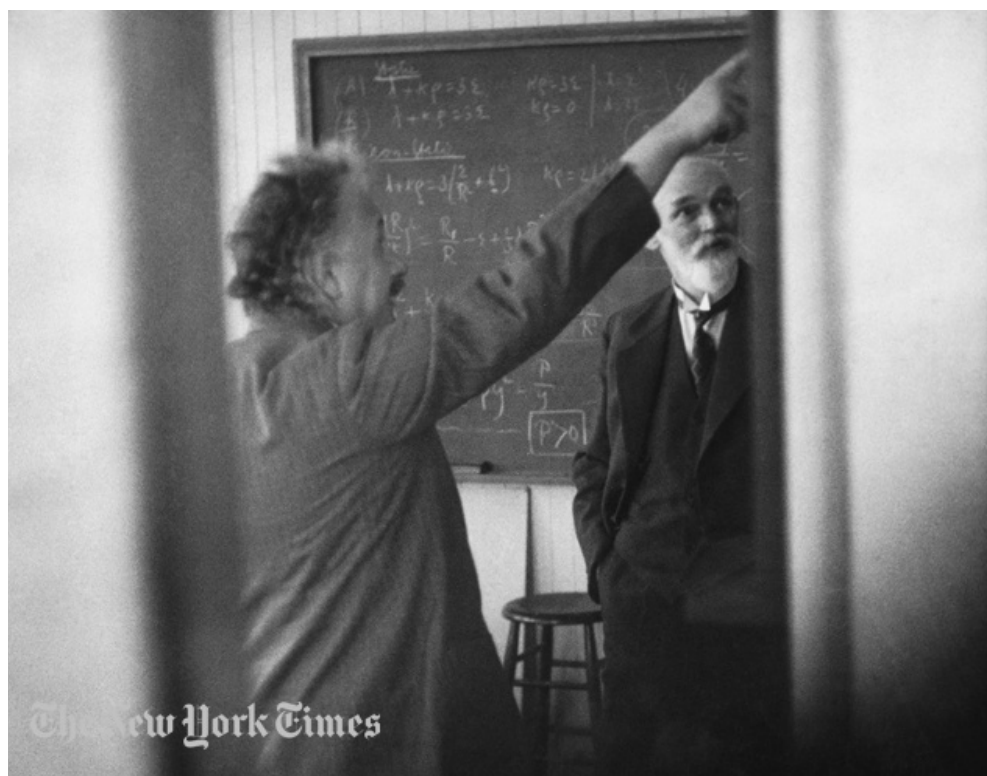


نسبیت خاص

شهرام خسروی، رضا منصوری



شکل ۱.۰: اینشتین در حال توضیح یک مسئله برای ویلم دوستیته فیزیکدان هلندی، ۱۹۳۲

فهرست مندرجات

۹	مقدمه	۱
۱۱	نقش پوانکاره و لورنتز در ابداع نسبیت	۱.۱
۱۹	سینماتیک	۲
۱۹	ناظر، چارچوب مرجع و مدل سازی	۱.۲
۲۲	تبدیل کلاسیک، تبدیل نسبیتی	۲.۲
۲۲	تبدیل گالیه	۱.۲.۲
۲۶	تبدیل لورنتز	۲.۲.۲
۳۰	بعضی نتایج تبدیل لورنتز	۳.۲
۳۰	اتساع زمان	۱.۳.۲
۳۳	انقباض طول	۲.۳.۲
۳۶	بازه های فضازمانی	۴.۲
۳۶	طول ناوردای لورنتزی	۱.۴.۲
۳۷	ویژه زمان	۲.۴.۲
۳۸	بازه های فضازمانی	۳.۴.۲
۴۱	نمودارهای فضازمانی	۵.۲
۴۶	همزمانی	۶.۲
۴۶	همزمان کردن ساعتها	۱.۶.۲
۴۸	نسبیت همزمانی	۲.۶.۲
۴۹	قرارداد همزمانی	۳.۶.۲

۵۱	تبدیل سرعت و شتاب	۷.۲
۵۴	باطل‌نماهای نسبیت	۸.۲
۵۴	باطل‌نمای دوقلو	۱.۸.۲
۵۵	باطل‌نمای انقباض طول	۲.۸.۲
۵۷	باطل‌نمای میله و گاراژ	۳.۸.۲
۶۵	فضازمان نسبی	۳
۶۵	خواص هندسی فضای سه بعدی	۱.۳
۶۷	چاربردار	۲.۳
۶۸	ضرب داخلی چاربردارها و متریک مینکوفسکی	۱.۲.۳
۶۹	مؤلفه‌های پادوردا و هموردای چاربردارها	۲.۲.۳
۷۰	ضرب تانسوری چاربردارها	۳.۲.۳
۷۰	فضای مینکوفسکی	۳.۳
۷۱	میدان‌های تانسوری	۴.۳
۷۱	مشتق میدان‌های تانسوری	۱.۴.۳
۷۲	انتگرال میدان‌های تانسوری	۲.۴.۳
۷۹	دینامیک	۴
۷۹	سرعت، تکانه، و شتاب	۱.۴
۸۴	فرایندهای فوتونی	۲.۴
۸۴	اثر دوپلر و ابیراهی نور	۱.۲.۴
۸۷	اثر کامپتون	۲.۲.۴
۸۸	برخورد ذره‌ها و قانون پایستگی	۳.۴
۹۱	مثال‌هایی از برخورد	۴.۴
۹۱	پراکندگی پروتون-پروتون	۱.۴.۴
۹۲	نابودی زوج	۲.۴.۴
۹۲	واپاشی	۳.۴.۴
۹۳	چارچوب مرکز تکانه	۵.۴

۹۴	بیلیارد نسبیتی	۶.۴
۹۵	انرژی آستانه	۷.۴
۹۶	مکانیک به زبان لاگرانژ در مقابل زبان نیوتون	۸.۴
۹۹	تمرین	۹.۴

۵ الکترومغناطیس

۱۰۵	الکترومغناطیس	۱.۵
۱۰۵	شکل هموردای الکترومغناطیس	۱.۱.۵
۱۰۹	تبدیل میدان‌ها	۲.۵
۱۱۰	تانسور انرژی-تکانه میدان	۳.۵
۱۱۲	تمرین	۴.۵

۶ گروه لورنتز

۱۱۵	گروه دوران در سه بعد	۱.۶
۱۱۸	گروه لورنتز	۲.۶
۱۲۰	تقدیم توماس	۳.۶

۷ مباحث ویژه در نسبیت

۱۲۳	آزمون نسبیت	۱.۷
۱۳۰	مرور آزمون‌های نسبیت خاص	۲.۷
۱۳۱	آزمون‌های کشف اثر	۱.۲.۷
۱۳۳	آزمون اثراتساع زمان	۲.۲.۷
۱۳۴	کاربردها	۳.۷
۱۳۴	سیستم مکان یابی جهانی (GPS)	۱.۳.۷

۱۳۵ شتابگر ذرات	۲.۳.۷	
۱۳۹ حرکت سریع‌تر از نور	۳.۳.۷	
۱۴۱ تاکیون‌ها	۴.۳.۷	
۱۴۵			A نمونه سؤال‌های امتحان نسبت خاص
۱۵۹			B یکاها و ثابتهای فیزیکی
۱۶۱			C پیشوند واحدهای متریک و حروف الفبای یونانی
۱۶۳			D مراجع

پیشگفتار

نسبیت خاص بحث سهل و ممتنعی است. ریاضیات آن اگر از محاسبات تانسوری و نظریه گروه لورنتز و پوانکاره صرف نظر کنیم، در حدّ سالهای اول دبیرستان است. از واژه‌های قدیم نیوتونی مانند زمان، مکان، دستگاه لخت، سرعت، و شتاب استفاده می‌کند. پیچیدگی هنگامی وارد می‌شود که از فضا و زمان خواص همگنی و همسانگردی انتزاع می‌شود و در پی آن تبدیل لورنتز به دست می‌آید که با شهود متعارف ما در تعارض است. نسبیت خاص مثالی نوعی از مدل‌سازی در طبیعت است که به روشنی روش مدل‌سازی فیزیکدانها را نشان می‌دهد؛ واژه‌های متعارف، انتزاع بدیهی از طبیعت، ابزار ریاضی، و سپس نتایج نامتعارف، پادشهودانه، اما سازگار با طبیعت! از این جهت تدریس مناسب و به جای این مبحث به رشد فرهنگ علمی میان دانشجویان ما کمک شایانی می‌کند که باید از آن بهره جست.

در سالهای اخیر کتابهای زیادی در جهان در زمینه نسبیت نوشته شده است. گرچه هر یک حسنهایی دارد، به نظر ما هیچیک جوابگوی نیاز دانشجویان نیست، از نکته پیش گفته به خوبی استفاده نشده است، جایگاه نسبیت خاص نه در تاریخ فیزیک، و نه در خود علم فیزیک به خوبی مشخص نشده است، و به اتصال میان این نظریه و فیزیک روز یا فیزیک آینده و خصوصاً دامنه اعتبار نسبیت خاص توجهی نشده است.

در این کتاب ما سعی کرده‌ایم به چند جنبه اساسی توجه داشته باشیم:

(۱) اهمیت تاریخی نسبیت در مفهوم‌سازی و مدل‌سازی در فیزیک، بدون ورود بیش از حد به تاریخ نسبیت.

(۲) درک مفهومی نسبیت خاص.

(۳) ابزار ریاضی لازم برای ورود به مباحث پیشرفته‌تر نظری.

(۴) کاربرد روز نسبیت و پرهیز از جنبه‌هایی که صرفاً از نوع تجربه ذهنی است.

از این جهت شاید، برخلاف کتابهای درسی دیگر، به نظر بیاید که تعداد مثالها یا حجم توضیحات در بعضی جاها کافی نیست. با توجه به جنبه‌های پیش گفته، قسمتی از کار فهم مطلب در این جاها را به عهده خواننده باهوش خود گذاشته‌ایم!

متن کتاب مبتنی بر جزوه درسی یکی از ما (ر.م.) که چندین سال در دانشگاه صنعتی شریف تدریس می‌شد تهیه شده است. در تبدیل این جزوه به کتاب تغییراتی در آن اعمال شده است. مهمتر از همه این که بخشهایی به نام حاشیه و به شکل جدا از متن، اضافه شده‌اند. در این حاشیه‌ها مسائل مختلفی از حواشی نسبیت خاص شامل موضوعات تاریخی، کاربردها، مثالها، و چالشهای سؤال برانگیز مطرح شده‌اند. علاوه بر این یک فصل به نام موضوعات ویژه در پایان کتاب آورده‌ایم که حاوی مباحث خاصی است که یا جدید هستند و یا در کتابهای دیگر به طور مستقل به آنها پرداخته نمی‌شود.

جاهایی که به نظر می‌رسیده اثبات یک گزاره به فهم بیشتریک مطلب کمک می‌کند، این کار را بر عهده خواننده گذاشته‌ایم و در متن کتاب کلمه تمرین را در داخل پرانتز آورده‌ایم. سعی شده است که تمرینهای آخر فصول مجموعه‌ای مفید برای کمک به درک موضوع باشند. اما بعضی از فصلها یا اصلاً تمرین ندارند یا تعداد خیلی کمی دارند. اینها مباحثی هستند از کاربردهای نسبیت و

مرتبط با بخشهای دیگر فیزیک که کمابیش از حوزه نسبیت خارج می‌شوند. تمرینهای بیشتر مربوط به این بخشها را می‌توانید در کتابهای خاص هر موضوع پیدا کنید. همچنین در انتهای هر فصل تعدادی مقاله و در پایان کتاب چند وب‌گاه و کتاب به عنوان مرجع برای مطالعه بیشتر معرفی شده است. مقالات، بیشتر از وب‌گاه <http://arxiv.org> که عملاً جامع‌ترین آرشیو مقالات فیزیک نظری در پانزده سال گذشته است، انتخاب شده است. مجموعه‌ی مراجع ذکر شده گرچه کامل نیست، ولی به درد بخور هست. در یکی از پیوستهای پایانی هم تعدادی از سؤلهای امتحانی میان ترم و پایان ترم آورده شده که احتمالاً علاوه بر اینکه برای استادان مفید است به درد دانشجویان هم می‌خورد!

تبدیل جزوه به کتاب کار ساده‌ای نبوده است. دانشجویان دانشگاه شریف و تربیت معلم در تصحیح و تکمیل این متن نقش بارزی داشته‌اند. اگر همکاری صمیمانه‌ی دو دانشجوی ما، خانمها هانیه محمودیان و زکیه ایزدی نبود، کار تهیه کتاب بسیار سخت‌تر می‌شد. از همه‌ی این عزیزان ممنونیم. گرچه این کتاب به سمت تولید می‌رود که چاپ بشود و به بازار بیاید، اما هم اکنون به بعضی اشکالها و کمبودهای آن واقفیم و مشغول رفع آنها و اضافه کردن مطالب جدید هستیم که شاید در چاپهای بعدی استفاده شود. از هر گونه اظهار نظر خوانندگان استقبال می‌کنیم.

شهرام خسروی، رضا منصوری

اسفندماه ۱۳۸۶

فصل ۱

مقدمه

نسبیت خاص دو قرنه شده است. اینشتین این نظریه را در سال ۱۹۰۵ / ۱۲۸۴، یعنی در زمان سلطنت مظفرالدین شاه و حدود انقلاب مشروطه، ابداع کرد. در آن سال‌ها فیزیک‌دان‌ها با معضلی به نام اتر دست و پنجه نرم می‌کردند. کتابی که در سال ۱۹۱۲ / ۱۲۹۱ دربارهٔ تجربه‌های مرتبط با اتر منتشر شده است، بیش از صد آزمایش را نام می‌برد که یکی از آنها آزمایش معروف مایکلسون-مورلی است. اتر ماده‌ای بود فرضی که عالم را پر کرده بود. این ماده، یا خلأ، را فیزیک‌دان‌های قرن هجدهم و نوزدهم لازم می‌دانستند تا بتوانند حرکت موجی نور را توجیه کنند. همه چیز نسبت به اتر حرکت می‌کرد. اتر دستگاه مختصات لخت مطلق بود. قوانین نیوتن و، بنا به تصور فیزیک‌دانان پیش از اینشتین، قوانین ماکسول در اتر معتبر بودند. برای نوشتن قوانین در دستگاه‌های دیگر باید از تبدیل گالیله استفاده می‌شد. قوانین نیوتن تحت تبدیل گالیله تغییر نمی‌کردند، اما قوانین الکتریسیته و مغناطیس ماکسول تغییر شکل می‌دادند، و همین باعث می‌شد که پیش‌گویی نظریه ماکسول با نتیجهٔ تجربه‌ها مغایرت داشت. این مغایرت در دسر فیزیک‌دان‌های آن زمان بود، تا اینکه اینشتین نسبیت خاص را مبتنی بر دو اصل ابداع کرد:

۱. اصل نسبیت : دستگاه‌های لخت هم‌ارز هستند و قوانین فیزیک در آنها شکل یکسانی دارند. هیچ دستگاه لخت ممتازی وجود ندارد.

