

تمرین سری ششم مکانیک کوانتومی ۱

مهلت تحویل: شنبه ۲۵ آبان - ساعت ۱۲:۳۰ کلاس ف ۲ - و پس از آن تحویل گرفته نمی شود.
نام دستیار مربوطه را در پاسخ برگ خود حتما قید کنید.

۱ - معادله ی شرودینگر تحول زمانی بردار حالت سیستم را به صورت مجرد و ناپسته به نمایش در فضای هیلبرت مساله می دهد:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \mathbb{H} |\psi\rangle$$

الف: آیا در تحول زمانی یک سیستم کوانتومی عدم قطعیت وجود دارد؟

ب: ثابت کنید اگر بردار حالت یک سیستم بسته در زمان صفر بهنجار باشد، در زمان های بعدی هم بهنجار می ماند. ($|\psi\rangle^2$ در همه زمان ها شرط لازم برای تابع چگالی احتمال بودن را دارد.)
معادله ی شرودینگر را برای نمایش بردار حالت در پایه ی تکانه بدست آورید.

۲ - فرض کنید برای چگالی احتمال $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ یک قانون پایستگی مشابه با پایستگی بار در الکترومغناطیس داشته باشیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

که در آن \mathbf{J} جریان احتمال است. با استفاده از معادله ی شرودینگر این چگالی جریان را پیدا کنید و نشان دهید:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{m} \text{Re} \left(\psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi \right) \right)$$

ب: نشان دهید این چگالی جریان را می توان به صورت مقدار متوسط (چشمداشتی) عملگر زیر نشان داد:

$$\mathbb{K}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} (|\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| \mathbb{P} + \mathbb{P} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|)$$

ج: مقدار متوسط عملگر $|\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|$ برابر است با چگالی احتمال و $\frac{\mathbb{P}}{m}$ هم سرعت است. پس عملگر بالا عملگر کوانتومی است که از حاصل ضرب سرعت و چگالی احتمال ساخته شده است البته با یک متقارن سازی تا هرمیتی باقی بماند.

د: برای موج تخت $\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ چگالی احتمال و جریان احتمال را محاسبه کنید.

۳ - برای چاه پتانسیل بینهایت عمیق در محدوده ی $0 \leq x \leq a$ مقادیر مجاز انرژی و توابع ویژه مساله $\psi_n(x)$ را بیابید. اگر حالت اولیه ی ذره ترکیب خطی از حالت های ویژه باشد:

$$\psi(x, 0) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$$

الف: تابع موج ذره و چگالی احتمال را در زمان های بعدی بیابید.

ب: حالا فرض کنید که عرض چاه را یکباره از a به $b \leq a$ کاهش می دهیم. احتمال اینکه ذره ای که در چاه اول در حالت پایه قرار داشته در چاه جدید هم در حالت پایه باشد چقدر است؟

ج : این بار فرض کنید ذره در حالت اولیه ی زیر در چاه قرار داده می شود .

$$\psi(x, 0) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

قسمت (ب) را برای این حالت اولیه تکرار کنید .

۴ - در مورد مساله ی ویژه مقدار موارد زیر را نشان دهید :

الف : هرگاه پتانسیل زوج باشد ، ویژه حالت ها را می توان طوری انتخاب کرد که یا زوج باشند یا فرد .

ب: ویژه مقادیر انرژی در مسایل یک بعدی نمی توانند تبهگن باشند .

ج : مقادیر ویژه انرژی همواره از مینیمم پتانسیل بیشتر هستند .

د: برای پتانسیل های متناهی ، تابع موج و مشتق آن توابعی پیوسته اند .

موفق باشید .