تمرین سری سوم مکانیک کوانتومی ۱

مهلت تحویل : شنبه ۲۰ مهر – ساعت ۱۲:۳۰ کلاس ف ۲ – و پس از آن تحویل گرفته نمی شود.
نام دستیار مربوطه را در پاسخ برگ خود حتما قید کنید .

---

۱ – برای تابع $\psi(\mathbf{r})$ زوج تبدیل فوریه را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}} d^3r$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} d^3k$$

الف : نشان دهید اپراتور تبدیل فوریه ، یک اپراتور حافظ اندازه است .یعنی اگر $\psi(\mathbf{r})$ بهنجار باشد، تبدیل فوریه ی آن هم بهنجار است . (بهنجار بودن به این معنی است که نرم تابع واحد باشد) . تبدیل فوریه ی نمایش در پایه ی مکان بردار حالت ، نمایش در پایه ی تکانه ی بردار حالت را بدست می دهد . بنابراین اگر نمایش در پایه ی مکان بهنجار باشد نمایش در فضای تکانه هم بهنجار است .

ب : تبدیل فوریه ی بسته ی موج گوسی زیر را حساب کنید و آنرا $\tilde{\psi}(k)$بنامید .

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$$

پ : اگر پهنای یک بسته ی موج را مقداری تعریف کنیم که تابع موج در آن به e^{-1} مقدار ماکسیمم خود می رسد(و آنها را با ΔxوΔk نشان دهیم)حاصل ضرب $\Delta x \Delta k$ چقدر است ؟

ت : اگر با کوچک کردن α پهنای $\psi(x)$ را کم کنیم،پهنای تبدیل فوریه ی آن چه تغییری می کند .

۲ – عملگر هرمیتی $\mathbf{A}$ دو ویژه حالت بهنجار $|\psi_1\rangle$و$|\psi_2\rangle$ با ویژه مقادیر متناظر λ_1و λ_2 دارد . عملگر هرمیتی $\mathbf{B}$ هم دو ویژه حالت بهنجار $|\phi_1\rangle$و $|\phi_2\rangle$ با ویژه مقادیر μ_1 و μ_2 دارد .

الف : مشاهده پذیر $\mathbf{A}$ اندازه گیری می شود و مقدار λ_1 بدست می آید . حالت سیستم بلافاصله پس از اندازه گیری چیست ؟

ب : حالا اگر $\mathbf{B}$ اندازه گیری شود چه نتایجی و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

پ : پس از اندازه گیری $\mathbf{B}$ دوباره $\mathbf{A}$ را اندازه می گیریم .احتمال بدست آمدن λ_1 چقدر است .

ت : حالا فرض کنیم بدانیم در اندازه گیری مشاهده پذیر $\mathbf{B}$ در آزمایش قبل مقدار μ_1 بدست آمده است . حالا مشاهده پذیر $\mathbf{A}$ اندازه گیری می شود .با چه احتمالی مقدار λ_1 بدست می آید ؟

۳ – تابع موج ذره ای در زمان $t = 0$ به صورت زیر داده شده است :

$$\psi(x,0) = N\int_{-\infty}^{\infty} dk \;\; e^{|k|/k_0} e^{ikx}$$

که در آن N و k_0 ثابت اند .

الف : احتمال $P(p_1, 0)$ یعنی احتمال اینکه یک اندازه گیری تکانه که در زمان $t = 0$ انجام شود ، نتیجه ای بین $-p_1$ و p_1 بدهد چقدر است .

ب : اگر اندازه گیری در زمان t انجام شود این احتمال یعنی$P(p_1, t)$ چقدر است .

۴ – موج تخت $\psi(x) = Ae^{\frac{ip_x x}{\hbar}}$ را با ضرب داخلی

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\psi(x)dx$$

بهنجار کنید و نشان دهید که : $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

۵ – حالت زیر را در نظر بگیرید :

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

الف : اگر یک آزمایش اشترن – گرلاخ در راستای z روی این حالت انجام دهیم ، چه نتایجی و با چه احتمالاتی بدست می آوریم .

ب : اگر یک آزمایش اشترن – گرلاخ در راستای x روی این حالت انجام دهیم ، چه نتایجی و با چه احتمالاتی بدست می آوریم .

۶ – حالت $|z, +\rangle$ که ویژه حالت متناظر با ویژه مقدار $+\hbar/2$ از S_z است را در نظر بگیرید . اگراسپین این ذره را در راستای $\hat{n}$ اندازه بگیریم ، چه مقادیری با چه احتمالاتی بدست می آید؟

$$\hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

۷ – با استفاده از اصل عدم قطعیت ، انرژی حالت پایه ی نوسانگر هماهنگ ،انرژی حالت پایه ی اتم هیدروژن و شعاع حالت پایه ی اتم هیدروژن را محاسبه کنید .

۸ – **کوانتش ویلسون– زومرفلد** : در مدل بور برای اتم هیدروژن، شرط کوانتش تکانه زاویه ای به کار برده می شود که میتوان آن را به صورت $2\pi rp = nh$نیز نوشت. این شرط را میتوان به شرط کوانتش ویلسون– زومرفلد تعمیم داد که به شکل زیر نوشته می شود:

$$\oint pdq = nh$$

که در عبارت بالا، n عددی طبیعی،q یک مختصه ی تعمیم یافته و p تکانه ی مزدوج آن است. همچنین انتگرال، همان طور که از نمادگذاری به کار برده شده مشخص است، باید روی یک مسیر بسته در فضای فاز محاسبه شود. در این مسئله با به کارگیری این شرط، ترازهای انرژی را برای دو مسئله ی مختلف به دست خواهیم آورد.

الف) انرژی پتانسیل یک نوسانگر هماهنگ به جرم m به صورت $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ نوشته می شود. نوسانگری (کلاسیک) را در نظر بگیرید که از $x = x_0$ رها می شود.تکانه ی نوسانگر را بر حسب x به دست آورید.

ب) با اعمال شرط کوانتش ویلسون- زومرفلد، ترازهای انرژی مجاز نوسانگر را بیابید.

پ) مسئله ی ذره ای به جرم m را در یک چاه پتانسیل بی نهایتِ یک بعدی به عرض a در نظر بگیرید. با اعمال شرط کوانتش ویلسون- زومرفلد، ترازهای انرژی را برای چاه پتانسیل به دست آورید. یک چاه پتانسیل بی نهایت به عرض a با پتانسیل زیر داده می شود.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & x > a, x < 0 \end{cases}$$

موفق باشید .