۲. اصل ثابت بودن سرعت نور : سرعت نور همواره ثابت است و مستقل است از طول موج، سرعت ناظر، و سرعت چشمه می‌باشد. هیچ سرعتی بالاتر از سرعت نور وجود ندارد.

همین دو اصل را پوانکاره هم چند ماه قبل از اینشتین فرمول‌بندی و منتشر کرده بود. علاوه بر این تبدیل لورنتز را هم به دست آورده بود. اما یک فرق اساسی میان نوشته‌های پوانکاره، که ریاضی‌دان و فیزیک‌دان ارشد بسیار معتبری بود، و رهیافت اینشتین وجود داشت. پوانکاره می‌دید که در اثر این دو اصل هم‌زمانی مطلق ساعتها به هم می‌خورد. اما آن را یک اثر مختصاتی می‌پنداشت، نه یک واقعیت فیزیکی وابسته به خواص فضا و زمان، آن‌گونه که اینشتین ادعا کرد. جزئیات این رویداد تاریخی را می‌توانید در بخش بعدی مطالعه کنید.

امروزه می‌دانیم که این دو اصل مستقل از یکدیگر نیستند. در واقع اصل ثابت بودن سرعت نور از اصل نسبیت نتیجه می‌شود، که این را در فصل دوم خواهید دید.

در طول یک صد سال گذشته همواره کسانی بوده‌اند که نتوانسته‌اند شهود عام و خاص خود را با مفاهیم و نتایج نسبیت خاص تطبیق دهند و از این جهت کوشیده‌اند باطل بودن نسبیت خاص را اثبات کنند. در این میان بعضی فیزیک‌دانان برجسته‌ای هم بوده‌اند مانند لویی بریلوئن و یانوشی در مجارستان. اما پیشرفت‌های فناوری، نه فقط در فیزیک، که در زندگی روزمره آن‌چنان تأثیر گذاشته است که نمی‌توان از پذیرش اثرهای نسبیتی غفلت کرد. سالها پیش، که اولین بار سامانه‌ی جهانی مکان‌یابی (GPS) با چهار ماهواره امتحان می‌شد، ابتدا مدار مربوط به اثرهای نسبیتی را به کار نینداختند. نتیجه این شد که سنجش مکان‌های روی زمین اشتباه درآمد.

تنها پس از اینکه مدار نسبیتی به کار گرفته شد سامانه درست کار کرد. امروزه GPS در تلفن‌های همراه و خودروها نصب شده‌است. رانندگی بدون استفاده از GPS برای بسیاری مشکل شده است. ناوبری هوایی و دریایی مدتهاست که وابسته به GPS و بنابراین نسبیت‌اند. نسبیت را از زندگی روزمره هم نمی‌توان حذف کرد. فیزیک ذرات بنیادی، گرانش و کیهان‌شناسی، اپتیک و فوتونیک و بسیاری زمینه‌های دیگر که انقلابی در فناوری و صنعت ایجاد کرده‌اند همگی مبتنی بر نسبیت‌اند. با این وصف تدریس نسبیت آن‌گونه که اینشتین آن را ابداع کرد، یا آن‌گونه که پاولی در اولین متن درسی و دائرةالمعارفی نوشت، با نیازهای روز منطبق نیست. نسبیت خاص یک نظریه فضا-زمان است، بقیه نظریه‌های فیزیک را باید در این چارچوب درک کرد، مگر در حضور گرانش، که آن هم تعمیم نسبیت خاص به نسبیت عام است. ما ناظر حرکت‌های کاملاً متفاوت در روی زمین، اطراف زمین، و در عالم هستیم. چگونه می‌توان پدیده‌ها و بازه‌های زمانی گوناگون در دستگاه‌های مختلف را به یکدیگر مرتبط ساخت؟ شکل قانون نیوتون در یک ماهواره با روی زمین تفاوت دارد؟ شکل معادله‌های الکترومغناطیس ماکسول چگونه؟ آیا رفتار ذرات بنیادی در حالت سکون و غیر سکون متفاوت است؟ آیا آهنگ گذشت زمان روی ماهواره‌ها با آهنگ ساعت‌های روی زمین یکسان است؟ هر اندازه‌گیری، و هر اقدام روی زمین احتیاج به زمان و همزمان کردن ساعت‌ها در نقطه‌های مختلف کره زمین دارد.

از کجا بدانیم ساعتی که رادیو تهران اعلام می‌کند درست است؟ از کجا می‌دانیم آهنگ ساعت در تهران با آهنگ ساعت در قاهره یکسان است؟ در تراکنش‌های مالی سراسر دنیا، که ارزش بورس‌ها به شدت در نوسان است، زمان و هم‌زمانی نقش حیاتی دارد! چگونه مدیر یک شرکت مالی بزرگ می‌تواند وارد معاملات بزرگ بورس توکیو بشود بدون اینکه ساعتش با زمان توکیو «هم‌زمان» باشد و ارتباط دیجیتالی بدون تأخیر انجام پذیرد؟

نسبیت خاص به این‌گونه پرسش‌ها پاسخ می‌دهد، و آن هم به طریقی بسیار ساده و باورنکردنی. کافی است نسبیت را به درستی فرمول‌بندی کنیم. نتیجه این فرمول‌بندی، که امروزه برای ما بسیار بدیهی است، حکایت از آن دارد که فیزیک‌دانان قرن نوزدهم و اوائل قرن بیستم عمیقاً به باورهایی عادت داشتند که از شهود نافرمانی و رشد نیافته آنها نشأت می‌گرفته است. مدلی که به این ترتیب از فضا-زمان و چهارچوب‌های لخت خواهیم ساخت گستره اعتبارش حدود قرن نوزدهم فیزیک‌دانان، یعنی تبدیل گالیله را هم روشن می‌کند. در عین حال، از تاریخ علم عبرت می‌گیریم، و می‌آموزیم که نظریه‌هایمان همواره در زمان و مکان و انرژی گستره اعتبار محدودی دارند، و به همین دلیل همواره فرض می‌کنیم اعتبار آن‌ها مستقل از هر گستره‌ای است تا از این طریق طبیعت و تجربه به ما بیاموزد که اشتباه می‌کنیم. همین اشتباه‌ها است که گستره اعتبار را مشخص می‌کند، نه مدل به خودی خود. پس مرزی برای نظریه‌ها و مدل‌های خود نمی‌شناسیم تا تجربه و تطبیق با طبیعت این مرز را مشخص کند. اینک این شما و این نظریه نسبیت خاص در تمام سادگی، زیبایی، و قدرت‌مندی آن!

حاشیه: نسبیت در هنر و ادبیات

نظریه نسبیت اندک مدتی پس از پیدایش و گسترش در بین فیزیک‌دانان، تبدیل به یک موضوع مورد علاقه و مورد بحث در بین متخصصان علوم دیگر، هنرمندان، نویسندگان و حتی عموم جامعه شد. نمونه‌های بسیار زیادی از انعکاس نسبیت را در آثار مختلف می‌توان دید که در اینجا یکی دو مثال را ذکر می‌کنیم:

۱. سالوادور دالی نقاش مشهور سوررئالیست اسپانیایی در برخی کارهایش به طور مستقیم یا غیرمستقیم به نسبیت اشاره دارد. مثلاً در تابلوی *The Persistence of Memory* که در سال ۱۹۳۱ کشیده شده است با نمایش ساعت‌های از شکل افتاده اشاره به نسبی بودن زمان دارد. هم‌چنین او اثری به سال ۱۹۷۹ دارد که نام آن *Searching for the fourth dimension* (جستجو برای بعد چهارم) است که مستقیماً به نسبیت خاص باز می‌گردد.



۲. خورخه لوئیز بورخس اهل آرژانتین از تواناترین نویسندگان آمریکای لاتین و یکی از برجسته‌ترین داستان‌نویسان قرن بیستم به شمار می‌رود. بورخس در یک داستان کوتاه تخیلی به نام "Tlon, Uqbar, Orbis Tertius" از یک دنیای خیالی صحبت می‌کند به نام Tlon که در آن گستردگی فضایی وجود ندارد بلکه هر چیز گسترده در فضا در واقع دنباله‌ای از رویدادها در زمان است. پس از مطالعه کتاب خواهید دید که این جمله بسیار نزدیک به گزاره‌های نسبیتی است.



۱.۱ نقش پوانکاره و لورنتز در ابداع نسبیت

گاهی این سؤال که نظریه نسبیت خاص را پوانکاره و لورنتز ابداع کردند یا اینشتین، مطرح می‌شود. بر مبنای شواهد تاریخی نشان داده می‌شود که پوانکاره و لورنتز تا سال‌ها پس از انتشار مقاله اینشتین از قبول این نظریه امتناع می‌کردند. دلیل این امر در تغییر محتوای مفاهیم زمان و مکان جستجو می‌شود.

در قرن نوزدهم تردیدی در واقعیت وجود اتر نبود. در دهه‌های آخرین قرن، اندازه‌گیری سرعت حرکت زمین در اتر کانون توجه پژوهشگران فیزیک قرار داشت. آزمایش‌های فراوانی برای اثبات این حرکت ابداع شد و لازم بود برای توضیح نتیجه منفی این آزمایش‌ها به تعداد خود آنها فرضیه پیش کشیده شود.^۱ اکثر این آزمایش‌ها برای اندازه‌گیری اثرهای مرتبه $\frac{v}{c}$ (سرعت زمین در اتر) طرح می‌شدند. سرانجام ه. آ. لورنتز طی دو رشته بررسی بنیادی (در سال‌های ۱۸۹۲ و ۱۸۹۵) نشان داد که یک نظریه الکترون با فرمولبندی صحیح، که در آن معادلات ماکسول با فرض‌هایی در مورد توزیع میکروسکوپی بار و دینامیک الکترون تکمیل شود، برای همگی اینگونه آزمایش‌ها نتیجه‌ای منفی پیشگویی می‌کند.

^۱ برای مطالعه بیشتر در مورد اتر می‌توانید به کتابهای تاریخچه فیزیک در قرن نوزدهم مراجعه کنید. در بخش ۴.۷ به طور مختصر در مورد آزمونهای کشف اتر توضیح خواهیم داد.

در این بررسی‌ها همچنین زمان موضعی، $t' = t - \frac{vx}{c^2}$ ، به عنوان وسیله‌ای برای کمک در کار محاسبه وارد می‌شود. این مفهوم را قبلاً فویگت^۲ در سال ۱۲۶۶ / ۱۸۸۷، به صورتی مشابه، در بررسی اصل دوپلر به کار گرفته بود. در سال ۱۳۰۶ / ۱۹۲۷ لورنتز (در «کنفرانس آزمایش مایکلسون-مورلی»، [۱۱]) وضعیت قبل از آغاز قرن بیستم میلادی را چنین توصیف می‌کند:

من به ویژه گردهمایی انجمن آلمانی «پژوهش طبیعت» را در سال ۱۲۷۷ / ۱۸۹۸ در شهر دوسلدورف به خاطر می‌آورم که در آن تعداد زیادی از فیزیکدانان آلمانی از جمله پلانک، وین، دروده^۳، و بسیاری دیگر حضور داشتند. ما به ویژه موضوع اثرهای مرتبه اول را مورد بحث قرار می‌دادیم. اسباب‌هایی پیشنهاد می‌شدند که می‌توانستند اینگونه اثرها را تعیین کنند، اما تا آنجا که من می‌دانم کوششی برای اندازه‌گیری به عمل نیامد. به تدریج اعتقاد به اینکه اثرهای مرتبه اول وجود ندارند شدت می‌یافت. ما معمولاً فقط چکیده کارهای تجربی را که به چنین اثرهایی پرداخته بودند می‌خواندیم و هنگامی که می‌دیدیم نتایج منفی‌اند احساس رضایت بسیار می‌کردیم.

بنابراین توسل به تجربه‌هایی از مرتبه^۲ ($\frac{v}{c}$) ضرورت داشت. نظریه‌های موجود، در مورد سرعت زمین در اتر چیزی نمی‌گفتند، اما مطمئناً لازم بود این سرعت از مرتبه^۲ بزرگی سرعت زمین به دور خورشید باشد، یعنی $10^{-8} \approx (\frac{v}{c})^2$ ، که خیلی کوچک بود.

پیش از آن، در سال ۱۲۶۱ / ۱۸۸۲، مایکلسون آزمایشی را پیشنهاد کرده و به انجام رسانیده بود که می‌توانست اثرهای مرتبه دوم را اندازه بگیرد. اما هم آزمایش سال ۱۸۸۲ و هم تکرار اصلاح شده آن در سال ۱۸۸۷، اثبات کردند که مشاهده حرکت زمین در اتر ناممکن است. برای توضیح این نتیجه منفی، در سال ۱۲۷۱ / ۱۸۹۲ فیتزجرالد و لورنتز این اصل را وضع کردند که «طول جسمی که در اتر حرکت می‌کند با ضریب $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ در جهت حرکت کوتاه‌تر می‌شود.» (انقباض لورنتز؛ برای توضیح این نتیجه منفی کوشش‌های دیگری نیز شد. از جمله فرض شد که اتر توسط زمین کشیده می‌شود؛ این فرض با آزمایش‌های ابراهامی در تناقض بود). لورنتز همچنین توانست بر مبنای معادلات اساسی الکترودینامیک این انقباض را نشان دهد.

