تعیین مدول کشسانی با اندازه‌گیری خمش

رفتار یک قطعه در برابر نیروهای وارد بر آن به خواص مکانیکی قطعه بستگی دارد. خواص مکانیکی شامل سختی، استحکام، مدول کشسانی، رفتار خستگی و ... هستند. این خواص پیش از آنکه یک قطعه مورد استفاده قرار گیرد، باید به طور کامل بررسی شوند. اگر قطعه‌ای در جایی بکار رود که تحت تأثیر نیروهای مکانیکی باشد، باید پس از بررسی خواص مکانیکی قطعه از طریق انجام آزمایش‌های مربوطه و بدست آمدن نتایج، مناسب بودن قطعه برای کاربرد مورد نظر تأیید گردد. چنانچه خواص مکانیکی قطعه‌ای با شکل و ترکیب مشخص مطابق با مقادیر مطلوب نباشد، به کمک تغییر در ترکیب ماده و به روشهای مختلفی مانند مکانیزم‌های استحکام‌دهی می‌توان به مقدار مطلوب دست پیدا کرد.

مدل و نظریه

کشسانی یا الاستیسیته [۱] خاصیت تغییر شکل بازگشت پذیر محیط و مواد است. خاصیت کشسانی محیط باعث می‌شود که هر جزئی از محیط که از وضعیت تعادلش جابجا شده باشد، بر اثر نیروهای بازگرداننده به وضعیت اولیه خود باز گردد. برای بررسی خاصیت کشسانی دو کمیت تنش [۲] وکرنش [۳] را تعریف می‌کنیم. کمیت تنش اولین بار توسط کوشی در حدود سال ۱۸۲۲ در نظریه کشسانی معرفی شد. در یک جسم جامد (برای مثال: ریسمان، میله یا تیر) سطحی فرضی در نظر می‌گیریم که جسم را قطع کند بنابر قانون سوم نیوتن یک طرف این سطح نیرویی بر طر دیگر وارد خواهد کرد و به عکس. این نیروهای داخلی که بر هر سطحی درون جسم جامد وارد می‌شوند را بر مساحت سطح تقسیم می‌کنند و نیروی وارد بر واحد سطح را تنش می‌نامند. بر اثر اعمال نیرو ابعاد جسم تغییر می‌کند، تغییر در طول جسم جامد در هر جهت نسبت به طول اولیه آن جسم در همان جهت کرنش نامیده می‌شود. اگر میله‌ای به طول l و سطح مقطع A به وسیله نیروی F در راستای طول آن کشیده شود و طول میله به اندازه Δl افزایش پیدا کند بنا بر تعریف تنش و کرنش عبارتند از:

$$\tau = \frac{F}{A} \qquad (۱)$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad (۲)$$

[۱] Elasticity

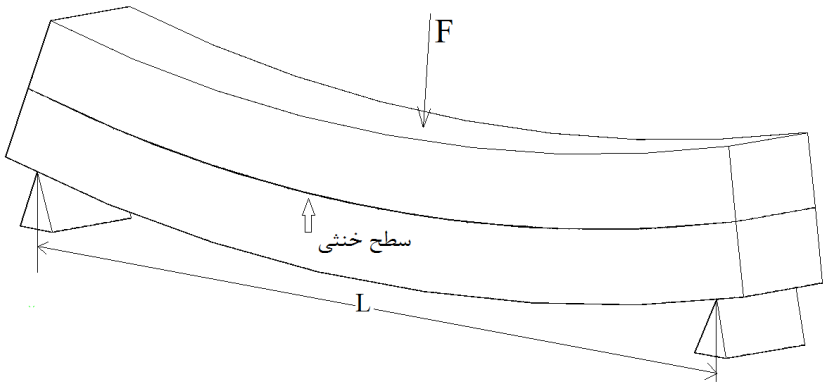
[۲] Stress

[۳] Strain

بنابر آزمایش اگر تغییر طول نسبی (کرنش) بیش از اندازه بزرگ نباشد، تنش وارد شده بر جسم متناسب با کرنش خواهد بود. این قانون هوک [۴] است، بنابراین اگر قانو ن هوک برقرار باشد نسبت تنش به کرنش برای هر ماده ثابت است و در حالتی که جسم در یک جهت کشیده شده باشد این نسبت را مدول کشسانی یا مدول یانگ [۵] می‌نامند وعبارت است از:

$$E = \frac{\tau}{\epsilon} = \frac{Fl}{A\Delta l} \qquad (۳)$$

واحد مدول کشسانی در دستگاه SI نیوتن بر متر مربع (پاسکال) است. تغییر شکل یک سازه بر اثر نیروهای خارجی در راستای عمود بر محور طولی سازه با معرفی کمیت خمش بررسی می‌شود. برای یک میله افقی با اندازه‌گیری خمش و نیروهای خارجی و مشخص بودن ابعاد هندسی میله می‌توان مدول یانگ را به دست آورد. فرض کنیم میله افقی به طول l، عرض a و ضخامت b تحت تأثیر نیروی قائم F در مرکز میله، خمیده شود برای سادگی فرض می‌کنیم که میله تحت تأثیر هیچ‌گونه کشش یا فشار در راستای طول میله (راستای افق) نیست و نیرو در راستای قائم طوری اعمال می‌شود که میله در یک صفحه قائم حول محور میله خمیده شود.



