حل تمرین سری هشتم مکانیک کوانتومی ۱

---

۱ - پتانسیل برداری وابسته به میدان مغناطیسی داده شده عبارت است از :

$$\mathbb{A} = \frac{B}{2}(X\hat{y} - Y\hat{x})$$

لذا :

$$\Pi_x = P_x - \frac{eA_x}{c} = P_x + \frac{eB}{2c}Y \qquad , \qquad \Pi_y = P_y - \frac{eA_y}{c} = P_y + \frac{eB}{2c}X$$

$$[\Pi_x, \Pi_y] = \frac{eB}{2c}\left([P_x, -X] + [Y, P_y]\right) = i\hbar\frac{eB}{c}$$

هامیلتونی سیستم عبارت است از :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(P - \frac{e\mathbb{A}}{c}\right) = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + P_z^2\right) = \mathbf{H}_B + \frac{P_z^2}{2m}$$

عملگر های نردبانی را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$a = \sqrt{\frac{c}{2\hbar eB}}(\Pi_x + i\Pi_y) \quad , \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{c}{2\hbar eB}}(\Pi_x - i\Pi_y)$$

$$a^\dagger a = \frac{c}{2\hbar eB}(\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + i[\Pi_x, \Pi_y]) = \frac{mc}{\hbar eB}\mathbf{H}_0 - \frac{1}{2}$$

پس :

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar eB}{mc}(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

مساله هامیلتونی $\mathbf{H}_B$ مثل مساله ی نوسانگر هماهنگ است . چون این هامیلتونی با P_z جابجا می شود ، می توان P_z و $\mathbf{H}_B$ را همزمان قطری کرد . در ویژه پایه ی مشترک ، انرژی ها به صورت زیر اند . :

$$E_{n,k} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{|eB|\hbar}{mc}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

۲ - چون رد یک عملگر تحت تغییر پایه ناورداست ، می توان آن را در هر پایه ای برای فضای هیلبرت محاسبه کرد . پایه ای که برای محاسبه انتخاب می کنیم ، همان ویژه حالت های انرژی نوسانگر هماهنگ است .

$$\text{tr}(\mathbb{U}) = \text{tr}(e^{\frac{-i\mathbb{H}t}{\hbar}}) = \sum_n \langle n|e^{\frac{-i\mathbb{H}t}{\hbar}}|n\rangle$$

۲ – الف : برای نوسانگر هماهنگ داریم :

$$\mathbb{H} = \hbar\omega(\mathbb{N} + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

پس :

$$\text{tr}(\mathbb{U}) = \sum_n \langle n|e^{-i\omega t(a^\dagger a + \frac{1}{2})}|n\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n \langle n|e^{-i\omega t a^\dagger a}|n\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n e^{-i\omega t n}\langle n|n\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n e^{-i\omega t n} = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \frac{1}{1 - e^{-i\omega t}}$$

همگرایی سری بالارا بررسی کنید .

ب : از اتحاد هاوسدورف داریم :

$$\exp(\alpha\mathrm{a} + \beta\mathrm{a}^\dagger) = \exp\beta\mathrm{a}^\dagger \exp\alpha\mathrm{a} \exp(-\frac{1}{2}[\beta\mathrm{a}^\dagger, \alpha\mathrm{a}]) = \exp\beta\mathrm{a}^\dagger \exp\alpha\mathrm{a} \exp(\frac{1}{2}\alpha\beta)$$

$$\langle 0|\exp(\alpha\mathrm{a}+\beta\mathrm{a}^\dagger)|0\rangle = \exp(\frac{1}{2}\alpha\beta)\langle 0|e^{\beta\mathrm{a}^\dagger} e^{\alpha\mathrm{a}}|0\rangle = \exp(\frac{1}{2}\alpha\beta)\langle 0|e^{\beta\mathrm{a}^\dagger}|0\rangle = \exp(\frac{1}{2}\alpha\beta)\langle 0|0\rangle = \exp(\frac{1}{2}\alpha\beta)$$

موفق باشید .