در سال‌های بعد مقاله‌ها و کتاب‌های زیادی که به مسئله زمین در اتر می‌پرداختند انتشار یافت. مثلاً تبدیل را هم فویگت (۱۸۸۷) ذکر کرده و هم لارمور (۱۹۰۰) در کتاب اتر و ماده آورده است. قسمت اعظم این بحث پر دامنه (که ویتاکر [۱۶] آن را تحلیل و نقد کرده است) از لورنتز است (در [۱۰] به چاپ رسیده است). او در سال ۱۲۸۳ / ۱۹۰۴ هموردایی تقریبی معادلات ماکسول را تحت تبدیلات لورنتز ثابت کرد و بدین وسیله توانست نتیجه منفی همه آزمایش‌های معروف آن زمان را، از جمله آزمایش مایکلسون-مورلی، را توضیح دهد.

پوانکاره در مقاله خود به تاریخ ژانویه ۱۹۰۵ [۱۳] گامی فراتر می‌نهد. او اصل نسبیت را این طور فرمولبندی می‌کند: «چنین می‌نماید که ناممکن بودن تعیین حرکت مطلق زمین در اتر، یک قانون طبیعی کلی است. به نظر می‌رسد که باید این قانون را که به آن اصل نسبیت می‌گوییم، بدون قید و شرط بپذیریم.»

پوانکاره همچنین برای نخستین بار مفاهیم تبدیل لورنتز و گروه لورنتز را در این مقاله به کار برده و ادعا می‌کند که قوانین طبیعی باید تحت تبدیلات لورنتز هموردا باشند. اما او هم نقش مختصه جدید زمان را، که به طور صوری به کار گرفته است، مشخص نمی‌سازد و بحثی درباره آن نمی‌کند.

نقل قول زیر از لورنتز [۱۱] نشان می‌دهد که درک این نکته چقدر مشکل بوده است. او در سال ۱۳۰۷ / ۱۹۲۸ می‌نویسد:

وضعیت در مورد اثرهای مرتبه دوم پیچیده‌تر بود. با یک تبدیل مختصات می‌شد آزمایش‌ها را توضیح داد؛ زمان نیز می‌بایست تبدیل می‌شد. از این رو من مفهوم زمان موضعی را به کار گرفتم؛ زمان موضعی برای چارچوب‌های مرجعی که نسبت به یکدیگر در حرکتند، متفاوت بود. با این حال من هرگز به این فکر نیفتادم که زمان موضعی با زمان واقعی ارتباطی داشته باشد. برای من زمان واقعی هنوز مفهوم قدیمی زمان مطلق را داشت، که مستقل از هر چارچوب مرجعی

است؛ من فقط این زمان را واقعی می‌پنداشتم. به نظر من تبدیل زمان تنها یک فرضیه کمکی بود. بنابراین اینشتین نظریه نسبیت را به تنهایی ابداع کرده‌است.

پوانکاره هم یقیناً در سال ۱۹۰۵ همین دیدگاه را داشته‌است چه، در غیر این صورت، مهم‌ترین و ریشه‌ای‌ترین گام در راه رسیدن به نظریه نسبیت، یعنی حذف زمان مطلق را، در مقالات خود ناگفته نمی‌گذاشت. هدف پوانکاره ریاضی‌دان اصلاح صوری بررسی‌های لورنتز بود، چنانکه خودش می‌نویسد:

نتایجی که من به آن رسیدم، با نتایج آقای لورنتز در تمامی نکات مهم مطابقت می‌کنند؛ من فقط ناگزیر بودم برخی از جزئیات را اصلاح کنم؛ البته تفاوت‌هایی هستند که اهمیت جنبی دارند و بعداً مشخص خواهند شد.

از دیدگاه فلسفه علم بخشی از صورتبندی پوانکاره دارای تعبیر فیزیکی نیست به طوری که در آن قواعد تناظر میان گزاره‌های نظری و تجربی وجود ندارد. در این باره می‌توان مثلاً به لاین فلنز [۸]، ص ۱۰۷، مراجعه کرد. سرانجام اینشتین انقباض لورنتز را بی‌هیچ مراجعه‌ای به الکترودینامیک به دست آورد. بخش اول اثر مشهور او « درباره الکترودینامیک اجسام متحرک » [۲] (توصیه می‌شود مقاله اصلی حتماً خوانده شود) دارای عنوان تعریف همزمانی است و مفهوم همزمانی رویدادهای دور از هم را بررسی می‌کند؛ بخش بعدی در این اثر که پیرامون نسبیت طول و زمان نام دارد با این نتیجه‌گیری پایان می‌آید:

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که مجاز نیستیم برای مفهوم همزمانی معنای مطلق قابل شویم بلکه دو رویداد که از نظریک چارچوب همزمانند، از نظر چارچوب دیگری که نسبت به این چارچوب حرکت می‌کند، نمی‌توانند همزمان تلقی شوند.

به دنبال آن، هنگام به دست آوردن تبدیل لورنتز، مختصات زمانی t و t' را بی‌درنگ با زمان‌هایی که در هر یک از چارچوب‌ها اندازه‌گیری می‌شود یکسان می‌گیرد (به طوری که قواعد تناظر گزاره‌های نظری و تجربی از ابتدا معلومند). آنگاه اینشتین در دومین بخش اصلی اثر خود نشان می‌دهد که صورت معادلات ماکسول تحت تبدیلات لورنتز حاصل از تحلیل همزمانی (که با فرض اصل نسبیت و ثابت بودن سرعت نور به دست آمده‌است) ناوردا می‌ماند. لورنتز [۹] تفاوت‌های بین برداشت خود و اینشتین را در یک رشته جزوه درسی در سال ۱۲۸۸ / ۱۹۰۹ (این جزوه‌ها در ۱۲۸۵ / ۱۹۰۶ تدریس شده‌اند) چنین مشخص می‌کند:

تفاوت اساسی در این است که اینشتین به سادگی اصلی (اصل نسبیت) را وضع می‌کند، که ما در اینجا آن را به زحمت و به شکلی که چندان قانع کننده نیست، از معادلات میدان الکترومغناطیسی به دست آوردیم. در این باره باید یاد آور شد که او نتایج منفی آزمایش‌هایی چون مایکلسون، ریلی^۴ یا بریس^۵ (دو نفر اخیر کوشیدند تا شکست دوگانه در اجسام متحرک واقع در اتر را مشاهده کنند، انتظار می‌رفت که در اثر ناهمسانگردی ناشی از انقباض لورنتز چنین پدیده‌ای روی می‌دهد) را، در اثر جبران شدن تصادفی اثرهای متقابل نمی‌داند، بلکه تجلی یک اصل کلی و بنیادی می‌شمارد. با وجود این، به نظر من صورتی که برای نمایش دادن نظریه انتخاب کرده‌ام امتیازهایی دارد. من می‌توانم اتر را طوری در نظر بگیرم که بتواند حامل میدان‌های الکتریکی با نوسان‌ها و انرژی‌های آن باشد، و دارای خاصیت‌هایی باشد که تا حدی اختلاف‌های کیفی آن با ماده معمولی را توجیه کند. بر مبنای این روند فکری، بدیهی است که فاصله و زمان باید با مقیاس‌ها و ساعت‌هایی اندازه‌گیری شوند که نسبت به اتر وضعیت ثابتی دارند، و نباید با این فرض شروع کرد که حرکت کردن یا نکردن یک جسم نسبت به اتر علی السویه است.

نقل قول بالا به روشنی نشان می‌دهد که اهمیت نظریه اینشتین هرگز به فوریت شناخته نشد، بلکه مقاله اینشتین به عنوان جزئی (البته غیرعادی) از انبوه نوشتارهایی که درباره اتر بحث می‌کردند تلقی شد.

^۴ Rayleigh
^۵ Brace

از دیدگاه امروزی علاوه بر این باید تأکید کرد که اینشتین با نحوه برخوردش مسائل «فضا-زمان-نسبیت» را از مسائل «نظریهٔ الکترون» جدا کرد. مسائل نظریهٔ الکترون را نه نسبیت بلکه «نظریهٔ کوانتومی» حل کرد. در نظریهٔ الکترون لورنتز، مسئلهٔ تبدیل فضا-زمان با مسئلهٔ دینامیک ذرات باردار (که امروز هم مسئلهٔ مشکلی است) بستگی داشت. در ضمن قرار بود که اثر زیمان، رسانایی الکتریکی و غیره نیز به طور دقیق از این نظریه استنتاج شوند. تازه خیلی بعدها روشن شد که تحلیل نظری این مسائل تا چه حد باید متفاوت باشد.

خوب است تحلیل بالا در بارهٔ سهم لورنتز، پوانکاره و اینشتین را با بررسی تاریخی ویتاگر [۱۶] که قبلاً به آن اشاره شد مقایسه کنیم. عنوان دومین فصل جلد دوم کتاب ویتاگر «نظریهٔ نسبیت پوانکاره و لورنتز» است، وی پس از ستایش مفصل خدمات این دو دانشمند می‌نویسد:

در پاییز همان سال (۱۲۸۴ / ۱۹۰۵) ... اینشتین مقاله‌ای انتشار داد که نظریهٔ نسبیت پوانکاره را با تفصیل بیشتری مورد بررسی قرار داد.

درست مشخص نیست که چرا ویتاگر در کتاب خود، خدمات اینشتین را دربارهٔ نسبیت خاص (و فقط در این مورد) تا این حد ناچیز گرفته است.

نقش آزمایش مایکلسون در پیدایش نظریهٔ نسبیت نیز در سال‌های اخیر بسیار بحث برانگیز بوده است. اینشتین در اثر اصلیش به سال ۱۹۰۵ برای تأیید نظریهٔ خود فقط به طور کلی، و بی آنکه آزمایش بخصوصی را پیش بکشد «به کوشش‌های نافرجام برای تشخیص حرکت زمین نسبت به خلأ نور» اشاره می‌کند. برخلاف این، در کتاب‌هایی که جنبهٔ آموزشی دارند، اغلب چنین اظهار می‌شود که آزمایش مایکلسون-مورلی و نظریهٔ نسبیت، از نظر تاریخی و موضوعی ارتباط بسیار نزدیکی با هم دارند. کتابی دربارهٔ نظریهٔ نسبیت اینشتین نیست که توصیف این آزمایش در آن یافت نشود. آری، حتی گاه چنین استنباط می‌شود که گویا نظریهٔ نسبیت از آزمایش مایکلسون-مورلی نتیجه شده است.

آزمایش مایکلسون-مورلی، از دیدگاه تاریخی و موضوعی، چه اهمیتی برای نظریهٔ نسبیت دارد؟ آیا این آزمایش همان آزمایش قاطعی است که عصر فیزیک کلاسیک را به پایان رسانید و انقلابی در فیزیک به وجود آورد؟

اینشتین دربارهٔ این پرسش که این آزمایش تا چه حد در بررسی‌های وی مؤثر بوده است، و اینکه آیا آزمایش مایکلسون-مورلی در بنای نظریهٔ نسبیت حائز اهمیت بوده است یا نه، اظهار نظرهای متفاوتی کرده است که مورد تحلیل انتقادی هولتن [۶] قرار گرفته‌اند. مثلاً در سال ۱۳۲۹/۱۹۵۰ اینشتین به شک‌لند^۶ اظهار می‌دارد که وی از آزمایش مایکلسون-مورلی، تازه پس از سال ۱۹۰۵، از طریق نوشته‌های لورنتز آگاهی یافته است. پس از دو سال، در یک گفتگوی دیگر چندان مطمئن نیست که کی برای نخستین بار این مطلب را شنیده است و می‌گوید: «من اطمینان ندارم که آزمایش مایکلسون، طی هفت سالی که نظریهٔ نسبیت که محتوای زندگی من بود، مرا تحت تأثیر قرار داده باشد. فکر می‌کنم درستی این آزمایش صرفاً جزو مفروضات من بوده است». در سال ۱۹۴۵ اینشتین به دیون‌پورت^۷ چنین می‌نویسد: «آزمایش مایکلسون تأثیر قابل اعتنایی در افکار من نداشته است»^۸

واقعاً هم، اهمیت آزمایش مایکلسون فقط در چارچوب بحث‌های مربوط به نظریهٔ الکترون بود، چرا که این آزمایش از دیدگاه نظریهٔ الکترون با سایر آزمایش‌های کشیدگی اثر تفاوت اساسی داشت. لیکن اینشتین دقیقاً خود را از مجموعهٔ مفاهیم این نظریه جدا کرد، برای او آزمایش مایکلسون-مورلی تنها یکی از اندازه‌گیری‌های فراوانی بود که مشاهده ناپذیری حرکت زمین در اتر را نشان می‌دادند. اینکه این آزمایش‌ها نسبت به $\frac{v}{c}$ از مرتبهٔ اول بوده‌اند یا دوم، نقشی در ساخت نظریه نداشته است؛ تمام این آزمایش‌ها فقط شواهدی بر عدم وجود اثر بوده‌اند.

البته همان طور که قبلاً خاطر نشان کردیم، در تحول تاریخی نظریهٔ الکترون تمایز بین آزمایش‌های مرتبهٔ اول و دوم اساسی

^۶Shankland
^۷Davenport

^۸اینشتین در یک سخنرانی به سال ۱۹۲۲ در دانشگاه توکیو صریحاً اعلام می‌کند که از آزمایش مایکلسون-مورلی مطلع بوده است (ر.ک. مجلهٔ فیزیک ۸۷، ۲، ۱۳۶۲).

بود. از این رو در مدت زمان ۱۸۹۵ تا ۱۹۰۵ مقالات بی‌شماری آزمایش مایکلسون-مورلی و انقباض لورنتز را بررسی می‌کردند. چنانکه مطالعه «Physics Abstracts» این دوره نشان می‌دهد، در زمینه این مسائل آبراهام، زومرفلد، پین، بری‌لوئن^۹، کهن^{۱۰}، هازن‌تورل^{۱۱}، لانژون^{۱۲}، کوهل^{۱۳}، گانز^{۱۴} و سایرین فعالیت داشته‌اند. از این رو به نظر ما غیر محتمل می‌رسد که اینشتین پس از سال ۱۹۰۵ از این امر آگاهی یافته باشد.