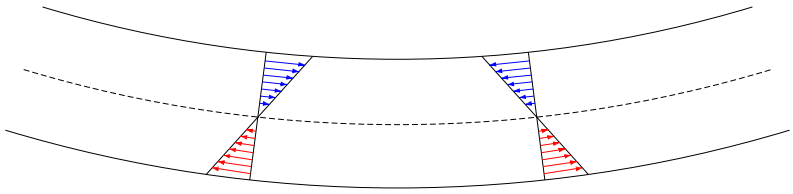
شکل ۱: میله افقی که تحت تأثیر نیروی قائم F در مرکز میله، خم شده‌است

بر اثر خمش سطح بالایی میله فشرده و سطح پایینی آن کشیده می‌شود در داخل میله سطحی وجود دارد که تغییر شکل نمی‌دهد (فشرده و یا کشیده نمی‌شود) و سطح خنثی [۶] نامیده می‌شود (شکل ۱) . بر اثر خمش به هر سطح مقطع میله نیروهای داخلی الاستیک وارد می‌شود (شکل ۲) جهت نیروها بستگی به این دارد که سطح موازی با سطح خنثی کشیده یا فشرده شده باشد واندازه نیرو هم با دورشدن از سطح خنثی افزایش می‌یابد.

[۴] Hook

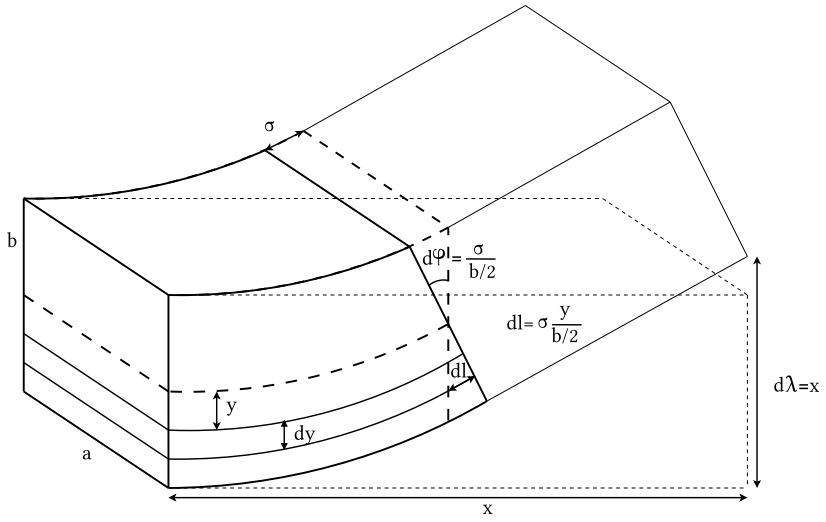
[۵] Young

[۶] Neutral surface



شکل ۲: نمایش نیروهای وارد بر یک سطح در میله خم شده

برای به دست آوردن رابطه بین خمش، مدول الاستیسیته و ابعاد هندسی میله جزء کوچکی از میله با حجم dV در نظر می‌گیریم (شکل ۳) که خطوط نقطه چین میله را قبل از خمش نشان می‌دهد.



شکل ۳: جزء کوچکی از میله خم شده

با استفاده از نمادهای معرفی شده در شکل ۳ حجم dV و خمش ناشی از آن برابرند با:

$$dV = dx.a.b \quad (۴)$$

$$d\lambda = x.d\phi = \frac{۲\sigma x}{b} \quad (۵)$$

جزء طولی dx بر اثر نیروی کشسانی dF_x به اندازه dl افزایش می‌یابد، با استفاده از رابطه بین تنش و کرنش می‌توان

