حل تمرین سری چهارم مکانیک کوانتومی ۱

---

۱ – حل مساله مستقل از اندازه گیری اول است . ولی ذرات خارج شده از دستگاه اندازه اول در حالت مشخص $|z,+\rangle$ هستند . برای اندازه گیری دوم داریم :

$$\hat{n} = \cos\phi\hat{z} + \sin\phi\hat{x}$$

$$\mathbf{S}.\mathbf{n} = \cos\phi S_z + \sin\phi S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}$$

از قبل معلوم است که ویژه مقدار های مشاهده پذیر بالا برابر با $\pm\frac{\hbar}{2}$ است . ویژه حالت ها از قرار زیر اند :

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow u\sin\phi = (1+\cos\phi)v \Longrightarrow |\lambda = 1\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

چون مشاهده پذیر ها هرمیتی هستند ، ویژه حالت دوم به وضوح باید بر اولی عمود باشد. پس :

$$|\lambda = -1\rangle = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\phi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

ویژه حالت های S_z هم مشخص است .

$$|z,+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |z,-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حالا احتمال خروج ذره از دستگاه سوم را حساب می کنیم .چون ذرات برای رسیدن به خروجی یک راه بیشتر ندارند ، لذا :

$$P(s_{z(3)} = -\frac{\hbar}{2}) = P\{s_{n(2)} = +\frac{\hbar}{2}|s_{z(1)} = +\frac{\hbar}{2}\} \times P\{s_{z(3)} = -\frac{\hbar}{2}|s_{n(2)} = +\frac{\hbar}{2}\}$$

$$= |\langle z,+|n,+\rangle|^2 \times |\langle n,+|z,-\rangle|^2 = \cos^2\frac{\phi}{2}\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{4}\sin^2\phi$$

شدت ذرات خروجی نسبت به خروجی دستگاه اول ، همین است .

ب : ماکسیمم در زاویه ی $\phi = \frac{\pi}{2}$ اتفاق می افتد . این نتیجه را بطور شهودی هم می توان درک کرد . اگر دستگاه اندازه گیری میانی را حذف می کردیم ، چند درصد ذرات به خروجی می رسید؟ هیچ .اما با اندازه گیری میانی در راستای x حد اکثر شدت به خروجی می رسد .

۲ – اندازه گیری مشاهده پذیر A ویژه مقادیر آنرا بدست می دهد . بنابراین مقادیر ویژه آن که برابر است با :

$$a_1 = 0, a_2 = a_3 = 2(\textbf{Doubly degenerate})$$

مقادیر اندازه گیری شده هستند . ویژه بردار های متناظر آن عبارت اند از :

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

الف :احتمال آنکه اندازه گیری A مقدار بدست آمده ی صفر به همراه داشته باشد برابر است با :

$$P(a_1 = 0) = \frac{|\langle a_1|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{8}{17}$$

حالت بعدی سیستم پس از اندازه گیری عبارت است از :

$$|\phi\rangle = |a_1\rangle\langle a_1|\psi\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ویژه مقادیر مشاهده پذیر B و ویژه حالت مربوطه عبارتند از :

$$|b_1 = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |b_2 = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |b_3 = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

همان طور که مشاهده می کنید ، دوباره طیف تبهگن است . اکنون سیستم در حالت $|\phi\rangle$ است . پس احتمال بدست آوردن ویژه مقدار تبهگن $b_2 = b_3 = 1$ برابر است با :

$$P(b_2 = 1) = \frac{|\langle b_2|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} + \frac{|\langle b_3|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} = 1$$

دلیل بدست آمدن احتمال واحد برای این مقدار آن است که حالت قبل اندازه گیری $|\phi\rangle$ ویژه حالت مشاهده پذیر B است . در واقع :

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}|b_2\rangle$$

وقتی ابتدا A را و سپس B را اندازه گیری می کنیم ، احتمال آنکه برای اولی مقدار صفر و برای دومی مقدار یک بدست آوریم عبارت است از :

$$P(a_1, b_2) = P(a_1)P(b_2) = \frac{8}{17}$$

ب : وقتی ابتدا B و سپس A را اندازه گیری کنیم :

$$P(b_2 = 1) = \frac{|\langle b_2|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} + \frac{|\langle b_3|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{9}{17}$$

حالت سیستم به مجرد اندازه گیری از تصویر حالت $|\psi\rangle$ روی ویژه حالت ها بدست می آید . پس:

$$|\xi\rangle = |b_2\rangle\langle b_2|\psi\rangle + |b_3\rangle\langle b_3|\psi\rangle = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 2i \end{pmatrix}$$

A را اندازه بگیریم .

پس احتمال اینکه مقدارصفر در اندازه گیری A بدست آید ، برابر است با :

$$P(b_1 = 0) = \frac{|\langle a_1|\xi\rangle|^2}{\langle\xi|\xi\rangle} = \frac{8}{9}$$

احتمال آنکه وقتی ابتدا B را اندازه میگیریم ،مقدار یک بدست آوریم و سپس در اندازه گیری A مقدار صفر بدست آوریم برابر است با :

$$P(b_2, a_1) = P(b_2)P(a_1) = \frac{9}{17}\frac{8}{9} = \frac{8}{17}$$

بله .این احتمال ها مساوی بدست آمده است . این ناشی از این است که ترتیب اندازه گیری ها مهم نیست . به عبارت دیگر وقتی دو مشاهده پذیر با همدیگر جابجا شوند در آزمایشگاه هم می توان آنها را جابجا کرد ! نشان دهید :