نه تنها از نظر تاریخی بلکه از نظر منطقی هم آزمایش مایکلسون-مورلی آن آزمایش قاطعی نیست که مرز بین فیزیک کلاسیک نظریه نسبیت را تعیین کند. چنانچه بخواهیم نظریه نسبیت را از تجربه به دست آوریم، آنگاه همان‌طور که رابرتسون [۱۴] نشان داده است دو آزمایش دیگر نیز ضروری‌اند: آزمایش کندی-تورن دایک^{۱۵} و آزمایش آیوز-استیل‌ول^{۱۶} (مثلاً ر.ک. [۱۵])؛ به دنبال اثبات انقباض طول توسط آزمایش مایکلسون-مورلی، این دو آزمایش ثابت بودن مقیاس‌ها در جهت عمود بر حرکت و نیز اتساع زمان را تعیین می‌کنند. محال است به طریق «استقرایی» از آزمایش مایکلسون-مورلی به نظریه نسبیت رسید. آزمایش مایکلسون-مورلی در جهان بینی فیزیک هم تحولی پدید نیاورده‌است، کما اینکه این آزمایش از طریق نظریه الکترون، صرفاً با اضافه کردن فرض انقباض لورنتز به طور رضایت‌بخشی توضیح داده می‌شود. (لورنتز در سال ۱۲۷۴ / ۱۸۹۵ توضیح قانع‌کننده‌ای در چارچوب نظریه الکترون برای این آزمایش ارائه کرده بود.) بدین ترتیب پوانکاره و لورنتز که هر دو از طرفداران اصلی نظریه الکترون بودند تا سال‌ها پس از پایه‌گذاری نظریه نسبیت نیز تحول در جهان بینی علم را نمی‌پذیرفتند. نقل قول‌های ذکر شده از لورنتز و نیز گزارشی از موسکوفسکی [۱۲] درباره سخنانی مورخ ۱۳ اکتبر ۱۹۱۰ پوانکاره دلالت بر این امر دارند:

پوانکاره از «مکانیک نوین» صحبت کرد ... او گفت به نظر می‌رسد این انقلاب آنچه را که تا چندی پیش در جهان دانش مسلم‌ترین بود، تهدید می‌کند. یعنی اصول بنیادی مکانیک کلاسیک را که ما مدیون نیوتون هستیم. با این وصف در حال حاضر این انقلاب تنها یک شبیح تهدیدآمیز است، چه به خوبی ممکن است که دیر یا زود اصول دیر آزموده دینامیک نیوتونی به عنوان فاتح از این مجادله سر بر آورند. وی در ادامه سخنان خود کراراً اظهار داشت که در برابر انبوه فرضیه‌هایی که بر روی هم انباشته شده‌اند، سرگیجه می‌گیرد، و برایش تنظیم آنها در یک دستگاه، تا حد غیر ممکن، مشکل می‌نماید.

مفاهیمی که کوهن [۷] در اثر خود ساختار انقلاب علمی به آنها پرداخته است در تحلیل آزمایش مایکلسون-مورلی سودمندند. نظریه الکترون از طریق «تحول علم متعارف» پیش رفت و در این روند، آزمایش مایکلسون-مورلی واقعاً یک تجربه قاطع بود، زیرا این آزمایش ایجاب می‌کرد انقباض لورنتز وارد شود، که همین‌طور هم شد. بدین ترتیب، تمام آزمایش‌ها به طرز رضایت‌بخشی توضیح داده می‌شدند، بدون آنکه مفاهیم متداول تغییری کنند.

این نظریه نسبیت خاص اینشتین بود که انقلاب را پدید آورد، این نظریه به بخشی از مفاهیم فیزیکی فضا، زمان، اتر و الکترون محتوای جدید بخشید و بخشی دیگر را نامربوط یافت و قسمت‌هایی را هم به زمینه‌های دیگر تحقیقات فیزیک ارجاع کرد. ابتدا این نظریه چیزی بیش از آنچه را که نظریه متداول روشن می‌کرد توضیح نمی‌داد. به همین جهت است که طرفداران نظریه اتر توانستند اعتقاد خود را حتی تا چندین دهه دیگر حفظ کنند (شاید تاریخچه نظریه نسبیت، آن‌طور که ویتاکر ترسیمش می‌کند نیز بدین ترتیب توضیحی بیابد).

باید گفت ساده‌سازی عمیقی که نظام مفهومی جدیدی به ارمغان آورد، به تدریج روشن شد.^{۱۷}

Brillouin^۹

Cohn^{۱۰}

Hasenohrl^{۱۱}

Langevin^{۱۲}

Kohl^{۱۳}

Gans^{۱۴}

Kennedy – Thorndike^{۱۵}

Ives – Stilwell^{۱۶}

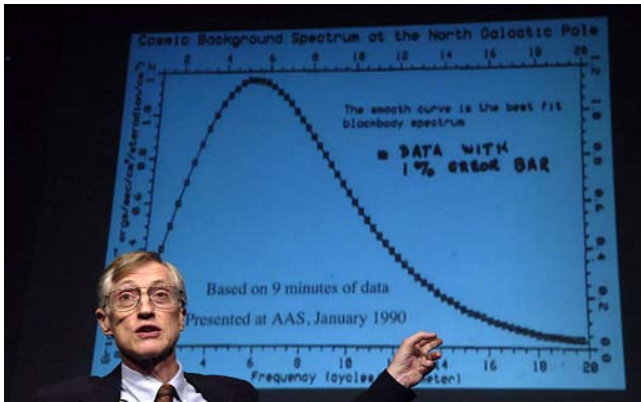
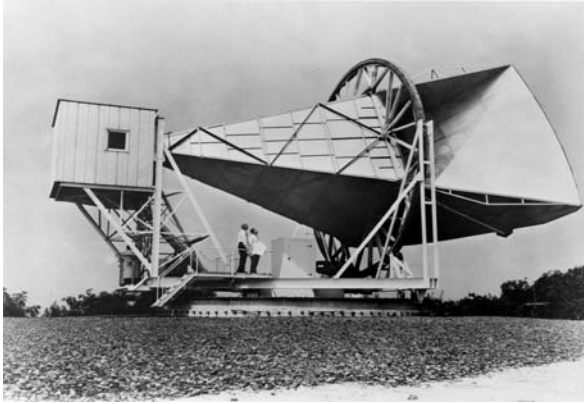
^{۱۷} متن این بخش (به تألیف ر.م.) ابتدا در سال ۱۹۷۶ در کتاب “Relativität, Gruppen, Teilchen: Spezielle Relativitätstheorie...” چاپ شده و ترجمه فارسی آن در مجله فیزیک، ۱، ۱۳۶۲، ۲۷۶ به چاپ رسیده است.

حاشیه: تابش زمینه کیهانی

در سال ۱۹۶۵ دو نفر از پژوهشگران آزمایشگاههای تلفن پل به نامهای پنزیاس و ویلسون که مشغول انجام آزمایش در زمینه نجوم رادیویی و ارتباطات ماهواره‌ای به وسیله آنتنهای میکروموج بودند متوجه شدند که یک تابش میکروموج با دمای متناظر $3/5 K$ به طور یکنواخت و همگن از همه جهات دریافت می‌شود. با توجه به خصوصیات این تابش، در ابتدا تصور می‌شد که یک نوفه ناشی از منابع میکروموج مختلف است که بر روی سیگنال اصلی سوار شده و همراه با آن آشکار می‌شود. اما بعد معلوم شد که این توجیه مناسبی نیست: نوفه نمی‌تواند از همه جهات و با شدت و طیف یکسان دریافت شود. از آنجایی که در طی حدود ۲۰ سال قبل از آن طبق برخی مدل‌های کیهانشناسی پیش بینی می‌شد که باید یک تابش با طیف جسم سیاه به صورت باقیمانده‌ای از دوران اولیه پس از مهبانگ قابل مشاهده باشد، به زودی فیزیکدانان دریافتند که میکروموج دریافتی همان تابش زمینه کیهانی است. این تابش زمینه در طول حدود ۴۰ سال گذشته همواره یکی از عناصر اصلی مدل استاندارد به حساب آمده و بررسی خصوصیت‌های آن قسمت مهمی از پژوهشهای کیهانشناسی را تشکیل داده است. جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۷۸ به پنزیاس و ویلسون و در سال ۲۰۰۶ به مِتِر (شکل زیر) و اسموت بخاطر کشفیات تابش زمینه کیهانی اهداء شده است.

اما یک سؤال در اینجا پیش می‌آید: اگر یک تابش همگن و همسانگرد همه عالم را پر کرده است آیا چارچوب متصل به آن می‌تواند به عنوان چارچوب سکون مطلق فرض شود؟ چرا تابش زمینه کیهانی همان اثر نیست؟ به جواب فکر کنید.





- ۱) آلبرت اینشتین، چگونه نظریه نسبیت خاص را ابداع کردم، مجله فیزیک، ۱۳۶۲، ۱، ۲، ۸۷-۹۰.
- ۲) ترجمه انگلیسی مقاله اصلی اینشتین راجع به نسبیت خاص به نام «پیرامون الکترودینامیک اجسام متحرک» که در سال ۱۹۰۵ منتشر شده است : web.mit.edu/8.033/einstein1905.pdf
- ۳) مقاله بسیار مفصل در مورد ارتباط پوانکاره با نظریه نسبیت :
A.A.Logunov, "Henri Poincare' and relativity theory", arxiv:physics/0408077.
- ۴) مقاله‌ای با دید انتقادی نسبت به روایت‌های متعارف از به وجود آمدن نظریه نسبیت:
J.Reignier, "The birth of special relativity", arxiv:physics/0008229
- ۵) مقاله‌ای به همراه کتاب شناسی مفصل از کتب نسبیت خاص و عام
Gary Oas, "On the use of relativistic mass in the various published works", arxiv:physics/0504111
- ۶) Holton,G., 1973, "Thematic Origins of Scientific Thought- Kepler to Einstein", Cambridge (Mass.)Harvard University Press.
- ۷) Kuhn, Thomas, 1970, "The Structure of Scientific Revolutions", International Encyclopedia of Unified Science, Vol.2, No.2 .
- ۸) Lienfelner,W., 1965, Einfuehrung in die "Erkenntnis-und Wissenschaftstheotie", Mannheim Bibliographisches Institut.
- ۹) Lorentz, H.A., 1909, "The Theory of Electrons", Leipzig, Teubner.
- ۱۰) Lorentz, H.A., Einstein, A., Minkowski, H., 1958, "Das Relativitatsprinzip", Stuttgart, Teubner.
- ۱۱) Lorentz, H.A., 1928, AP.J., 68, 341-402.
- ۱۲) Moszkowski, A., 1922, "Einstein-Einblicke in seine Gedankenwelt", Berlin, F.Fontane.
- ۱۳) Pioncare', H., 1906, "Rendiconti del Circolo Math. di Palermo", 21,219.
- ۱۴) Robertson, H.P., 1949, "Postulate versus observation in the special theory of relativity", Rev.Mod.Phys.21, 378.
- ۱۵) Schwarts, H.M., 1968, "Introduction to Special Relativity", New York, McGraw Hill.
- ۱۶) Whittaker, E., 1960, "A History of The Theories of ether and electricity I,II", New York, Harper Torchbooks.

فصل ۲

سینماتیک

۱.۲ ناظر، چارچوب مرجع و مدل‌سازی

برای بیان پدیده‌های فیزیکی، برخلاف زبان گفتار معمولی، از کلام استفاده نمی‌کنیم بلکه آن را به زبان ریاضی فرمول‌بندی می‌کنیم. این دستاورد مهم بشر در سه قرن گذشته و تفاوت آن با علم قدیم و سایر بخشهای معرفت بشری است. فرمول‌بندی ریاضی به ما هم چگونگی اندازه‌گیری را می‌آموزد و هم ارتباط میان مفاهیم و طبیعت را برقرار می‌سازد. این فرایند را مدل‌سازی می‌نامیم.

ابتدا نیاز به ناظر یا ناظرهایی داریم که پدیده‌ها را مشاهده کنند و مشخصات آن‌ها را اندازه بگیرند. ناظرها باید بتوانند بازه‌های فضایی و زمانی را اندازه بگیرند یعنی، باید بتوانند بگویند یک پدیده در کجا و در چه لحظه‌ای روی داده است. مفهوم ناظر و سپس اندازه‌گیری بازه‌های زمانی و مکانی هر رویداد از ابتدایی‌ترین مفاهیمی است که در فیزیک با آن‌ها سروکار داریم. ناظر به کمک مفاهیم زمان و مکان یا بازه‌های زمانی و فضایی مدلی از طبیعت و رویدادهای آن می‌سازد که به کمک آن پدیده‌ها را توصیف می‌کند، آن‌ها را مرتبط می‌کند، و نیز پیشگویی می‌کند. پس ناظر، شخص یا دستگاهی است که مجهز به مفاهیم و ابزارهای ریاضی لازم برای اندازه‌گیری زمان و فضا باشد.

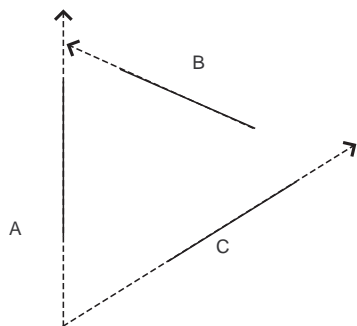
فرض کنید می‌خواهیم تصویری از ناظر ساکن A رسم کنیم. این ناظر نسبت به خودش ساکن است یعنی فاصله فضایی‌اش نسبت به خودش تغییر نمی‌کند اما زمان برای او سپری می‌شود، که ساعت همراهش سیری شدن زمان را نشان می‌دهد. به عنوان ساده‌ترین انتخاب خط مستقیمی می‌کشیم و آن را نمودار ناظر تلقی می‌کنیم. امتداد خط به خاطر سیری شدن زمان است؛ هم‌چنین به این خط جهت داده‌ایم تا پیشرفت زمان را نشان دهد (شکل ۱.۲). این خط بیانگر آن است که ناظر ساکن است اما زمان برای او سپری می‌شود، در واقع تاریخچه ناظر را نمایش می‌دهد؛ از این رو آن را جهان خط ناظر می‌نامیم.



