

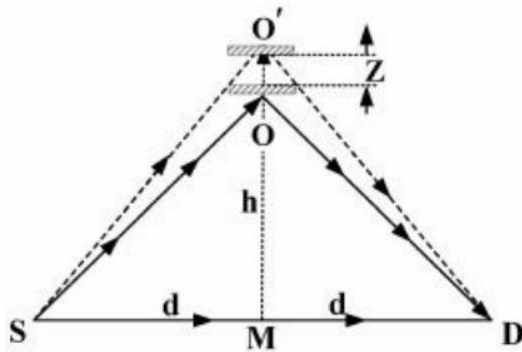
به نام خدا

تمرین سری سوم

مهلت تحویل: ۱۳۹۸/۸/۲۰

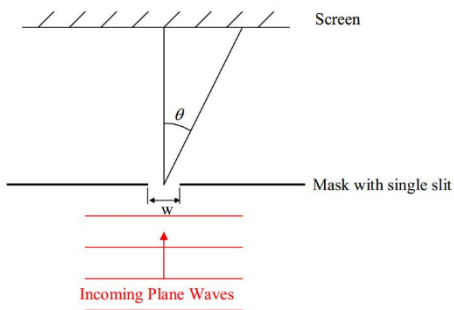
مکان: الف ۲۴ (۱۶:۳۰)

۱- در سال ۲۰۱۴ گروهی در چین اعلام کردند که توانستند طی یک آزمایش صحت اصل عدم قطعیت را نشان دهند با مطالعه مقاله آن ها (<https://arxiv.org/abs/1512.07407v2>) درباره روش و مشاهداتشان تحقیق کنید و نتیجه را مختصراً ذکر کنید.



۲- در شکل رو به رو در آشکار ساز D دو پرتو تکفام نور با هم تداخل سازنده دارند. یکی از پرتو ها مستقیماً از چشمه S و دیگری پس از بازتاب از آینه O به آشکار ساز رسیده است. آینه در امتداد OM به مقدار بسیار کوچک Z و بطور عمود جابجا می کنیم به طوری که برای اولین بار شدت موج تداخلی در آشکار ساز D صفر شود نشان دهید طول موج نور تابشی بر حسب Z به صورت زیر است:

$$\lambda_s = \frac{4Zh}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$



۳- موج تخت تکفامی از درون شکاف با پهنای w عبور می کند و توسط پرده ای در فاصله d از شکاف آشکار می شود ( $w \ll d$ ) میدان الکتریکی (تابع موج) به صورت:

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

که در آن  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  و  $\omega = ck$  می باشد.

اگر پهنای شکاف را به N قسمت مساوی تقسیم کنیم ( $\delta y = \frac{w}{N}$ ) نشان دهید میدان روی پرده در نقطه ای تحت زاویه  $\theta$  به صورت:

$$E_\theta = \frac{E_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega t + n\Delta\beta) \quad \Delta\beta = \frac{2\pi \sin(\theta)}{\lambda} \delta y$$

ب) در حد  $N \rightarrow \infty$  نشان دهید:

$$E_{\theta} = E_0 \sin\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\beta}{2}} \quad \beta = \frac{2\pi \sin(\theta)}{\lambda} w$$

ج) از الکترومغناطیس می دانیم که شدت موج الکترومغناطیسی به صورت  $I = \alpha \langle E_{\theta}^2 \rangle$  است که  $\alpha$  تابعی از گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی محیط و  $\langle E^2 \rangle$  متوسط زمانی مربع میدان الکتریکی است. نشان دهید شدت موج الکترومغناطیسی روی پرده:

$$I_{\left(\frac{\beta}{2}\right)} = I_0 \left( \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\beta}{2}} \right)^2 \quad I_0 = I_{(\theta=0)}$$

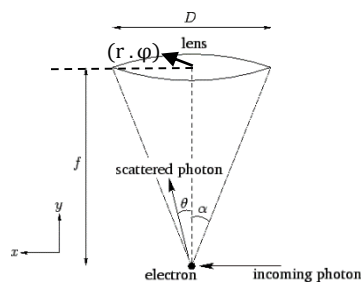
د)  $\theta$  هایی که در آن شدت بیشینه می شود را بیابید.

و) در  $\beta = -\pi, \pi$  اولین کمینه ها در شدت ظاهر می شوند اگر فاصله این دو کمینه شدت (بیشترین احتمال حضور ذره) از یکدیگر را  $\Delta y$  بنامیم  $\Delta y$  را بیابید و نشان دهید با نتایج حاصل از اصل عدم قطعیت در توافق است.

