حل تمرین سری هفتم مکانیک کوانتومی ۱

---

۱ - چون پتانسیل تقارن دارد جواب ها را با پاریته ی مشخص در نظر می گیریم :
جواب های زوج :

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & a < x \\ B(e^{kx} + e^{-kx}) & -a < x < a \\ Ae^{kx} & x < -a \end{cases}$$

پیوستگی در $x = a$ نتیجه می دهد :

$$Ae^{-ka} = B(e^{ka} + e^{-ka}) \Longrightarrow A = B(1 + e^{2ka})$$

ناپیوستگی مشتق تابع موج به علت وجود ضربه در $x = a$ هم نتیجه می دهد :

$$A + B(e^{2ka} - 1) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} A$$

$$B(e^{2ka} - 1) = A(\frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} - 1) = B(1 + e^{2ka})(\frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} - 1)$$

$$e^{-2ka} = \frac{\hbar^2 k}{m\alpha}$$

اعداد موج مجاز ، جواب های معادله ی بالاست . برای حل از روش ترسیمی استفاده می کنیم با تعریف پارامتر های :

$$z = 2ka \quad , \quad c = \frac{\hbar^2}{2am\alpha}$$

معادله به صورت زیر در می آید :

$$e^{-z} = cz - 1$$

معادله ی بالا برای z های مثبت و c مثبت فقط و فقط یک جواب دارد . پس یک حالت مقید فرد داریم .
جواب های فرد :

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & a < x \\ B(e^{kx} - e^{-kx}) & -a < x < a \\ -Ae^{kx} & x < -a \end{cases}$$

پیوستگی در $x = a$:

$$A = B(e^{2ka} - 1)$$

ناپیوستگی مشتق تابع موج در $x = a$:

$$B(1+e^{2ka}) = A(\frac{2m\alpha}{\hbar^2 k} - 1)$$

ترکیب دو شرط نتیجه می دهد :

$$e^{-2ka} = 1 - \frac{\hbar^2 k}{m\alpha}$$

بر حسب پارامتر های تعریف شده در بالا :

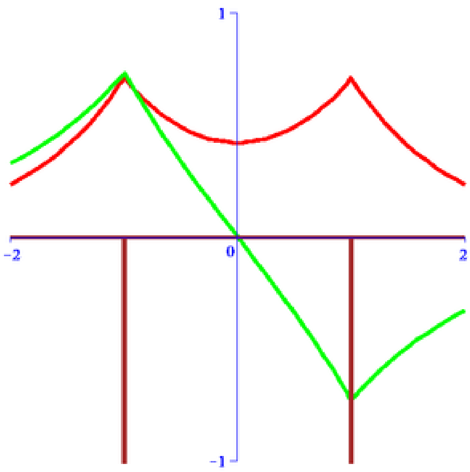
$$e^{-z} = 1 - cz$$

این معادله ممکن است اصلا جواب نداشته باشد ، یا اینکه حداکثر یک جواب داشته باشد . شرط داشتن جواب این است که شیب خط از شیب مماس بر e^{-z} در $z=0$ بیشتر باشد . پس شرط داشتن جواب در این حالت عبارت است از :

$$c < 1 \quad \Longrightarrow \alpha > \frac{\hbar^2}{2ma}$$

پس اگر $\alpha > \frac{\hbar^2}{2ma}$ باشد ، دو حالت مقید و اگر $\alpha < \frac{\hbar^2}{2ma}$ یک حالت مقید داریم .

جواب های فرد و زوج در شکل زیر نشان داده شده اند :



۲ – چون پتانسیل تقارن زوج دارد ، جواب ها را زوج و فرد در نظر می گیریم . برای جواب های زوج مساله :

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \quad , \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

شرایط مرزی در این حالت عبارت اند از :

۱)زوج بودن تابع موج :

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx = \psi(-x) = -A\sin kx + B\cos kx$$

۲)پیوستگی تابع موج در مبدا :

$$\psi(0^+) = \psi(0^-) \Longrightarrow B = B$$

۳) ناپیوستگی ناشی از ضربه در مبدا :برای محاسبه ی این ناپیوستگی روی بازه ای حول مبدا از معادله ی شرودینگر انتگرال می گیریم :

$$2Ak = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}B \Longrightarrow B = \frac{\hbar^2 k}{m\alpha}A$$

۴) صفر شدن تابع موج روی دیواره ها :

$$\psi(a) = 0 \Longrightarrow \sin ka + \frac{\hbar^2 k}{m\alpha}\cos ka = 0 \Longrightarrow \tan ka = -\frac{\hbar^2 k}{m\alpha}$$

مقدار k از حل معادله ی غیر جبری بالا بدست می آید . پس تابع موج برای حالت زوج به صورت زیر است :

$$\psi(x) = A\left[\sin kx + \frac{\hbar^2 k}{m\alpha}\cos kx\right] \quad 0 \leq x \leq a$$

جواب های فرد : در این حالت انتگرال گیری از معادله ی شرودینگر روی بازه ای کوچک حول مبدا نشان می دهد مشتق تابع موج در مبدا پیوسته است . پس در این حالت گویی ضربه در مبدا وجود ندارد . چون جواب های فرد در مبدا صفر می شوند وجود پتانسیل ضربه را احساس نمی کنند . پس جوابهای فرد همان جوابهای چاه نامتناهی است .