شکل ۱.۲:

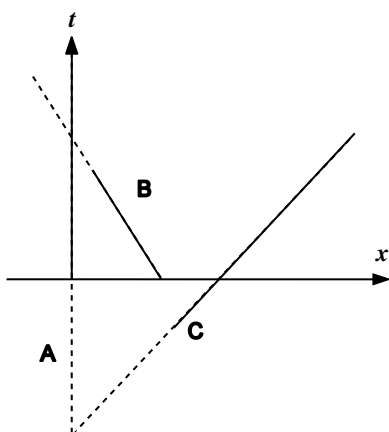
طبیعی است که با این تعریف روی جهان خط ناظر زمان تغییر می‌کند ولی مکان ثابت است پس می‌توان این خط را به عنوان

محور زمان اختیار کرد (محور t). حالا ناظر B را که به A نزدیک می شود و C را که از A دور می شود در نظر می گیریم (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲:

ناظر B در آینده به A می رسد و C در گذشته با A ملاقات داشته است. تا اینجا فرض کرده ایم که برای ناظران ما تنها یک بعد فضایی x وجود دارد که البته به منظور سادگی مفاهیم و رسم نمودارها است. بعد فضایی ناظر A (محور x) را می توانیم عمود بر جهان خط در نظر بگیریم که در این صورت به سهولت فاصله ناظرهای B و C را در لحظه $t = 0$ یا هر لحظه دیگر می توان از نمودار خواند (شکل ۳.۲).

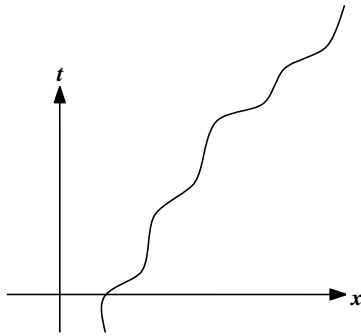


شکل ۳.۲:

همین طور سرعت ناظرها را نسبت به ناظر A می توان به دست آورد: ناظر A نسبت به خودش ساکن است پس مختصه x آن تغییر نمی کند (جهان خط عمود بر محور x). فاصله ناظر B که به سوی A حرکت می کند کم می شود ولی فاصله C از آن زیاد می شود. آیا ممکن است محور x جهان خط ناظری باشد؟ چنین ناظری باید سرعتش نسبت به ناظر A بی نهایت باشد. چون این ناظر در لحظه $t = 0$ می تواند همه جا باشد.

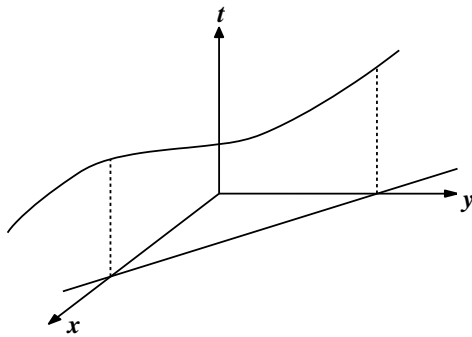
هر نقطه از این فضای (t, x) را یک رویداد می نامیم، یعنی اتفاقی که در لحظه ای در نقطه ای از فضا رخ می دهد، و مختصات x و t دریافت ناظر A از مکان و زمان این رویدادهاست. به این ترتیب محورهای t و x بیانگر فضای رویدادهاست آن طور که ناظر A می بیند. به عبارت دیگر (t, x) مدلی است که ناظر A از فضا زمان می سازد. البته لازم است مقیاس روی این محورها نیز انتخاب شود. هر نقطه از این فضا دو مختصه x و t دارد. اما ناظر A را ما به دلخواه انتخاب کردیم، ناظرهای B و C فضا زمان را چگونه

می‌بینند؟ آن‌ها کدام محورها را برای فضا و زمان اختیار می‌کنند؟



شکل ۴.۲:

پیش از پرداختن به این پرسش باید شناخت بهتری از ناظرها پیدا کنیم. شکل (۴.۲) جهان خط یک ناظر شتاب‌دار را نشان می‌دهد. انحنای جهان خط نمایشگر شتاب است زیرا سرعت در هر لحظه از شیب مماس بر منحنی به دست می‌آید و تغییر شیب در نقاط مختلف نشانه وجود شتاب است. نمودارهای فضازمان را می‌توان حداکثر ۳ بعدی رسم کرد: یک بعد زمان و ۲ بعد فضا.



شکل ۵.۲:

شکل (۵.۲) جهان خط ناظری را در یک نمودار سه بعدی فضازمان نشان می‌دهد. تصویر جهان خط در صفحه $x - y$ (فضا)، مسیر ناظر است. شکل نشان می‌دهد که حرکت این ناظر راست خط اما نایکنواخت است. این نایکنواختی را معمولاً به حساب وجود نیرویی می‌گذاریم که شتاب را ایجاد کرده است. قوانین نیوتن میان ناظرهای شتاب‌دار و بی‌شتاب تمایز می‌گذارند که این تمایز در فیزیک اساسی است.

ناظرهای لخت

فرض کنیم بر ذره‌ای هیچ نیرویی از خارج وارد نشود. قانون دوم نیوتون می‌گوید که این ذره ساکن یا در حرکت راست خط یکنواخت است و وضعیتش را تغییر نمی‌دهد. این گزاره از قول ناظری است که آن را لخت می‌نامیم. حال اگر ناظری نسبت به این ناظر در حرکت یکنواخت باشد، آن هم حرکت ذره را مانند ناظر اول راست خط و یکنواخت می‌بیند. اما ناظرهای شتاب‌دار به این ذره شتاب نسبت می‌دهند و بنابر قانون دوم نیوتون، در پی علت این شتاب، نیرویی موسوم به نیروی پنداری یا نیروی لختی را عامل آن شتاب می‌پندارند. به این ترتیب تمایزی هست میان ناظرهای لخت و ناظرهایی که نسبت به آن‌ها شتاب دارند. ناظرهای لخت می‌توانند نسبت به هم حرکت یکنواخت داشته باشند. به علاوه هر ناظر می‌تواند مبدأ مکان و زمان خود را به دلخواه اختیار کند. قوانین فیزیک بستگی به انتخاب مبدأ زمان یا مکان ندارند که این استقلال حاکی از همگنی فضا و زمان است که از تقارن‌های مهم فضا و زمان محسوب می‌شود. از سوی دیگر هر ناظر لخت مجاز است جهت‌گیری محورهای فضای خود را به دلخواه انتخاب کند که این موضوع نیز حاکی از همسانگردی فضا است. با پذیرش این تقارن‌ها برای فضا و ممتاز کردن رده‌ی خاصی از ناظرها، راه برای ساختن مدلی از فضازمان که در آن قوانین فیزیک را بتوان مستقل از ناظر و مختصات آن بیان کرد باز می‌شود.

از سوی دیگر گزاره‌ای به عنوان اصل در مکانیک کلاسیک فرض می‌شود (و به مکانیک نسبیتی هم منتقل می‌شود) که به عنوان اصل نسبیت شناخته می‌شود و بیان می‌کند که شکل قوانین فیزیک از دید ناظرهای لخت متفاوت یکسان دیده می‌شود. می‌توانید یک آزمایش ذهنی ساده را فرض کنید: آیا ناظری که در داخل یک قطار بدون پنجره با حرکت راست خط یکنواخت روی ریل بدون اصطکاک حرکت می‌کند با هیچ وسیله‌ای می‌تواند تشخیص دهد که نسبت به زمین در حال حرکت است؟ در بخش بعد از این اصل برای به دست آوردن تبدیلات استفاده می‌کنیم.

در پایان این قسمت تذکر یک نکته ضروری است: در اغلب کاربردهای عملی چارچوب‌هایی که به عنوان لخت در نظر گرفته می‌شوند، تقریباً لخت هستند. منظور این است که ممکن است چارچوب مرجع شتاب داشته باشد ولی تأثیر این شتاب بر آزمایش یا پدیده مورد نظر قابل چشم‌پوشی است. نمونه خوب این چنین دستگاهی زمین است که به علت گردش به دور خورشید و چرخش به دور خودش شتاب دارد اما معمولاً از این شتاب صرف نظر می‌کنیم.

۲.۲ تبدیل کلاسیک، تبدیل نسبیتی

۱.۲.۲ تبدیل گالیله

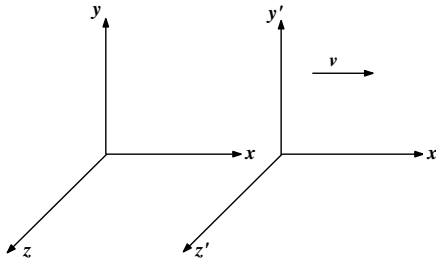
ممکن است پیش از این با مفهوم تبدیل گالیله و اصل نسبیت آشنا شده باشید ولی بهتر است برای حفظ پیوستگی مطلب، این بخش را هم مطالعه کنید.

دو چارچوب مرجع لخت S و S' را در نظر بگیرید که مانند شکل (۶.۲) محورهای مختصات آن‌ها موازی است و سرعت نسبی آن‌ها ثابت، در راستای محور x ، و برابر با v است. اکنون می‌خواهیم مختصات یک رویداد مشخص را از دید هر دو ناظر مقایسه کنیم. علاوه بر این که جهت‌گیری محورهای مختصات و سرعت نسبی دو ناظر را مطابق شکل (۶.۲) در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم مبدأ زمان و مکان هر دو چارچوب در لحظه شروع، بر یکدیگر منطبق باشند. با چنین فرضی اگر مختصات رویداد P را در چارچوب S به صورت (t, x, y, z) و در چارچوب S' به صورت (t', x', y', z') در نظر بگیریم به راحتی دیده می‌شود که

$$x' = x - vt \quad (1)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



شکل ۶.۲:

در مکانیک کلاسیک زمان یکی از متغیرهای حرکت به حساب نمی‌آید و تنها نقش پارامتری را ایفا می‌کند که بر اساس آن می‌توان تحول مختصات مکانی متحرک را بیان کرد. بر همین اساس، اندازه‌گیری زمان مستقل از ناظر است. پس رابطه تبدیل زمان به شکل زیر نوشته می‌شود

$$t' = t \quad (۲)$$

مجموعه روابط (۱) و (۲) را تبدیل گالیلو می‌نامیم که اساس نسبیت گالیلو را تشکیل می‌دهد. به زودی راجع به نسبیت گالیلو صحبت خواهیم کرد، اما پیش از آن چند نکته حائز اهمیت را ذکر می‌کنیم. نخست این که تبدیل گالیلو برای بازه‌های مختصات نیز برقرار است. یعنی

$$\Delta x' = \Delta x - v\Delta t \quad (۳)$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

و

$$\Delta t' = \Delta t \quad (۴)$$

گیریم طول یک جسم متحرک Δx باشد، یعنی با قرار دادن آن در حالت سکون روی محور x ابتدا و انتهای آن روی نقاط A و B قرار می‌گیرد به طوری که

$$x_B - x_A = \Delta x \quad (۵)$$

البته، قید حالت سکون (به معنای $\Delta t = 0$) لازم است؛ چون مسلماً نباید برای اندازه‌گیری طول جسم متحرک مختصات دوسر آن را در زمان‌های مختلف اندازه‌گیری کرد. بنابراین از رابطه (۳) به دست می‌آید

$$\Delta x' = \Delta x \quad (۶)$$

یعنی طول یک جسم به سرعت ناظری که در حال اندازه‌گیری آن است بستگی ندارد. توجه کنید این استنباط از آن جا به دست می‌آید که $\Delta t' = 0$ هم برقرار باشد، یعنی مختصات دو سر جسم در دستگاه S' نیز همزمان اندازه گرفته می‌شود. در تبدیل وارون تنها رابطه‌ای که شکل آن تغییر می‌کند رابطه مربوط به x است:

$$x = x' + vt = x' + vt' \quad (۷)$$

و بقیه روابط به همان شکل قبلی باقی خواهند ماند. پس برای یافتن تبدیل وارون، جای متغیرهای بدون پریم و پریم دار را عوض کنید و v را هم به $-v$ تبدیل کنید.

آخرین نتیجه از تبدیل گالیله که شاید مهم‌ترین آنها باشد به دست آوردن تبدیل سرعت و شتاب است. ذره‌ای را در نظر بگیرید که مختصات آن در دو دستگاه لخت $x(t)$ و $x'(t)$ و سرعت متناظر آن $u_x(t)$ و $u_{x'}(t)$ باشد. از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \quad (۸)$$

همچنین از (۲) نتیجه می‌گیریم

$$dt' = dt \quad (۹)$$

پس

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v \quad (۱۰)$$

یا

$$u'_{x'} = u_x - v \quad (۱۱)$$

به علاوه

$$u'_{y'} = u_y \quad (۱۲)$$

$$u'_{z'} = u_z$$

روابط (۱۱) و (۱۲) همان قانون جمع سرعت‌های مکانیک کلاسیک است: اگر یک قطار نسبت به ریل دارای سرعت u_1 باشد و در داخل قطار توپی را بغلتانیم طوری که سرعت آن نسبت به قطار u_2 باشد سرعت توپ نسبت به ریل برابر است با $u_1 + u_2$. اما اگر توپ را به هوا پرتاب کنیم، مؤلفه عمودی سرعت آن نسبت به قطار و نسبت به ریل یکسان است. البته می‌توان مسئله را عام‌تر هم بررسی کرد. اگر \vec{u} و در نتیجه \vec{u}' همچنان بر محور z عمود باشند ولی به ترتیب با محورهای x و x' زوایای θ و θ' بسازند، می‌توان دید که روابط تبدیل سرعت به شکل زیر در می‌آیند

$$u' \cos \theta' = u \cos \theta - v \quad (۱۳)$$

$$u' \sin \theta' = u \sin \theta \quad (۱۴)$$

از تقسیم (۱۳) بر (۱۴) به دست می‌آید

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{u}} \quad (۱۵)$$

که زاویه θ' را بر حسب زاویه θ و اندازه سرعت‌های u و v به دست می‌دهد. همچنین برای یافتن اندازه u' ، مجذور (۱۴) و (۱۳) را با هم جمع می‌کنیم:

$$u' = u \left(1 - 2 \frac{v}{u} \cos\theta + \frac{v^2}{u^2} \right)^{1/2} \quad (16)$$

