سری سوم تمرین (مکانیک کوانتمی II)

موعد تحویل: شنبه ۸۷/۱/۱۷

* نظریه اختلال مستقل از زمان

۱- مسئله 6 از فصل 11 گاسیوروویچ: در این مورد ثابت کنید چرا وقتی n مقدار خیلی بزرگی باشد، دیگر نظریه اختلال کار نمی‌کند و فرض کنید که λ چقدر کوچک باشد. اگر جمله متناسب با x^3 در پتانسیل نیز وجود داشت از مرتبه اول آن چه دریابید؟

۲- مسئله 5 از فصل 11 گاسیوروویچ: اگر پروتون را بجای کره یکنواخت بار پیوسته کروی با بار یکنواخت e در نظر بگیریم انرژی ناشی از این تغییر را دوباره محاسبه کنید و با حالت کره یکنواخت بار مقایسه نمایید. (راهنمایی: از تقریب $e^{-R/a_0} \simeq 1$ استفاده کنید.)

۳- هامیلتونی دو اسپین برهمکنش کننده (هر دو $s=\frac{1}{2}$) در یک میدان مغناطیسی B در جهت مثبت محور z اعمال شده بصورت زیر است:

$$H = B(a_1 \sigma_z^{(1)} + a_2 \sigma_z^{(2)}) + K \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)}$$

که a_1 و a_2 مقادیر منفی گشتاورهای مغناطیسی هستند (در اثر جفت‌شدگی از تعاملی، غیرقابل فرض می‌شوند) و K قدرت برهمکنش است:

a) با استفاده از نظریه اختلال مرتبه دوم مقادیر ویژه انرژی را محاسبه کنید (با فرض اینکه B کوچک است.)

b) 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 (〃 〃 K 〃 〃)

c) مقادیر ویژه انرژی را دقیقاً محاسبه کنید، و صحت جوابهای خود را در قسمتهای a و b تحقیق کنید.

۴- در محاسبه اختلال مرتبه دوم با رابطه زیر مواجهیم:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n^0 | H' | m^0 \rangle \langle m^0 | H' | n^0 \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

منظور از $|m^0\rangle$ حالت mام ناختل است. اگر جمله انرژی در مخرج را نداشتیم می‌توانستیم از رابطه تمامیت (completeness) برای حذف سری استفاده کنیم (کافی بود یک جمله $m=n$ را اضافه و کم کنیم.)

یک راه برای حذف انرژی در مخرج وجود دارد. فرض کنید یک اپراتور Ω را داشته باشیم طوری که:

$$H' = [\Omega, H^0] \quad (1)$$

آنگاه:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n^0 | H' | m^0 \rangle \langle m^0 | \Omega H^0 - H^0 \Omega | n^0 \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$= \sum_{m \neq n} \langle n^0 | H' | m^0 \rangle \langle m^0 | \Omega | n^0 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad E_n^{(2)} = \langle n^0 | H' \Omega | n^0 \rangle - \langle n^0 | H' | n^0 \rangle \langle n^0 | \Omega | n^0 \rangle \quad (2)$$

ملاحظه می‌بینیم با محاسبه ۳ عنصر ماتریس، جابجایی انرژی مرتبه دوم محاسبه می‌شود. البته یافتن Ω بجز در موارد استثنایی، کار ساده‌ای نیست:

برای مسئله نوسانگر، فرض کنید $H' = -q\mathcal{E}X$ که X اپراتور مکان است. $E_n^{(2)}$ را از دو راه محاسبه کنید ① روش ~~[illegible]~~ معمول (روش کتاب)

② با یافتن Ω و استفاده از رابطه ②. نتیجه را با روش ① مقایسه کنید.

۵- ذره‌ای با اسپین ۱ در نظر بگیرید (که درجه آزادی اوربیتالی ندارد)، فرض کنید:

$$H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2)$$

که S_i، ماتریسهای اسپینی 3×3 هستند و $A \gg B$، جمله B را به عنوان اختلال در نظر گرفته، حالتهای ویژه $H^\circ = AS_z^2$ را طوری پیدا کنید که تحت اختلال پایدار می‌مانند. سپس جابجایی انرژی‌ها تا مرتبه اول B بیابید. جواب دقیق مسئله را پیدا کرده و جابجایی انرژی از روش اختلال را با آن مقایسه کنید.

۶- مسئله ۱۰ از فصل ۱۱ گاسیوروویچ؛

۷- مسئله ۱۱ از فصل ۱۱ گاسیوروویچ؛ جابجایی انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته را در مرتبه دوم اختلال نیز بدست آورید (راهنمایی: برای حل دقیق مسئله از تغییر مختصات زیر استفاده کنید:

$$\left(\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \bar{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases}\right.$$

۸- ذره‌ای را در چاه پتانسیل مربعی دو بعدی زیر در نظر بگیرید؛

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x,y \leq L \\ \infty & \text{elsewhere} \end{cases}$$

حالتهای تبهگن بصورت زیر خواهند بود؛

$$\psi_{mn}(x,y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)$$

$$E_{mn} = E_1 (n^2 + m^2)$$

این انرژی‌ها تحت اختلال زیر چگونه مختل خواهند شد؟

$$H' = \epsilon \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad 0 \leq x \leq L$$

۹- حالت انرژی ۳ مرتبه تبهگن اتم هیدروژن $|n=2, l=1, m=\pm 1, 0\rangle$ را بصورت زیر مختل می‌کنیم؛

$$V(x,y) = b(x^2 - y^2)$$

با استفاده از نظریه اختلال تبهگن، دیگر حالتهای مرتبه صفرم و شکافتگی ترازهای انرژی سطوح تا مرتبه اول b را تعیین کنید. (لازم نیست انتگرالهای شعاعی را محاسبه کنید، اما باید تعیین کنید کدامها (از میان مولفه‌های ماتریس V) صفر و کدامها غیرصفرند و کدامها با هم برابرند.)

۱۰- مسئله 13 از فصل 11 گاسیوروویچ؛