نوشت:

$$\frac{dF_x}{ds} = E\frac{dl}{dx} \qquad (۶)$$

که با استفاده از نمادهای معرفی شده در شکل ۳ سطح ds و افزایش طول dl برابرند با:

$$ds = a.dy \qquad (۷)$$

$$dl = \frac{۲\sigma y}{b} \qquad (۸)$$

بنابراین نیروی کشسانی dF_x برابراست با:

$$dF_x = \frac{۲Ea\sigma}{b.dx} y dy \qquad (۹)$$

و گشتاور نیروی حاصل از آن برابر است با:

$$dT_z = y dF_x = \frac{۲Ea\sigma}{b.dx} y^۲ dy \qquad (۱۰)$$

پس از جمع زدن روی متغیر y گشتاور نیروی حاصل را برابر با گشتاور نیروی خارجی قرار می‌دهیم:

$$\frac{Eab^۲\sigma}{۶dx} = \frac{F}{۲}.x \qquad (۱۱)$$

از این رابطه می‌توان σ رابه دست آورد و با استفاده از آن رابطه زیر برای خمش به دست می‌آید:

$$d\lambda = \frac{۶Fx^۲}{Eab^۳} dx \qquad (۱۲)$$

و خمش کل برابر است با:

$$\lambda = \frac{۱}{۴}\left(\frac{L}{b}\right)^۳ . \frac{۱}{a} . \frac{F}{E} \qquad (۱۳)$$

وسایل آزمایش

پایه مثلثی شکل (۲ عدد)، میله به طول ۲۵ سانتی‌متر (۲ عدد)، میله به طول ۶۳ سانتی‌متر، گیره نود درجه (۵ عدد)، صفحه مدرج برای اندازه‌گیری خمش، نگهدارنده برای صفحه مدرج، میله‌هایی با ابعاد هندسی متفاوت و یا جنس مختلف، تیغه برای قرارگرفتن میله روی آن (دو عدد)، تیغه در تماس با صفحه مدرج برای وارد کردن نیرو به میله (با آویزان کردن وزنه)، وزنه‌های شیاردار، نیروسنج، متر.

صفحه مدرج برای اندازه‌گیری خمش: نیروی بازگرداننده صفحه مدرج براساس قانون هوک است یعنی متناسب با فاصله است، علاوه بر آن نیروی اصطکاک نیز وجود دارد و نیروی برآیند جمع برداری این دو نیرو است

$$F_r = F_h + F_f \qquad (۱۴)$$

که F_r نیروی برآیند، F_h نیروی بازگرداننده و F_f نیروی اصطکاک است. نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت است بنابراین در وضعی که پیستون کاملاً فشرده شده است و شروع به پایین آمدن می‌کند نیروی اصطکاک و نیروی بازگرداننده در خلاف جهت یکدیگر هستند و نیروی برآیند برابر است با:

$$F_r = F_f - F_h \qquad (۱۵)$$

برای اندازه‌گیری خمش، در زمان صفر بودن نیروی خارجی (هیچ وزنه‌ای قرار داده نشده است) پیستون کاملاً فشرده است با قرار دادن وزنه پیستون شروع به پایین آمدن می‌کند ونیروی مؤثر برابر است با مجموع نیروی وزنه‌ها و نیروی برآیند صفحه مدرج، بنابراین باید قبل از اندازه‌گیری خمش، منحنی مشخصه صفحه مدرج را رسم کرد یعنی نیروی برآیند بازای هر عددی که صفحه مدرج نشان می‌دهد مشخص باشد.

شکل ۴: صفحه مدرج برای اندازه‌گیری خمش

روش آزمایش

رسم منحنی مشخصه صفحه مدرج

- مطابق شکل ۵ نیروسنج را با نخ به صفحه مدرج وصل کنید. سپس با کشیدن نیرو سنج پیستون فشرده شود، باکاهش نیروی کشش بازای هر نیرو عدد صفحه مدرج را در جدول ۱ یادداشت کنید.
- با روش کمترین مربعات منحنی نمایش تغییرات نیروی برآیند بر حسب عددهای صفحه مدرج را رسم کنید

شکل ۵: آزمایش رسم منحنی مشخصه صفحه مدرج

$F_r(N)$							
$S(mm)$							

جدول ۱: آزمایش رسم منحنی مشخصه صفحه مدرج

خمش میله تابعی از نیرو

- مطابق شکل ۶ وسایل آزمایش را قرار دهید. از میله فولادی به طول نیم متر، پهنای ده میلیمتر و ضخامت یک‌ونیم میلیمتر استفاده کنید. میله را روی دو تیغه قرار دهید، L فاصله بین دوتیغه است. تیغه در تماس با صفحه مدرج باید به گونه صحیحی قرار داده شود تا با اضافه کردن وزنه کج نایستد، یعنی تا انتها جلو برده نشود و نوک پیستون صفحه مدرج دقیقا وسط تیغه قرار گیرد.
- پیستون صفحه مدرج را بالا بکشید طوری که در تماس نزدیک با میله باشد ولی نیرویی به میله وارد نکند در این وضعیت عدد صفحه مدرج را یادداشت کنید $(S_\circ)$.
- برای وزنه‌های درج شده در جدول اعداد صفحه مدرج (S) را یادداشت کنید و λ را حساب کنید.
- برای محاسبه نیرو دقت کنید که نیروی مؤثر برابر است با مجموع نیروی وزنه‌ها و نیروی برآیند صفحه مدرج، بنابراین باید نیروی برآیند صفحه مدرج را از منحنی مشخصه آن تعیین کنید.