با همین روش می‌توانیم تبدیل شتاب را هم به دست آوریم. نتیجه جالب است:

$$a'_x = a_x \quad (17)$$

$$a'_y = a_y$$

$$a'_z = a_z$$

مقدار مؤلفه‌های شتاب برای همه ناظرها یکسان است. حالا اگر فرض کنیم اندازه جرم هم مستقل از ناظر باشد (فرضی که در مکانیک کلاسیک صحیح است) می‌توانیم بنویسیم

$$m\vec{a}' = m\vec{a} \quad (18)$$

این رابطه ظاهراً نشان می‌دهد که شکل قانون دوم نیوتون برای هر دو ناظر یکسان است؛ آیا نیرو تحت این تبدیلات عوض می‌شود؟ نوشتن معادله حرکت بر حسب پتانسیل مثال خوبی برای بررسی است. شکلی از قانون دوم نیوتون که با استفاده از پتانسیل (وابسته به مکان) نوشته می‌شود به صورت زیر است

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla U(r_{12}) \quad (19)$$

که در آن \vec{x} بردار مکان ذره متحرک، m جرم این ذره و U پتانسیلی است که ذره تحت اثر آن حرکت می‌کند. r_{12} نیز فاصله بین دو ذره است و می‌توانیم بنویسیم

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (20)$$

با توجه به تبدیل گالیلئو می‌توان دید که

$$r'_{12} = r_{12} \quad (21)$$

و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$U(r'_{12}) = U(r_{12}) \quad (22)$$

مشتقات پتانسیل نسبت به هر مختصه هم باید محاسبه شوند. برای مثال

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{dU}{dr_{12}} \cdot \frac{\partial r_{12}}{\partial x_1} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{dU}{dr_{12}} \cdot \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} \\
 -\frac{\partial U}{\partial x'_1} &= -\frac{dU}{dr'_{12}} \cdot \frac{\partial r'_{12}}{\partial x'_1} \\
 &= \frac{dU}{dr'_{12}} \cdot \frac{x'_2 - x'_1}{r'_{12}}
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x'_1} \quad (24)$$

اگر همین روش را در مورد مختصات دیگر هم به کار ببریم خواهیم داشت

$$-\nabla U = -\nabla' U \quad (25)$$

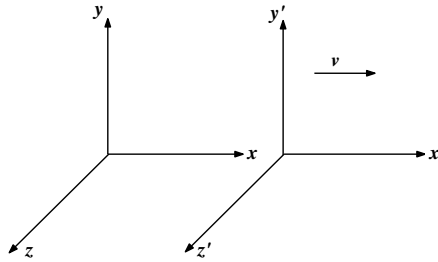
که اینجا منظور از ∇' شیب یا گرادیان نسبت به مختصات پریم داراست.

این محاسبات نشان می‌دهد که نیرو عوض نمی‌شود. بنابراین شکل معادله‌های حرکت نیوتون یکسان می‌ماند. توجه کنید که این گزاره برای هر پتانسیل شعاعی صادق است. در نتیجه می‌توان گفت که شکل معادلات حرکت در مکانیک نیوتونی و در نتیجه جواب آنها از دید ناظرهای لخت متفاوت، یکسان است. در واقع هم طرف راست و هم طرف چپ معادله (۱۹) تحت تبدیل چارچوب‌های لخت صورت خود را حفظ می‌کنند. این واقعیت به هموردایی معادلات حرکت تحت تبدیلات گالیله معروف است. اکنون دو ناظر لخت را در نظر بگیرید. با توجه به هموردایی معادلات حرکت در مکانیک نیوتونی، بگویید آیا هیچ آزمایش مکانیکی وجود دارد که به ما نشان دهد کدام چارچوب ساکن و کدام متحرک است؟ قطاری را فرض کنید که با سرعت کاملاً یکنواخت بر روی ریلی بدون اصطکاک و راست خط حرکت می‌کند و طوری ساخته شده است که از درون آن نمی‌توان چیزی را در بیرون دید. شخصی که در قطار باشد چگونه می‌تواند فقط بر اساس آزمایش‌های مکانیکی اظهار نظر کند که نسبت به سکوی ایستگاه در حال حرکت است؟ اگر قطار به یک پیچ برسد وضعیت چگونه است؟ با قدری تأمل می‌توان متوجه شد که ناظرهای لخت متفاوت از دید قوانین مکانیک هم‌ارز هستند.

۲.۲.۲ تبدیل لورنتز

اکنون با استفاده از اصل نسبیت و برخی تقارن‌های فضا-زمان تبدیل‌هایی را به دست می‌آوریم که توصیف یک رویداد از دید یک ناظر لخت را به توصیف همان رویداد از دید ناظر لخت دیگر مربوط می‌کند و جایگزین تبدیل گالیله می‌شود. برای سادگی، مجموعهٔ محورهای مربوط به ناظرهای لخت S و S' را مثل قبل و مطابق شکل (۷.۲) در نظر می‌گیریم: امتداد محورهای x و x' را منطبق بر هم فرض می‌کنیم و در ضمن امتداد v ، یا همان سرعت نسبی بین دو چارچوب را، موازی با محور x می‌گیریم. صفحات yz و $y'z'$ نیز با هم موازی‌اند. باید توجه داشت که تبدیل لورنتز مختص به این حالت خاص نیست ولی این حالت خاص شامل همهٔ خصوصیات است که از تبدیل لورنتز انتظار داریم. البته در بخش‌های بعد راجع به تبدیلات عام هم صحبت خواهیم کرد. به علاوه مانند حالت تبدیلات گالیله برای سادگی، فرض می‌کنیم مبدأ زمان دو چارچوب یکی است و در این زمان مبدأ مکان دو دستگاه منطبق است.

حالا به سراغ تبدیل میان دو دستگاه لخت می‌رویم. فرض کنیم رویداد مشخص P در چارچوب S با مختصات (t, x, y, z) و در S' با (t', x', y', z') توصیف شود. مجموعهٔ روابطی که این دو توصیف را به یکدیگر مربوط می‌کند چگونه است؟ این روابط باید نسبت به متغیرها (یعنی همان مختصات مکانی و زمانی) خطی باشد. درستی این مطلب را می‌توان با استفاده از اصل همگنی و همسانگردی فضا متوجه شد. همانطور که قبلاً توضیح داده شد اگر یک اندازه‌گیری معین را در دو نقطهٔ متفاوت از فضا با شرایط فیزیکی کاملاً یکسان انجام دهیم، بنابراین اصل همگنی باید نتیجهٔ هر دو یکی باشد. بنابراین اصل همسانگردی نتیجهٔ یک آزمایش در راستاهای مختلف فضا (در شرایط فیزیکی یکسان) باید نتایج یکسان داشته باشد.



شکل ۷.۲:

بدیهی است که بنا بر اصل نسبیت انتظار داریم همین گزاره‌ها در S' نیز معتبر باشد. می‌توان دید که اگر روابط تبدیل بین S و S' ، که مقیاس فضا و زمان یکسانی دارند، غیرخطی باشد این موضوع برقرار نخواهد بود و همگنی نقض خواهد شد. حال دوباره به شکل توجه کنید. اولاً، رابطه $x = const.$ معادله صفحه‌ای است موازی با صفحه yz و عمود بر محور x . نقطه‌های این صفحه همه دارای مختصه x یکسان‌اند. ثانیاً، با توجه به این نکته و شکل، تمام رویدادهایی که در S' روی صفحه $x' = 0$ قرار دارند در S با معادله صفحه $x = vt$ توصیف می‌شوند و بالعکس. پس این موضوع به اضافه خطی بودن روابط نتیجه می‌دهد که:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (26)$$

که در آن γ فقط تابعی است از سرعت v و از مختصات مستقل است (عملاً مانند یک ثابت رفتار می‌کند). حالا فرض کنید جهت محورهای x و x' و همزمان جهت سرعت v را معکوس کنیم و در ضمن جای متغیرهای پریم‌دار و بدون پریم را با هم عوض کنیم؛ وضعیت درست مشابه حالت اول که در شکل (۷.۲) نشان داده شد خواهد بود. اگر این دنباله از تبدیل‌ها را روی رابطه (۲۶) هم اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (27)$$

علت اینکه مجدداً از همان ضریب γ استفاده شده با توجه به توضیح بالا آشکار است. اکنون x' را از (۲۶) در (۲۷) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} x &= \gamma[\gamma(x - vt) + vt'] \\ &= \gamma^2 x - \gamma^2 vt + vt' \gamma \end{aligned} \quad (28)$$

بنابراین می‌توانیم t' را بر حسب x و t به دست آوریم

$$\begin{aligned} t' &= -\frac{\gamma^2 - 1}{v\gamma} x + t\gamma \\ &= \gamma\left(t - \frac{\gamma^2 - 1}{v\gamma^2} x\right) \end{aligned} \quad (29)$$

که با تعریف

$$V^2 \equiv \frac{v^2 \gamma^2}{\gamma^2 - 1} \quad (30)$$

خواهیم داشت

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{V^2} x \right) \quad (31)$$

توجه کنید که اگر $\gamma^2 > 1$ باشد $V^2 > 0$ و $\frac{v}{V^2} < 1$ می‌شود. ما هم همین فرض را می‌کنیم. پس $V^2 > 0$ است. از رابطه (۳۱) بر می‌آید که بعد فیزیکی V بعد سرعت است. پس این سرعت باید مشخصه فضا-زمان باشد. در نتیجه می‌توانیم دو رابطه تبدیل را به شکل زیر بنویسیم

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (32)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{V^2} x \right) \quad (33)$$

که در این روابط γ به صورت زیر به V مربوط می‌شود

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}}. \quad (34)$$

چون می‌دانیم γ تنها وابسته به v است به نظر می‌رسد که V باید مقدار ثابتی داشته باشد. ثابت بودن این سرعت را بعداً به طور مستقل اثبات می‌کنیم. پیش از آن بهتر است تکلیف تبدیل مختصات y و z را نیز روشن کنیم. اگر دوباره به شکل (۷.۲) دقت کنید خواهید دید که صفحه‌های $y = 0$ (یعنی صفحه xz) و $y' = 0$ (یعنی صفحه $x'z'$) همیشه بر هم منطبق‌اند. پس مستقل از مقدار مختصات x و z باید داشته باشیم

$$y' = Ay \quad (35)$$

که در آن یک ضریب مستقل از مختصات است. اکنون اگر جهت محورهای x و z را در هر دو دستگاه معکوس کنیم هیچ چیزی تغییر نمی‌کند و فقط جای S و S' عوض می‌شود. پس

$$y = Ay' \quad (36)$$

در نتیجه

$$A = \pm 1 \quad (37)$$

علامت منفی قابل قبول نیست زیرا در حد $v \rightarrow 0$ باید وضعیت به طور پیوسته به $y = y'$ تبدیل شود. با توجه به تقارن نسبت به y, z را برای مختصه z هم همین نتیجه به دست می‌آید:

$$y = y', \quad z = z' \quad (38)$$

روابط (۳۲)، (۳۳) و (۳۸) تبدیل لورنتز بین چارچوب های لخت S و S' را تعیین می کنند. اما قبل از این که بخواهیم راجع به این تبدیلات توضیح دهیم باید به وضعیت سرعت V رسیدگی کنیم!

فرض کنید دو چارچوب مرجع لخت S_1 و S_2 توسط تبدیل لورنتز L_1 به یکدیگر مرتبط شوند. همچنین بین چارچوب های لخت S_2 و S_3 نیز تبدیل لورنتز L_2 برقرار است. اکنون می خواهیم در مورد تبدیل بین S_1 و S_3 اظهار نظر کنیم. با توجه به این که طبق اصل نسبیت همه چارچوب های لخت در یک دسته هم ارزی قرار می گیرند و در نتیجه چارچوب ممتازی وجود ندارد، باید تبدیل بین S_1 و S_2 ، که آن را L_3 می نامیم، نیز یک تبدیل لورنتز باشد. حالا فرض کنید که سرعت V به تبدیل لورنتز L_1 و L_2 وابسته باشد یعنی مقدار آن برای دو تبدیل S_1 به S_2 و S_2 به S_3 به ترتیب V_1 و V_2 باشد؛ پس داریم

$$x_2 = \gamma_1(x_1 - v_1 t_1) \quad (39)$$

$$t_2 = \gamma_1\left(t_1 - \frac{v_1}{V_1^2} x_1\right)$$

و

$$x_3 = \gamma_2(x_2 - v_2 t_2) \quad (40)$$

$$t_3 = \gamma_2\left(t_2 - \frac{v_2}{V_2^2} x_2\right)$$

با قرار دادن روابط (۳۹) در (۴۰) و مقاداری محاسبات جبری خواهیم داشت

$$x_3 = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{v_1 v_2}{V_1^2}\right) \left[x_1 - \frac{v_1 + v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{V_1^2}} t_1\right] \quad (41)$$

$$t_3 = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{v_1 v_2}{V_1^2}\right) \left[t_1 - \frac{\frac{v_1}{V_1^2} + \frac{v_2}{V_2^2}}{1 - \frac{v_1 v_2}{V_1^2}} x_1\right] \quad (42)$$

روابط (۴۱) و (۴۲) نشان می دهند که اگر قرار باشد L_3 هم از نوع تبدیل لورنتز باشد باید $V_1^2 = V_2^2 = V^2$. بنابراین سرعت V مستقل از تبدیل است و یک ثابت جهانی برای همه دستگاه های لخت است. دوباره به تعریف γ نگاهی بیندازید:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}} \quad (43)$$

از آنجایی که x' کمیتی قابل اندازه گیری است، γ باید حقیقی باشد و در نتیجه $v \leq V$ ؛ بنابراین V نشان دهنده یک سرعت ثابت جهانی و حد بالای همه سرعت هاست. مقدار این سرعت باید از تجربه به دست آید. تا کنون همه آزمایش ها نشان داده اند که این سرعت برابر با سرعت نور در خلأ است که آن را با c نمایش می دهیم. از این طریق سرعت نوره شکل یک ثابت جهانی وارد مباحث فیزیکی می شود و در کنار ثابت های دیگر مانند ثابت پلانک h و ثابت گرانش G قرار می گیرد.