راهنمایی:

$$\sin \theta = \frac{\Delta p_y}{p} \approx \frac{\Delta y}{2d}$$

۴-ورنر هایزنبرگ در سال ۱۹۲۷ رابطه عدم قطعیتش را ارایه کرد. او یک آزمایش ذهنی تصور نمود که طی آن یک فوتون با انرژی بسیار بالا (پرتو گاما) با الکترونی برخورد می کند (بدون تغییر در انرژی) سپس ناظری به کمک میکروسکوپ با قطر دهانه  $D$  و فاصله  $f$  با استفاده از فوتون پراکنده شده تلاش می کند الکترون را آشکار کند. مبنای عملکرد این میکروسکوپ حتما الگوی پراش بود ( $D = \frac{2\lambda}{\sin \alpha}$ )



آ) نشان دهید:

$$\sin \alpha = \frac{D/2}{\sqrt{f^2 + (D/2)^2}}$$

ب) نشان دهید:

$$\Delta x = \frac{D}{4}$$

راهنمایی:

$$\langle A_{(r,\varphi)} \rangle = \frac{\int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} A_{(r,\varphi)} r dr d\varphi}{\int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} r dr d\varphi}$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

ج) برای تکانه فوتون پراکنده شده (p) نشان دهید:

$$\langle p_x \rangle = 0 \quad . \quad \langle p_y \rangle = \frac{h}{\lambda} \frac{8f}{D^2} \left( \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + (f)^2} - f \right)$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \frac{h^2}{\lambda^2} \frac{2}{D^2} \left( \left(\frac{D}{2}\right)^2 - f^2 \ln \left( 1 + \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{f^2} \right) \right) \quad . \quad \langle p_y^2 \rangle = \frac{h^2}{\lambda^2} \frac{4f^2}{D^2} \ln \left( 1 + \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{f^2} \right)$$

راهنمایی: ابتدا نشان دهید:

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda} (\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \hat{y} + \sin \theta \sin \varphi \hat{z})$$

د) نشان دهید:

$$a) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta p_x \Delta x = \frac{h}{4}$$

$$b) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta p_y \Delta x = 0$$

راهنمایی: دقت کنید که جملات  $\Delta p_x$  و  $\Delta p_y$  را تا اولین مرتبه غیر صفر بسط دهید:

$$x \ll 1 \rightarrow \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots$$

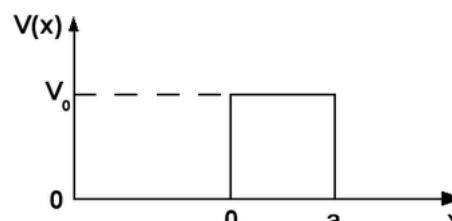
ه) علل اختلاف رابطه قبلی با رابطه عدم قطعیت را ذکر کنید.

و) به کمک رابطه عدم قطعیت ( $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ ) و رابطه نسبیتی انرژی؛ نشان دهید:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

۵- نور تکفامی با طول موج ۶۰۰ نانومتر از یک دریچه فوق سریع که تنها ۱ نانوثانیه باز است عبور می کند. پهن شدگی این نور (عدم قطعیت طول موج) چند آنگستروم خواهد بود؟

۶- ذره ای آزاد با انرژی  $E$  با یک سد پتانسیل با ارتفاع  $V_0$  و عرض  $a$  برخورد می کند ( $E < V_0$ ). تابع موج را به صورت:



$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x} & 0 < x < a \\ Ge^{ikx} & a < x \end{cases}$$

در نظر بگیرید.

آ) به کمک معادله شرودینگر، مقادیر  $k$  و  $\alpha$  را تعیین کنید.

ب) به کمک شرایط مرزی، نشان دهید:

$$t \equiv \frac{G}{A} = \frac{4k\alpha e^{-\alpha a}}{(k + i\alpha)^2 - (k - i\alpha)^2 e^{-2\alpha a}}$$

ج) نشان دهید ضریب عبور ( $T$ ) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$T \equiv |t|^2 = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\alpha a)}{4E(V_0 - E)}}$$

د) نشان دهید به ازای  $a \gg \frac{1}{\alpha}$  ضریب عبور تقریباً برابر است با:

$$T \approx 4e^{-2\alpha a}$$

راهنمایی: فرض کنید ( $E \sim V_0$ )

ه) در حالت حدی  $E \rightarrow V_0$  مقدار ضریب عبور را بدست آورید.

۷- به کمک رابطه عدم قطعیت؛ انرژی حالت پایه:

آ) نوسانگر هماهنگ ساده

ب) ذره ای در پتانسیل  $V(x) = gx^4$

را تخمین بزنید.

۸- به کمک تابع موج حالت پایه نوسانگر هماهنگ یک بعدی:

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

آ)  $\Delta x$  را محاسبه کنید.

ب) با محاسبه  $\Delta p$ ، نشان دهید:

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

راهنمایی: به کمک تقارن پتانسیل استدلال کنید  $\langle p \rangle = 0$  و می دانیم که:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega x^2}{2}$$

۹- آ) سرعت فاز چیست؟

ب) نشان دهید سرعت فاز موج وابسته به ذره ای با جرم سکون  $m_0$  و طول موج  $\lambda$  به وسیله رابطه :

$$c \sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c \lambda}{h}\right)^2}$$

بدست می آید.

آیا این سرعت با اصل نسبیت خاص (سرعت هیچ ذره ی مادی نباید از سرعت نور تجاوز کند) در تناقض است؟

ج) سرعت ذره ای  $0.5 C$  است. سرعت موج دوبروی وابسته به این ذره را بدست آورید.

موفق باشید.