حل تمرین سری ششم مکانیک کوانتومی ۱

---

۱ – الف : معادله ی شرودینگر یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول نسبت به زمان است . اگر حالت اولیه ی سیستم در هر لحظه مشخص باشد ، در زمان های بعدی هم مشخص خواهد شد . هیچ عدم قطعیتی در تحول زمانی یک دستگاه کوانتومی وجود ندارد .عدم قطعیت فقط وقتی ظاهر می شود که یک کمیت فیزیکی اندازه گیری می شود . در این صورت در بردار حالت سیستم یک تغییر غیر قابل پیش بینی ایجاد می شود . اما بین دو اندازه گیری بردار حالت بطور یقینی طبق معادله ی شرودینگر تحول پیدا می کند .

ب : برای هامیلتونی مستقل از زمان که معلوم است عملگر تحول ، یکانی است پس اندازه را حفظ می کند . در حالت کلی :

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \left[\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right]|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\left[\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right]$$

اما :

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\mathbb{H}(t)|\psi(t)\rangle$$

با گرفتن صلیب از معادله ی شرودینگر بالا :

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)| = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\mathbb{H}(t)$$

با جایگزینی مشتقات زمانی بالا بدست می آید :

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\mathbb{H}(t)|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\mathbb{H}(t)|\psi(t)\rangle = 0$$

پ : با ضرب معادله ی شرودینگر در $\langle p|$ بدست می آوریم :

$$\langle p|\left(\frac{P^2}{2m} + V(X)\right)|\psi\rangle = i\hbar\langle p|\frac{d}{dt}|\psi\rangle$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) + V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})\psi(p) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(p)$$

۲ – معادله ی شرودینگر در پایه ی مکان عبارت است از :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \qquad (I)$$

با گرفتن صلیب از طرفین معادله بالا :

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^* \qquad (II)$$

با ضرب معادله ی اول در ψ^* و ضرب معادله ی دوم در ψ و جمع آنها بدست می آوریم :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\psi\psi^*] = -\frac{\hbar^2}{2m}[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*]$$

پس :

$$\nabla.\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right)$$

لذا :

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \frac{1}{m}Re\left(\psi^*(\frac{\hbar}{i}\nabla\psi)\right)$$

ب : جواب این قسمت در بند ج سوالات آمده است .

د : برای موج تخت تکفام :

$$\rho(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|^2 = |A|^2$$

در تمام فضا یکنواخت است و به زمان بستگی ندارد .

$$\mathbf{J} = |A|^2\frac{\hbar k}{m} = \rho(\mathbf{r},t)v_G$$

که در آن $\frac{\hbar k}{m}$ سرعت گروه وابسته به اندازه ی حرکت $\hbar k$ است .

۳ - ویژه مقادیر انرژی و ویژه حالت ها عبارت اند از :

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

الف : هر ویژه حالت با فرکانس متناظر با ویژه مقدار مربوطه تحول می یابد :

$$\psi(x,t) = c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

ب : ویژه حالت های انرژی در چاه پتانسیل جدید عبارت اند از :

$$\phi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{m\pi x}{b}$$

احتمال اینکه ذره ای که در چاه اول در حالت پایه قرار داشته ، در چاه جدید هم در حالت پایه باشد برابر است با :

$$P(m=1|n=1) = \langle\phi_1|\psi_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{ab}}\int_0^b \sin\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi x}{a}dx$$

ج : کافی است سری فوریه ی حالت اولیه را بنویسیم تا حالت اولیه را براساس توابع هارمونیک حالت پایه تجزیه کنیم . اما در اینجا نیازی به استفاده از تحلیل فوریه نیست . کافی است از اتحاد زیر استفاده کنیم .

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

$$\psi(x,0) = \frac{3}{4}\sin\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{a}$$

۴ - برای اثبات این گزاره ها می توانید به درسنامه مکانیک کوانتومی دکتر کریمی پور مراجعه کنید .

موفق باشید .