این نکته حایز اهمیت است که ما از پیش، هیچ فرضی راجع به بُعد و یا مقدار V انجام ندادیم و تنها اصل نسبیت به اضافه همگنی و همسانگردی فضا منجر به شکل مشخصی از تبدیل بین چارچوب های لخت شد که اینشتین آن را در مقاله ۱۹۰۵/۱۲۸۴ خود وارد کرد. اینشتین برای به دست آوردن تبدیل لورنتز از دو اصل نسبیت و نیز ثابت بودن سرعت نور استفاده کرد. اما اکنون می دانیم که برای رسیدن به تبدیل لورنتز، یا گالیله، اصل نسبیت کافی است. وجود یک سرعت حدی نتیجه این اصل و نیز خواص فضا زمان است.

حاشیه: تبدیل گسسته

در به دست آوردن تبدیل لورنتز گفته شد که اگر همگنی فضازمان را فرض کنیم خواهیم دید که باید تبدیل بین چارچوب‌های مرجع لخت خطی باشد. آیا واقعاً این طور است؟ یک تبدیل گسسته مهم که در زندگی روزمره با آن مواجه می‌شویم موضوع قاچ‌های زمانی روی سطح کره زمین است. همه می‌دانیم که با حرکت روی سطح زمین به سمت شرق یا غرب زمان به طور پیوسته تغییر می‌کند اما قرارداد جهانی مبنی بر این است که ساعت همه نقاطی که بین دو نصف‌النهار قرار دارند مقدار یکسانی را نشان می‌دهند و به محض گذر از خط مرزی بین این دو ناحیه مقدار ساعت یک جهش خواهد داشت. آیا با عبور از یک نصف‌النهار و وارد شدن به ناحیه مجاور، قوانین فیزیک تغییری خواهند کرد؟ دو ناظر همسایه که بدون فاصله یکی در شرق و دیگری در غرب نصف‌النهار قرار دارند در مورد نتیجه یک آزمایش واحد چه خواهند گفت؟

۳.۲ بعضی نتایج تبدیل لورنتز

۱.۳.۲ اتساع زمان

شاید دور از انتظارترین نتیجه تبدیل لورنتز، تغییر عمیق مفهوم متعارف زمان است. فرض کنید ساعت C' در نقطه x' از چارچوب S' به حال سکون قرار دارد. هم‌چنین فرض کنید S' با سرعت v در امتداد محور x نسبت به S در حرکت است. در زمان t'_1 (ثابت شده توسط C') یک ساعت C_1 در چارچوب S درست از همان محل C' عبور می‌کند (شکل ۸.۲). زمان ثبت شده به وسیله C_1 از تبدیل لورنتز به شکل زیر به دست می‌آید:

$$t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2}x') \quad (44)$$

در یک زمان بعد، ساعت C' زمان t'_2 را می‌خواند و در همان لحظه ساعت دیگر C_2 در S از همان محل C' عبور می‌کند. C_2 مقدار زیر را می‌خواند

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x') \quad (45)$$

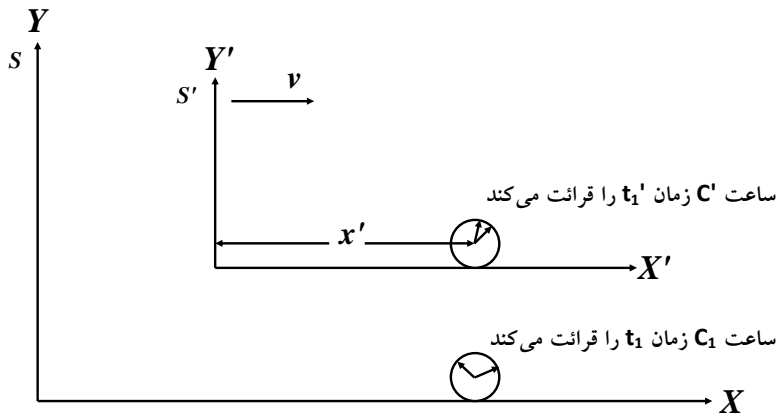
بنابراین از روابط بالا خواهیم داشت

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma\Delta t' \quad (46)$$

پس با توجه به این که γ همیشه بزرگ‌تر از ۱ است می‌توانیم بنویسیم

$$\Delta t > \Delta t' \quad (47)$$

برای تعبیر این نتیجه می‌توانید فرض کنید $\Delta t'$ فاصله زمانی بین دو «تیک» ساعت C' باشد. آنگاه بر طبق ساعت‌های روی S ، این دو تیک با هم به اندازه Δt فاصله دارند که بر اساس رابطه (۴۷) مقدارش از $\Delta t'$ بزرگ‌تر است. در نتیجه اگر ساعت‌های روی S



شکل ۸.۲:

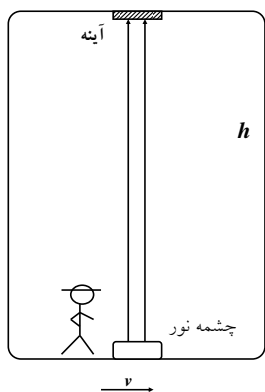
فاصله زمانی بین دو تیک را اندازه بگیرند، حاصل بزرگ‌تر از چیزی خواهد شد که در S' اندازه‌گیری شده است. بنابراین از دید ناظر S کلیه ساعت‌های روی S' کند کار می‌کنند: S می‌بیند که گذشت زمان در S' آهسته‌تر از گذشت آن در S است. این پدیده اتساع زمان نامیده می‌شود. اگر ساعتی در یک چارچوب مرجع ساکن باشد تندتر از هر حالت دیگری کار می‌کند و در این وضعیت گفته می‌شود که این ساعت ساکن، ویژه‌زمان را اندازه‌گیری می‌کند.

اتساع زمان مستقیماً از تبدیل لورنتز به دست می‌آید و به دلیل اینکه با تجربه روزمره ما از جهان اطراف تطبیق ندارد، پذیرش آن چندان ساده نیست ولی یک آزمایش ذهنی ساده به ما نشان خواهد داد که با فرض ثابت بودن سرعت نور می‌توان آن را توجیه کرد. فرض کنید ناظر A داخل قطاری است که با سرعت v نسبت به زمین حرکت می‌کند. یک منبع نور روی کف قطار قرار دارد و یک آینه به سقف در ارتفاع h بالاتر از منبع متصل است. یک درخش گسیل می‌شود، به سمت آینه می‌رود، و پس از بازتاب به سمت منبع برمی‌گردد (شکل ۹.۲).

از دید ناظر A مدت زمان حرکت نور از منبع به آینه برابر h/c و زمان برگشت هم همین طور است. پس مدت زمان کل حرکت درخش از دید ناظر A برابر است با

$$t_A = \frac{2h}{c} \quad (48)$$

در چارچوب ناظر B که نسبت به زمین ساکن است، قطار با سرعت v در حرکت است. مسیر نور مطابق شکل (۱۰.۲) است. نکته مهم ثابت بودن سرعت نور از دید هر دو ناظر است. اکنون سرعت نور در مسیرهای مورب در شکل (۱۰.۲) همان مقدار c است. نور در این مسیرها دارای یک مؤلفه افقی سرعت برابر v است و در نتیجه برای این که سرعت کل در مسیر مورب c بشود باید مؤلفه عمودی سرعت باریکه برابر با $\sqrt{c^2 - v^2}$ باشد. بنابراین زمانی که طول می‌کشد تا نور به آینه برسد $\frac{h}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ خواهد بود (چون طول مسیر عمود بر حرکت در اثر تبدیل لورنتز تغییر نمی‌کند). پس زمان کل برابر است با



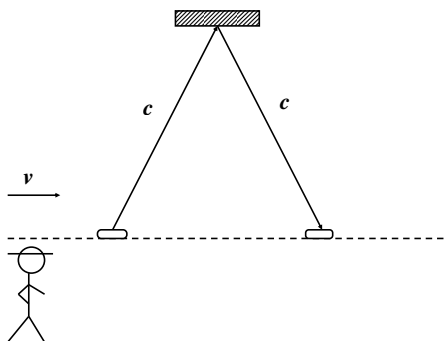
شکل ۹.۲:

$$t_B = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (49)$$

از تقسیم رابطه (۴۹) بر (۴۸) به دست می آوریم

$$t_B = \gamma t_A \quad (50)$$

که همان نتیجه به دست آمده قبل است: زمان حرکت نور از دید چارچوب B طولانی تر از چارچوب A است. یک نکته مهم را از یاد نبرید: اتساع زمان یک پدیده دو طرفه است. شما می توانید A را ساکن فرض کنید و بگویید B در حال حرکت نسبت به آن است. در نتیجه همان حکم قبلی را در مورد وضعیت جدید نیز می توان صادر کرد: زمان حرکت نور از دید ناظر A طولانی تر از ناظر B است.



شکل ۱۰.۲:

$$t_A = \gamma t_B \quad (51)$$

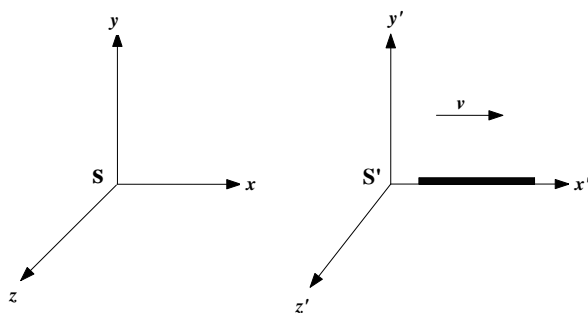
اما دو رابطه بالا در تضاد نیستند چون اصولاً قرار نیست درستی هر دو را با هم نگاه کنیم. وقتی در رابطه (۵۰) صحبت از بازه t_B

می‌کنیم باید دو رویداد ابتدا و انتهای بازه در یک مکان در چارچوب B روی داده باشند اما واضح است که همین دو رویداد نمی‌توانند در چارچوب A در یک مکان اتفاق افتاده باشند پس رابطه (۵۰) در این حالت برقرار نیست و به عکس. جالب است که توجه کنیم پدیده اتساع زمان برای همه بازه‌های زمانی، مخصوصاً دوره تناوب پدیده‌های تناوبی، برقرار است. آیا این موضوع می‌تواند شامل پدیده‌های بیولوژیک نیز بشود؟ B می‌بیند که قلب A آهسته‌تر می‌زند؟ آیا B زودتر پیر می‌شود؟ این سؤال را در بخش باطل‌نمای دوقلو بررسی خواهیم کرد.

۲.۳.۲ انقباض طول

نتیجه دیگری از تبدیل لورنتز این است که طول مطلق نیست: طول یک جسم بستگی به حرکت آن نسبت به چارچوبی که در آن اندازه‌گیری می‌شود دارد. برای توضیح مطلب، میله‌ای را در نظر بگیرید که در امتداد محور x از چارچوب S قرار دارد و با سرعت v در همین امتداد نسبت به S حرکت می‌کند. این میله در چارچوب S' که نسبت به S با سرعت v حرکت می‌کند، ساکن است (شکل ۱۱.۲). چون میله در S' ساکن است طول میله از دید ناظر S' برابر خواهد بود با

$$l_0 = x'_2 - x'_1 \quad (52)$$



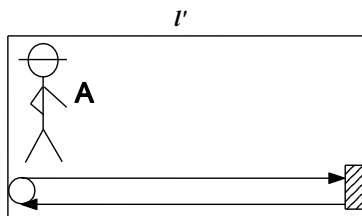
شکل ۱۱.۲:

l_0 را طول سکون یا ویژه طول میله می‌نامیم، که منظور طول میله در چارچوب سکون آن است. اکنون فرض کنید می‌خواهیم ببینیم طول میله از دید S چه مقدار است. برای این کار باید مختصه x دو انتهای میله را در یک زمان t ، که با ساعت‌های روی S اندازه‌گیری می‌شوند، بدانیم. فرض کنید x_1 و x_2 مختصات دو انتهای میله در زمان t از دید S باشند. این وضعیت را البته می‌توانستیم با عبارت زیر هم بیان کنیم: زمانی که دو انتهای میله منطبق بر نقاط x_1 و x_2 می‌شوند، هر دو ساعت واقع در x_1 و x_2 زمان t را نشان می‌دهند.

حالا با مراجعه به تبدیل لورنتز دیده می‌شود که باید داشته باشیم:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \quad (53)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \quad (54)$$



شکل ۲۱.۲:

طول میله از دید S برابر است با

$$l = x_2 - x_1 \quad (55)$$

توجه کنید که طول همان اختلاف مکان دو انتهای میله است وقتی که هر دو در یک زمان t در S اندازه‌گیری شوند. با استفاده از (۵۳) و (۵۴) خواهیم داشت

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l \quad (56)$$

و یا

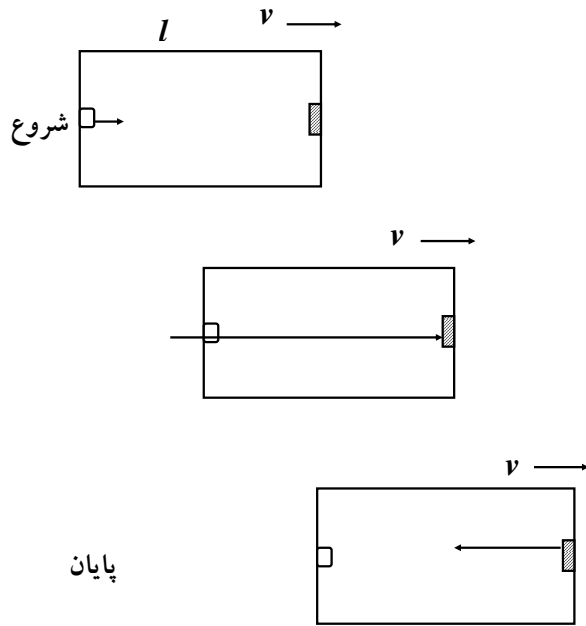
$$l = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} l_0 \quad (57)$$

که نتیجه می‌دهد

$$l < l_0 \quad (58)$$

پس طول میله از دید ناظر S ، که میله نسبت به آن متحرک است، کوتاه‌تر از طولی است که ناظر S' اندازه می‌گیرد. طول هر میله برای ناظر ساکن بیشینه است. این پدیده به نام انقباض طول معروف است و اثرهای واقعی فیزیکی در مشاهدات دارد. آیا انقباض طول به این معنی است که اگر به جسمی در حال حرکت نگاه کنیم آن را کوتاه‌تر از واقعیت می‌بینیم؟ آیا قطر خورشید، آن‌گونه که به نظر ما می‌رسد کوچک‌تر از واقعیت است؟ پاسخ به این سوال ساده نیست. چون برای پاسخ باید ساز و کار رویت پذیری را در نظر گرفت. در چند دهه گذشته تحقیقات وسیعی در این مورد انجام شده است که نتایج آن را می‌توانید در مقاله‌ها و وبگاه‌های گوناگون که در این کتاب به آنها اشاره شده است بیابید. خلاصه آن که جسم متحرک را ما کوتاه شده نمی‌بینیم، بلکه چرخیده می‌بینیم.

