموردا بر حسب تانسور ریمان استفاده می‌کنیم:

$$\xi^\lambda{}_{;\mu\nu} - \xi^\lambda{}_{;\nu\mu} = R^\lambda{}_{\rho\nu\mu}\xi^\rho \tag{۴۱}$$

حال روی λ و ν ادغام می‌کنیم:

$$\xi^\lambda{}_{;\mu\lambda} - \xi^\lambda{}_{;\lambda\mu} = R_{\rho\mu}\xi^\rho \tag{۴۲}$$

و با توجه به بردار کیلینگ بودن ξ^λ می‌دانیم که $\xi^\lambda{}_{;\lambda} = ۰$ و $\xi^\lambda{}_{;\mu} = -\xi_\mu{}^{;\lambda}$:

$$\xi^{\mu;\lambda}{}_{;\lambda} + R^\mu{}_\rho\xi^\rho = ۰ \tag{۴۳}$$

(۴۴)

۴.

$$\mathcal{L}_u x = [u, x] \tag{۴۵}$$

$$\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v x = [u, [v, x]] \tag{۴۶}$$

$$[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] x = [u, [v, x]] - [v, [u, x]] \tag{۴۷}$$

$$\mathcal{L}_{[u,v]} x = [[u, v], x] \tag{۴۸}$$

پس چیزی که باید اثبات کنیم اتحاد ژاکوبی است:

$$[u, [v, x]] + [v, [x, u]] + [x, [u, v]] = ۰ \tag{۴۹}$$

که با بسط دادن به راحتی اثبات می‌شود.

۵. از اتحاد اول کارتان داریم:

$$g_{\mu\nu} = e^{۲\phi(x)} \eta_{\mu\nu} \to \mathbf{e}^\mu := e^\phi \mathrm{d}x^\mu \tag{۵۰}$$

$$T = ۰ \to \mathrm{d}\mathbf{e}^\mu = -\omega^\mu_\nu \wedge \mathbf{e}^\nu \tag{۵۱}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}^\mu = \frac{\partial e^\phi}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = -e^{-\phi} \phi_{,\nu} \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu \tag{۵۲}$$

$$\therefore (\omega^\mu_\nu - e^{-\phi} \phi_{,\nu} \mathbf{e}^\mu) \wedge \mathbf{e}^\nu = ۰ \to \omega^\mu_\nu = e^{-\phi} \phi_{,\nu} \mathbf{e}^\mu + f \mathbf{e}^\nu \tag{۵۳}$$

از سوی دیگر از سازگاری هموستار با متریک (صفر شدن مشتق هموردای متریک) خواهیم داشت:

$$\omega^\mu{}_\nu = -\eta^{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} \omega^\sigma{}_\rho \tag{۵۴}$$

با قرار دادن رابطه فوق در معادله ۵۳ ضریب f تعیین می‌شود، بطوریکه فرم هموستار به شکل زیر خواهد بود:

$$\omega^\mu{}_\nu = e^{-\phi} \phi_{,\nu} \mathbf{e}^\mu - e^{-\phi} \phi_{,\rho} \eta^{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} \mathbf{e}^\sigma \tag{۵۵}$$

حال از اتحاد دوم کارتان بهره می‌گیریم:

$$\mathrm{d}\omega^\mu_\nu + \omega^\mu_\rho \wedge \omega^\rho_\nu = \frac{۱}{۲} R^\mu_{\nu\kappa\sigma}\mathbf{e}^\kappa \wedge \mathbf{e}^\sigma \quad (۵۶)$$

$$\mathrm{d}\omega^\mu_\nu = e^{-۲\phi}\phi_{,\nu\kappa}\mathbf{e}^\kappa \wedge \mathbf{e}^\mu - e^{-۲\phi}\phi_{,\rho\kappa}\eta^{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\mathbf{e}^\kappa \wedge \mathbf{e}^\sigma \quad (۵۷)$$

$$\begin{aligned}\omega^\mu_\rho \wedge \omega^\rho_\nu &= e^{-۲\phi}\phi_{,\rho}\phi_{,\nu}\mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\rho - e^{-۲\phi}\phi_{,\rho}\phi_{,\tau}\eta^{\rho\tau}\eta_{\nu\lambda}\mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\lambda \\ &\quad -e^{-۲\phi}\phi_{,\nu}\phi_{,\kappa}\eta^{\mu\kappa}\eta_{\rho\sigma}\mathbf{e}^\sigma \wedge \mathbf{e}^\rho + e^{-۲\phi}\phi_{,\kappa}\phi_{,\rho}\eta^{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda}\mathbf{e}^\rho \wedge \mathbf{e}^\lambda \quad (۵۸)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad & \frac{۱}{۲}R^\mu_{\nu\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta = e^{-۲\phi}\phi_{,\nu\kappa}\delta^\kappa_\alpha\delta^\mu_\beta\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta - e^{-۲\phi}\phi_{,\rho\kappa}\eta^{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\delta^\kappa_\alpha\delta^\sigma_\beta\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta \\ & +e^{-۲\phi}\phi_{,\rho}\phi_{,\nu}\delta^\mu_\alpha\delta^\rho_\beta\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta - e^{-۲\phi}\phi_{,\rho}\phi_{,\tau}\eta^{\rho\tau}\eta_{\nu\lambda}\delta^\mu_\alpha\delta^\lambda_\beta\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta \\ & -e^{-۲\phi}\phi_{,\nu}\phi_{,\kappa}\eta^{\mu\kappa}\eta_{\rho\sigma}\delta^\sigma_\alpha\delta^\rho_\beta\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta + e^{-۲\phi}\phi_{,\rho}\phi_{,\kappa}\eta^{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda}\delta^\rho_\alpha\delta^\lambda_\beta\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta \\ & +X\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\gamma + Y\mathbf{e}^\beta \wedge \mathbf{e}^\gamma \quad (۵۹)\end{aligned}$$

برای تعیین ضرایب X و Y در اینجا نیز از تقارن‌ها استفاده می‌کنیم. همانطور که می‌دانیم تانسور ریمان نسبت به جابجایی دو اندیس آخر پادمتقارن است، بنابراین ضرایب فوق از پادجابجایی اندیس‌های α و β به دست می‌آید (به این ترتیب جمله پنجم در طرف راست عبارت فوق از بین می‌رود). در ضمن برای رفتن به پایه مختصاتی از رابطه $\mathbf{e}^\mu = e^\phi dx^\mu$ می‌توان استفاده کرد و کافی است در رابطه فوق ضرایب $e^{-۲\phi}$ را حذف کرد:

$$\begin{aligned}\therefore \quad & \frac{۱}{۲}R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \phi_{,\nu[\alpha}\delta^\mu_{\beta]} - \phi_{,\rho[\alpha}\eta^{\mu\rho}\eta_{\beta]\nu} \\ & +\phi_{,\nu}\delta^\mu_{[\alpha}\phi_{,\beta]} - \phi_{,\rho}\phi_{,\tau}\eta^{\rho\tau}\delta^\mu_{[\alpha}\eta_{\beta]\nu} + \phi_{,\kappa}\phi_{,[\alpha}\eta_{\beta]\nu}\eta^{\mu\kappa} \quad (۶۰)\end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} = -۲\phi_{,\mu\nu} - \phi_{,\rho}{}^{,\rho}\eta_{\mu\nu} + ۲\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - ۲\phi_{,\rho}\phi^{,\rho}\eta_{\mu\nu} \quad (۶۱)$$

$$R = -۶e^{-۲\phi}(\phi_{,\mu}^{;\mu} + \phi_{,\mu}\phi^{,\mu}) \quad (۶۲)$$