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

۳ - الف : اگر

$$|\psi'\rangle = \mathbb{U}|\psi\rangle \quad , \quad \mathbb{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle \quad , \quad \mathbb{A}'|\psi'\rangle = |\phi'\rangle$$

آنگاه :

$$\mathbb{A}'\mathbb{U}|\psi\rangle = \mathbb{U}|\phi\rangle \Longrightarrow \mathbb{U}^\dagger\mathbb{A}'\mathbb{U} = \mathbb{A}$$

$$\mathbb{A}' = \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger$$

ب :

$$\mathbb{A}'|\psi'_n\rangle = (\mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger)\mathbb{U}|\psi_n\rangle = \mathbb{U}\mathbb{A}|\psi_n\rangle = a_n\mathbb{U}|\psi_n\rangle = a_n|\psi'_n\rangle$$

برای نشان دادن ناوردایی جابجاگر دو عملگری که جابجاگر آنها متناسب با واحد است :

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \alpha\mathbb{I}$$

$$[\mathbb{A}', \mathbb{B}'] = [\mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger, \mathbb{U}\mathbb{B}\mathbb{U}^\dagger] = \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}\mathbb{B}\mathbb{U}^\dagger - \mathbb{U}\mathbb{B}\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger$$

$$= \mathbb{U}[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{U}^\dagger = \alpha\mathbb{I} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}]$$

پ : شرط آنکه تبدیل $\mathbb{U}$ یکانی باشد ، آنست که :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{I}$$

پس :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = (\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{G})(\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{G})^\dagger = (\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{G})(\mathbb{I} - i\epsilon\mathbb{G}^\dagger) = \mathbb{I}$$

با صرف نظر از جمله ی متناسب با ϵ^2 در رابطه ی بالا :

$$\mathbb{G}^\dagger = \mathbb{G}$$

یعنی $\mathbb{G}$باید یک اپراتور هرمیتی باشد .

ت : از قسمت قبل می دانیم که یک اپراتور چگونه تحت تبدیل یکانی ، تبدیل می شود :

$$\mathbb{A}' = \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger = (\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{G})\mathbb{A}(\mathbb{I} - i\epsilon\mathbb{G}^\dagger) = \mathbb{A} + i\epsilon[\mathbb{G}, \mathbb{A}] = \mathbb{A}$$

ث : تبدیل یکانی دلخواه را می توان با اعمال پشت سر هم تبدیلات بینهایت کوچک یکانی ساخت . اگر تبدیل بینهایت کوچک با پارامتر $\epsilon = \frac{a}{N}$ که در آن a یک عدد متناهی و N یک عدد طبیعی بزرگ است ، را در نظر بگیریم ، با اعمال N بار تبدیل بینهایت کوچک داریم :

$$\mathbb{U}(\mathbb{G}) = \lim_{N\to\infty} \Pi_{j=1}^{N} \left(1 + i\frac{a}{N}\mathbb{G}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + i\frac{a}{N}\mathbb{G}\right)^N = e^{ia\mathbb{G}}$$

ج : اپراتور ها تحت تبدیل یکانی به صورت زیر تبدیل می شوند :

$$\mathbb{A}' = \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger = e^{ia\mathbb{G}}\mathbb{A}e^{-ia\mathbb{G}}$$

با استفاده از اتحاد **Baker − Campbel − Hausdorff** می توان نوشت :

$$e^{ia\mathbb{G}}\mathbb{A}e^{-ia\mathbb{G}} = \mathbb{A} + ia[\mathbb{G}, \mathbb{A}] + \frac{(ia)^2}{2!}[\mathbb{G}, [\mathbb{G}, \mathbb{A}]] + ...$$

در صورتی که $[\mathbb{A}, \mathbb{G}] = 0$ باشد ، بقیه ی جملات همگی حذف می شوند و تنها جمله ی اول از مجموع بالا باقی می ماند :

$$e^{ia\mathbb{G}}\mathbb{A}e^{-ia\mathbb{G}} = \mathbb{A}$$

چ : ابتدا نشان می دهیم که اپراتور مشتق گیری ، یک اپراتور پاد هرمیتی روی فضای توابع است . برای این منظور رابطه ی بین عملگر و الحاقی آن به صورت زیر است :

$$\langle\phi|\mathbb{T}|\psi\rangle = \langle\psi|\mathbb{T}^\dagger|\phi\rangle$$

$$\langle\phi|\mathbb{T}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)d\psi = \phi(x)\psi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)d\phi$$

اما جمله ی میانی برای توابع در فضای برداری $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ صفر است . پس :

$$\langle\phi|\mathbb{T}|\psi\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)d\phi = -\langle\psi|\mathbb{T}|\phi\rangle = \langle\psi|\mathbb{T}^\dagger|\phi\rangle$$

پس:

$$\mathbb{T}^\dagger = -\mathbb{T} \Longrightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger = -\frac{d}{dx}$$

پس عملگر $e^{ad/dx}$ برای a حقیقی یک تبدیل یکانی است .

چون عملگر روی فضا ی توابع است ، عمل آنرا روی یک تابع حساب می‌کنیم :

$$e^{ad/dx}\psi(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\right)\psi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\frac{d^n\psi}{dx^n} = \psi(x+a)$$

توجه کنید مقدار مشتقات در نقطه ی x محاسبه می شوند .

پس اپراتور مشتق گیری $\mathbb{G} = -i\frac{d}{dx}$ اپراتور مولد انتقال در یک بعد است . عملگر اخیر همان عملگر تکانه در مکانیک کوانتومی است . پس تکانه مولد انتقال در مکان است . به عکس عملگر مکان X هم مولد انتقال در فضای تکانه است .

موفق باشید .