- بااستفاده از روش کمترین مربعات منحنی نمایش تغییرات خمش بر حسب نیروی مؤثر را رسم کنید.
- با استفاده از شیب خط و ابعاد هندسی میله مدول کشسانی آن را حساب کنید.

شکل ۶: آزمایش اندازه‌گیری خمش

$L =$ $cm,$ $a =$ ۱۰ $mm,$ $b =$ ۱/۵ $mm,$ $S_۰ =$ mm						
$m(gr)$	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۵۰
$S(mm)$						
$\lambda = S - S_۰$						
$F_{effect}(N)$						

جدول ۲: تغییرات خمش بر حسب نیروی مؤثر برای میله فولادی

خمش میله تابعی از پهنای میله

- آزمایش را برای میله‌های فولادی با ضخامت ثابت و پهناهای درج شده در جدول تکرار کنید، دقت کنید که نیروی مؤثر تقریباً ثابت باشد.
- بااستفاده از روش کمترین مربعات منحنی نمایش تغییرات خمش بر حسب پهنای میله را رسم کنید.
- با استفاده از شیب خط، نیروی مؤثر و ابعاد هندسی میله مدول کشسانی آن را حساب کنید

$L =$ $cm,$ $b = ۱/۵\ mm,$ $m = ۱۵۰\ gr$			
$a(mm)$	۱۰	۱۵	۲۰
$S_۰(mm)$			
$S(mm)$			
$\lambda = S - S_۰$			
$F_{effect}(N)$			

جدول ۳: تغییرات خمش بر حسب پهنای میله

خمش میله تابعی از ضخامت میله

- آزمایش را برای میله‌های فولادی با پهنای ثابت و ضخامتهای درج شده در جدول تکرار کنید، دقت کنید که نیروی مؤثر تقریباً ثابت باشد.
- بااستفاده از روش کمترین مربعات منحنی نمایش تغییرات خمش بر حسب ضخامت میله را رسم کنید.
- با استفاده از شیب خط، نیروی مؤثر و ابعاد هندسی میله مدول کشسانی آن را حساب کنید

$L =$ $cm,$ $a = ۱۰\ mm,$ $m = ۱۵۰\ gr$			
$b(mm)$	۱/۵	۲	۳
$S_۰(mm)$			
$S(mm)$			
$\lambda = S - S_۰$			
$F_{effect}(N)$			

جدول ۴: تغییرات خمش بر حسب ضخامت میله

خمش میله تابعی از طول میله

- با تغییر فاصله بین دو تکیه‌گاه آزمایش را برای میله‌ای فولادی با پهنای ده میلیمتر و ضخامت یک‌ونیم میلیمتر در طولهای مختلف تکرار کنید، دقت کنید که نیروی مؤثر تقریباً ثابت باشد.

- بااستفاده از روش کمترین مربعات منحنی نمایش تغییرات خمش بر حسب طول میله را رسم کنید.
- با استفاده از شیب خط، نیروی مؤثر و ابعاد هندسی میله مدول کشسانی آن را حساب کنید

$a = ۱۰\,mm, \quad b = ۱/۵\,mm, \quad m = ۲۵۰\,gr$			
$L(cm)$			
$S_۰(mm)$			
$S(mm)$			
$\lambda = S - S_۰$			
$F_{effect}(N)$			

جدول ۵: تغییرات خمش بر حسب طول میله

خمش میله تابعی از جنس میله

- آزمایش را برای میله‌هایی از جنس برنج و آلومینیم تکرار کنید و مدول کشسانی آنها را تعیین کنید.

$L = \quad cm, \quad a = ۱۰\,mm, \quad b = ۲\,mm, \quad S_۰ = \quad mm$						
$m(gr)$	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۵۰
$S(mm)$						
$\lambda = S - S_۰$						
$F_{effect}(N)$						

جدول ۶: تغییرات خمش بر حسب نیروی مؤثر برای میله آلومینیم

$L =$ $cm,$ $a = ۱۰\, mm,$ $b = ۲\, mm,$ $S_۰ =$ mm						
$m(gr)$	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۵۰
$S(mm)$						
$\lambda = S - S_۰$						
$F_{effect}(N)$						

جدول ۷: تغییرات خمش بر حسب نیروی مؤثر برای میله برنج