۳ - معادله ی شرودینگر برای این پتانسیل به صورت زیر است :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k|x|\psi(x) = E\psi(x)$$

چون پتانسیل تقارن دارد می توان جواب ها را به صورت زوج و فرد در نظر گرفت .اگر جواب انتخاب شده فرد باشد ، آنگاه :

$$\psi(-x) = -\psi(x)$$

در این صورت شرط مرزی روی تابع موج به صورت زیر است :

$$\psi(0) = 0$$

اگر جواب های زوج را در نظر بگیریم :

$$\frac{d\psi(x)}{dx}|_{x=0} = 0$$

اکنون معادله ی دیفرانسیل بالا را بر حسب متغیر های بدون بعد می نویسیم . اگر قرار دهیم :

$$x_0 = (\hbar^2/mk)^{1/3} \qquad E_0 = kx_0$$

و متغیر های بدون بعد را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$y = \frac{x}{x_0} \quad , \quad \epsilon = \frac{E}{E_0}$$

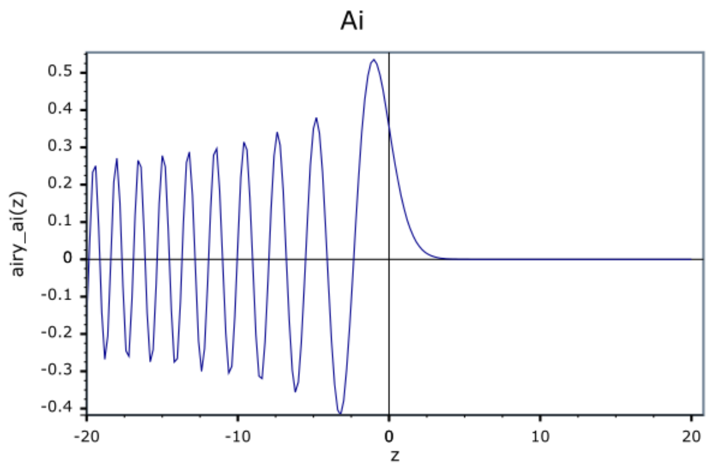
معادله را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - 2(y-\epsilon)\psi(y) = 0 \qquad y \geq 0$$

اگر این مساله به صورت کلاسیک بررسی شود ، یک نقطه ی بازگشتی در $x = E/k$ داریم و این به ازای $y = \epsilon$ بدست می آید . اگر تغییر متغیر $z = 2^{1/3}(y - \epsilon)$ را اعمال کنیم :

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - z\psi(z) = 0$$

این همان معادله ی آیری است .جواب این معادله به صورت زیر است :



همان طور که می بینید ، این توابع به ازای آرگومان منفی حالت نوسانی دارند و برای آرگومان مثبت حالت میرا به خود می گیرند .این مطابق انتظار کلاسیکی است . در حقیقت نقطه ی $z = 0$ نقطه ی بازگشت کلاسیکی مساله هست .

شرط مرزی در $x = 0$ موجب می شود برای جواب های فرد$Ai(z)$ صفر شود و برای جواب های زوج $Ai'(z)$ صفر شود . که $z = -2^{1/3}\epsilon$. به عبارت دیگر صفر های $Ai(z)$ و مشتق آن ویژه مقادیر انرژی را مشخص می کنند . با مراجعه به جدول توابع آیری :

$$Ai'(z) = 0 \Longrightarrow z = -1.019, \quad -3.249, \quad -4.820$$

$$Ai(z) = 0 \Longrightarrow z = -2.338, \quad -4.088, \quad -5.521$$

انرزی حالت پایه به ازای کمترین مقدار بالا بدست می آید . پس :

$$E_{GS} = \frac{1.019}{2^{1/3}} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m}\right)^{1/3}$$

۴ –برای نوسانگری که در محدوده ی $-a/2 < x < a/2$ نوسان می کند ،$\Delta x \approx a$ وطبق اصل عدم قطعیت تکانه ی کمینه ی این نوسانگر تقریبا $\hbar/2a$ است .انرژی کل به صورت تابعی از a عبارت است از :

$$E(a) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2a}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$$

برای کمینه کردن انرژی نسبت به a مشتق میگیریم :

$$\frac{dE}{da} = 0 \Longrightarrow a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$E(a_0) = \frac{\hbar\omega}{2}$$

این تخمینی از انرژی حالت پایه است . از قضا حل دقیق مساله هم منجر به همین جواب برای نوسانگر هماهنگ می شود .

۵ – پتانسیل نوسانگر هماهنگ دارای تقارن زوج است . پس می توان ویژه توابع را زوج و فرد گرفت . در حالت کلی به صورت زیر اند :

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

این ویژه توابع یک در میان زوج و فرد هستند .جواب های فرد در مبدا صفر می شوند . پس حل پتانسیل داده شده همین جواب های فرد مساله ی نوسانگر هماهنگ است . در این صورت همه ی شرایط مرزی هم ارضا می شوند .انرژی های این نوسانگر هم به صورت زیر اند :

$$E_n = \hbar\omega((2n+1) + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(2n + \frac{3}{2})$$

موفق باشید .