

تمرین سری چهارم مکانیک کوانتومی ۱

مهلت تحویل: شنبه ۴ آبان - ساعت ۱۲:۳۰ کلاس ف ۲ - و پس از آن تحویل گرفته نمی شود.

نام دستیار مربوطه را در پاسخ برگ خود حتما قید کنید.

- ۱ - باریکه ای از ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ وارد سه دستگاه پشت سرهم اشترن - گراخ به صورت زیر می شوند:
- دستگاه اول ذرات با اسپین $s_z = \frac{\hbar}{2}$ را عبور می دهد و ذرات با $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ را سد می کند.
- اندازه گیری دوم ذرات با $s_n = \frac{\hbar}{2}$ را عبور و ذرات با $s_n = -\frac{\hbar}{2}$ را سد می کند. که s_n ویژه مقدار اپراتور $S.n$ و برداری در صفحه $x - z$ هست که با محور z زاویه ϕ می سازد.
- و بالاخره اندازه گیری سوم ذرات با $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ را عبور می دهد و بقیه ی ذرات را سد می کند.
- الف) اگر شدت ذراتی که از $s_z = \frac{\hbar}{2}$ از دستگاه اول خارج می شوند برابر ۱ باشد، شدت ذرات با $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ که از دستگاه سوم خارج می شوند چقدر است.
- ب) دستگاه دوم را در چه جهتی قرار دهیم که این شدت بیشینه شود؟
- ۲ - سیستمی با فضای هیلبرت سه بعدی که در حالت زیر است در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

با در نظر گرفتن مشاهده پذیر های A و B :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

- الف: ابتدا مشاهده پذیر A اندازه گیری می شود و بلافاصله پس از آن B را اندازه می گیریم. احتمال اینکه در اندازه گیری A مقدار صفر و در اندازه گیری B مقدار ۱ بدست آید، چقدر است؟
- ب: فرض کنید حالت سیستم همان $|\psi\rangle$ است. این بار اول B را اندازه گیری می کنیم و بلافاصله A را اندازه می گیریم. احتمال اینکه در اندازه گیری B مقدار ۱ و در اندازه گیری A مقدار صفر بدست آید، چقدر است؟
- ۳ - تبدیلات یکانی (Unitary Transformations): اگر بردارها در فضا به صورت زیر با یک عملگر یکانی تبدیل شوند:

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

الف : در این صورت عملگر \mathbb{A} روی این فضا چگونه تغییر می کند ؟

ب : اگر \mathbb{A}' تبدیل یافته ی عملگر \mathbb{A} باشد، نشان دهید :

$$\mathbb{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle \implies \mathbb{A}'|\psi'_n\rangle = a_n|\psi'_n\rangle$$

بنابراین ویژه مقدار ها حفظ می شوند. همچنین نشان دهید که جابه جاگر دو عملگر تحت تبدیل یکانی ناورداست. در حقیقت تبدیل یکانی فیزیک مساله را عوض نمی کند ، بلکه یک توصیف سیستم را به توصیف معادل دیگری تبدیل می کند .

پ : هر تبدیل یکانی بینهایت کوچک را می توان به صورت زیر نوشت که در آن ϵ یک بینهایت کوچک است :

$$\mathbb{U} = \mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{G}$$

شرط لازم برای اینکه تبدیل بالا واقعا یک تبدیل یکانی باشد چیست؟

ت : نشان دهید اگر $[\mathbb{A}, \mathbb{G}] = 0$ باشد ، تحت این تبدیل بینهایت کوچک یکانی ناورداست .

ث : نشان دهید هر تبدیل یکانی دلخواه (نه لزوما کوچک) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\mathbb{U} = e^{i\alpha\mathbb{G}}$$

که α یک ثابت است . در این حالت \mathbb{G} را مولد (*Generator*) تبدیل \mathbb{U} می نامیم .

ج : نشان دهید اگر $[\mathbb{A}, \mathbb{G}] = 0$ آنگاه عملگر \mathbb{A} تحت تبدیل یکانی $\mathbb{U} = e^{i\alpha\mathbb{G}}$ ناورداست .

چ : ثابت کنید عملگر $e^{ad/dx}$ عملگر یکانی روی فضای توابع است . اثر آن را روی یک بردار از فضا بدست آورید .

نشان دهید این تبدیل یکانی، انتقال به اندازه a است . پس $\mathbb{G} = -i\frac{d}{dx}$ مولد انتقال است .

موفق باشید .