حل کوییز اول مکانیک کوانتومی (گروه۱)

---

۱ – مساله ی اول :

فرض کنید ضریب شکست در کل فضا به صورت $n(y) = e^y$ تغییر کند . با استفاده از اصل فرما ، مسیر حرکت نور بین دو نقطه ی $A = (1,1)$ و $B = (-1,1)$ را را بدست آورید .

حل :

$$v = \frac{ds}{dt} \Longrightarrow t = \int \frac{ds}{v(y)} = \frac{1}{c_0}\int e^y\sqrt{1+y'^2}$$

که c_0 سرعت نور در خلاء است . از معادله ی اولر – لاگرانژ داریم :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = e^y\sqrt{1+y'^2} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = e^y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

پس :

$$y'' = 1 + y'^2$$

$$u = y' \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Longrightarrow \frac{du}{1+u^2} = dx$$

$$x + c = \tan^{-1} u \Longrightarrow u = \tan(x+c)$$

چون مسیر تقارن زوج دارد ، مماس بر مسیر روی محور قائم باید افقی باشد . این لازم می دارد که

$$c = 0$$

باشد . با یکبار انتگرال گیری از معادله ی اخیر داریم :

$$y = \ln(\sec(x)) + c'$$

ثابت انتگرال گیری از نقاط داده شده پیدا می شود :

$$1 = \ln(\sec(1)) + c' \Longrightarrow c' = 1 - \ln(\sec(1))$$

$$y = \ln(\frac{\sec x}{\sec 1}) + 1$$

سوال دوم : ویژه مقادیر و ویژه بردار های اپراتور زیر را با شرط مرزی نوسانی درکرانه ها روی ویژه بردار ها بدست آورید .

$$\mathbb{A} = -i\nabla$$

حل : معادله ی ویژه مقدار به صورت زیر است :

$$-i\nabla\psi = \mathbf{k}\psi$$

که در این مساله به دلیل ماهیت برداری اپراتور ، ویژه مقادیر آن هم یک بردار سه بعدی است .

یک راه حل ساده این است که دقت کنیم برای امواج تخت با بردار موج $\mathbf{k}$ اپراتور ∇ معادل است بابردار$i\mathbf{k}$.این دقیقا به این معناست که امواج تخت ویژه بردار های اپراتور داده شده هستند .

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}$$

اما روش کلی حل مساله چنین است :

از جداسازی متغیر ها به صورت زیر استفاده می کنیم :

$$-i\nabla\psi = \mathbf{k}\psi \quad \mathbf{St}: \psi(r) = X(x)Y(y)Z(z)$$

پس از تفکیک به سه معادله ی اسکالر زیر می رسیم :

$$-i\frac{d}{dx}X = k_x x \quad , \quad -i\frac{d}{dy}Y = k_y y \quad , \quad -i\frac{d}{dz}Z = k_z z$$

جواب این معادلات دیفرانسیل را به سادگی می توان پیدا کرد . آنها عبارت اند از :

$$X(x) = e^{ik_x x} \quad , \quad Y(y) = e^{ik_y y} \quad , \quad Z(z) = e^{ik_z z}$$

پس ویژه تابع مساله پیدا شده است :

$$\psi(r) = X(x)Y(y)Z(z) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}$$

ویژه مقدار برداری هم ، همان بردار $\mathbf{k}$ است .

اگر ویژه توابع بخواهند درکرانه ها (نقاط دور دست) رفتار نوسانی در تمام جهات داشته با شند، باید ویژه مقادیر را محدود به مقادیر حقیقی کنیم . به عبارت دیگر با شرط مرزی داده شده ویژه مقادیر حقیقی اند نه اینکه ما خود آنها را محدود کنیم .

موفق باشید .