انقباض طول را هم می‌توان به روش آزمایش ذهنی بخش قبل، به شرط اینکه ابتدا اتساع زمان را بپذیریم به دست آورد. قطار قسمت قبل را به خاطر بیاورید: ناظر A در داخل قطاری قرار دارد و طول قطار را برابر با l' اندازه می‌گیرد و ناظر B روی زمین است. یک چشمه نور در انتهای واگن و آینه‌ای در جلوی آن قرار دارد و قطار با سرعت v نسبت به زمین حرکت می‌کند (شکل ۱۲.۲). چشمه یک درخش نور به سمت آینه گسیل می‌کند و نور پس از بازتاب از آینه به سمت چشمه باز می‌گردد. با محاسبه زمان رفت و برگشت از دید هر دو ناظر می‌توانیم طول واگن از دید B را به دست آوریم. در چارچوب A زمان رفت و برگشت برابر است با



شکل ۳.۱.۲:

$$t_A = \frac{2l'}{c} \quad (59)$$

اما وضعیت از دید ناظر B به این آسانی نیست (شکل ۳.۲.۱). فرض کنید طول واگن از دید B برابر با l باشد (از دید مکانیک نیوتونی l و l' برابرند ولی ممکن است در نسبیت این طور نباشد، ببینید!). اگر زمان حرکت نور در مسیر رفت t_1 و در مسیر برگشت t_2 باشد کل فاصله‌ای که نور در مسیر رفت طی می‌کند $ct_1 + vt_1$ و در مسیر برگشت $ct_2 - vt_2$ است. پس زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_B = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \gamma \quad (60)$$

اما با توجه به رابطهٔ اتساع زمان و روابط (۵۹) و (۶۰) به دست می‌آوریم

$$l = \frac{l'}{\gamma} \quad (61)$$

با توجه به این که $\gamma \geq 1$ ، از دید B طول قطار کوتاه‌تر از طول آن از دید ناظر A است. حتماً توجه کرده‌اید که اگر ابتدا اتساع زمان را فرض نکرده بودیم نمی‌توانستیم انقباض طول را به دست آوریم. l' ویژه طول قطار است یعنی طول قطار زمانی که در چارچوب سکون آن اندازه‌گیری شود. این پدیده کاملاً واقعی است و یکی از نمودهای تجربی مهم آن افزایش نیمه عمر ذره پرتوزایی است که با سرعت نزدیک به نور حرکت کند.

حاشیه: شکل ظاهری اجسام

یکی از مسائلی که در ابتدای دهه ۶۰ میلادی توجه را به خود جلب کرد و از آن به بعد کارهای متنوعی در این زمینه انجام شد، مسئله شکل ظاهری اجسام گسترده (غیر نقطه‌ای) از دید ناظرهای مختلف در نسبیت است. می‌دانیم که پدیده انقباض طول در امتداد حرکت نسبی باعث کاهش ابعاد از دید ناظرهای متحرک در این امتداد می‌شود. اما در شکل ظاهری اجسام علاوه بر اینکه باید به تنها انقباض طول موثر نیست. هنگامی که یک ناظر جسمی را می‌بیند یا از آن عکسبرداری می‌کند فوتون‌های مختلف گسیل شده از نقاط مختلف جسم در یک زمان به شبکیه چشم ناظر یا صفحه عکاسی می‌رسند. با توجه به این مطلب باید فوتون‌های گسیل شده در زمان‌های متفاوت از نقاط مختلف حرکت کرده باشند: فوتون‌های نقاط نزدیک‌تر دیرتر و نقاط دورتر، زودتر. به همین خاطر اختلاف زمانی بین جسم و ناظر نه تنها منجر به انقباض طول می‌شود بلکه شکل ظاهری جسم را دچار اعوجاج می‌کند. محاسبات و شبیه‌سازی‌های مختلف در این زمینه انجام شده: از اشکال هندسی ساده مانند مکعب و کره تا اجسام پیچیده‌تر. نشانی برخی وب‌گاه‌ها را در بخش مراجع ببینید.

همچنین می‌توانید به دو مقاله اصلی و اولیه در این زمینه مراجعه کنید:

J. Terrel, "Invisibility of the Lorentz contraction", Phys Rev, 116, 1041, 1959. (۱)

V.F. Weisskopf, "The visual appearance of rapidly moving objects", Physics Today, sep.1960, 24. (۲)

۴.۲ بازه‌های فضازمانی

هندسه مینکوفسکی، به دلیل ترکیب زمان و فضا که متفاوت هستند، گاهی رفتار مغایر با هندسه آشنا اقلیدسی دارد. از این جهت لازم است با تفاوت‌ها و شباهت‌های آن دو آشنا شویم.

۱.۴.۲ طول ناوردای لورنتزی

پیش از این، زمانی که در فضای معمولی سه‌بعدی با مکانیک نیوتونی سر و کار داشتیم، هنگام صحبت از فاصله دو نقطه به طور هندسی منظورمان طول برداری است که ابتدای آن یکی از نقاط و انتهایش نقطه دیگر باشد. این تعریف فاصله منطبق بر فاصله فیزیکی بین این دو نقطه در فضای معمولی است. اکنون اگر بخواهیم از بازه بین دو رویداد در نسبیت صحبت کنیم باید توجه کنیم که دیگر هر نقطه با سه مختصه فضایی توصیف نمی‌شود بلکه مختصه چهارمی نیز که زمان است در این توصیف دخالت می‌کند. بنابراین طبیعی است که بازه بین دو رویداد علاوه بر فاصله فضایی، به فاصله زمانی بین آن دو نیز بستگی داشته باشد. پیش از این که تعریف بازه بین دو رویداد را ذکر کنیم باید به یک نکته توجه کنیم. در مکانیک نیوتونی در فضای سه‌بعدی، فاصله بین دو نقطه در گذار از یک چارچوب لخت به چارچوب دیگر تغییر نمی‌کند. فاصله دو نقطه به صورت زیر است

$$\Delta R^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (62)$$

که در آن Δx و Δy و Δz تفاضل مختصات بین دو نقطه است. بازه بین دو رویداد نسبی را هم مانند حالت قبل به شکل مجموعی از جملات مجذور تعریف می‌کنیم که خاصیت فوق را داشته باشد، یعنی تحت تبدیل بین چارچوب‌های لخت (تبدیل لورنتز)

ناوردا باشد. این بازه که به بازه فضازمانی معروف است به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (63)$$

می‌بینید که این بازه هم از جملات مجذوری تشکیل شده است؛ از علامت‌های منفی در بخش فضایی نهراسید. توجیه می‌شوند! در ضمن برای این که همه جمله‌ها از یک بعد باشند باید جمله Δt را در c ضرب کرد. از دید ناظر S' نیز همین بازه به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad (64)$$

آنگاه تحت تبدیل لورنتز خواهیم داشت

$$\Delta s'^2 = c^2 \left[\gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \right]^2 - [\gamma (\Delta x - v \Delta t)]^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (65)$$

$$= \gamma^2 \left(c^2 \Delta t^2 - \frac{v^2}{c^2} \Delta x^2 + 2v \Delta x \Delta t \right) - \gamma^2 (\Delta x^2 + v^2 \Delta t^2 - 2v \Delta x \Delta t) - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (66)$$

با مختصری محاسبه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= \Delta s^2 \end{aligned} \quad (67)$$

رابطه (67) نشان می‌دهد که بازه فضازمانی بین دو رویداد تحت تبدیل لورنتز ناوردا است. این همان خصوصیتی است که در مورد بازه‌ها در مکانیک نیوتونی هم سراغ داشتیم. در واقع بازه فضازمانی را طبق رابطه (63) طوری تعریف کردیم که تحت تبدیل لورنتز ناوردا باشد. این روش در تعریف کمیت‌های جدید در نسبیت معمول است: اصل نسبیت ما را مجبور می‌کند که کمیت‌های فیزیکی مورد استفاده در نظریه را طوری تعریف کنیم که در گذار از یک چارچوب لخت به چارچوب دیگر هموردا باشند.

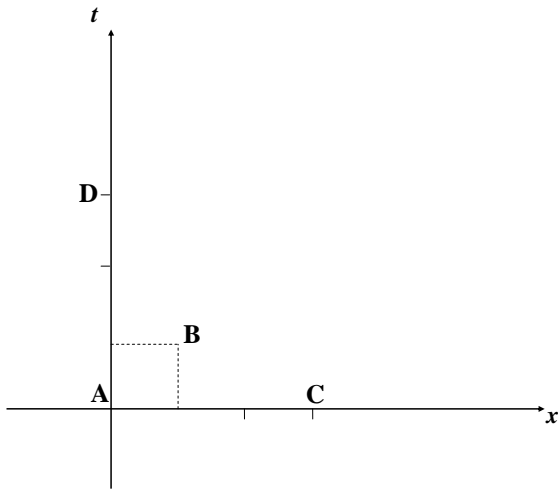
۲.۴.۲ ویژه‌زمان

هرگاه فاصله دور رویداد بی‌نهایت کوچک باشد آنگاه Δ به دیفرانسیل تبدیل می‌شود و می‌توان نوشت:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (68)$$

باز هم یادآوری می‌کنیم نگران منفی‌های جلوی مختصات نباشید و دقت کنید که از این به بعد در مجموعه واحدهایی کار می‌کنیم که در آن سرعت نور را برابر با یک گرفته‌ایم تا فرمولها ساده‌تر شوند (پیوست B را ببینید). البته در محاسبات عددی وارد کردن مقدار سرعت نور را به خاطر داشته باشید. جمع جبری مجذورها در سمت راست تداعی یک متریک می‌کند؛ از این جهت است که ds^2 را متریک فضازمان مینکوفسکی می‌نامیم. مختصات x, t چیزی جز برچسب‌های فضازمانی نیستند. مهم است که بدانیم کدام کمیت‌ها ناوردا هستند و این کمیت‌های ناوردا چه رابطه‌ای با مختصه‌ها دارند. ساعتی را در نظر بگیرید که در مبدأ مختصات ساکن است. برای این ساعت $dx = dy = dz = 0$ است. بنابراین به دست می‌آید $ds = dt$. پس برای ساعت ساکن زمان t و کمیت s با هم برابرند. از این جهت s را ویژه‌زمان ساعت (ناظر) می‌نامیم. حالا اگر ساعتی با سرعت v نسبت به ساعت (ناظر) ساکن در حرکت باشد، داریم:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 \left(1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right) = dt^2 (1 - v^2) \quad (69)$$



شکل ۲.۴۱:

در این صورت می‌بینید که t با ویژه زمان برابر نیست؛ آهنگ زمان ساعت متحرک با ویژه زمانش، یعنی آهنگ ساعت ساکن برابر نیست. همین واقعیت است که به اثراتساع زمان منجر می‌شود. توجه کنید که به دلیل انتخاب $c = 1$ در این رابطه v^2 ظاهر شده است و نه $(\frac{v}{c})^2$.

۳.۴.۲ بازه‌های فضازمانی

بازه‌ی فضازمانی به علت وجود علامت‌های منفی می‌تواند باعث منفی شدن Δs^2 شود. معنای آن چیست؟ بدون این که بخواهیم وارد بحث‌های ریاضی شویم باید بگوییم که این موضوع نشانه تفاوت هندسه نسبت خاص با هندسه‌ی ساده مکانیک کلاسیک است. مفهوم این جمله را در فصل سوم مفصل‌تر بیان می‌کنیم ولی اکنون با یک مثال ساده مطلب را روشن می‌کنیم. برای ساده کردن مثال، و با توجه به این که Δy و Δz تحت تبدیل عوض نمی‌شوند، در محاسبه بازه فضازمانی این دو متغیر را کنار می‌گذاریم و هر رویداد را با دو مختصه x و t توصیف می‌کنیم. به همین منظور دستگاه مختصاتی در نظر می‌گیریم که محور افقی آن x و محور عمودی آن t است (شکل ۲.۴۱). در این چارچوب چهار رویداد A و B و C و D را که مختصات آن‌ها در شکل مشخص شده است بررسی می‌کنیم. اتفاقات جالبی می‌افتد:

بازه‌ی بین دو رویداد A و B صفر است،

$$\Delta s^2 = (t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = 0 \quad (70)$$

به همین ترتیب دیده می‌شود که مجذور بازه میان A و D مثبت، میان A و C منفی، و میان B و D مثبت است. جالب‌ترین که مجموع دو ضلع یک مثلث می‌تواند کوچک‌تر از ضلع سوم بشود! مثلاً برای مثلث ABD داریم

$$\overline{AD} = ۳, \overline{AB} = ۰, \overline{BD} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳} \quad (۷۱)$$

پس

$$\overline{AD} > \overline{AB} + \overline{BD} \quad (۷۲)$$

بنابراین در فضای رویدادها، خط مستقیم کوتاه‌ترین راه نیست! اکنون می‌توانیم با توجه به تعریف بازه فضا زمانی آن را به سه نوع مختلف تقسیم کنیم. اما قبل از آن فرض می‌کنیم مبدأ چارچوب لخت، همان رویداد در مبدأ باشد و در نتیجه مختصات آن همگی صفراند. در این صورت به جای Δs^2 ، کمیت s^2 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$s^2 = t^2 - x^2 \quad (۷۳)$$

که در آن x و t مختصه‌های رویداد انتهایی‌اند. در این جا چون مختصات عمود بر جهت حرکت نسبی (یعنی y و z) تحت تبدیل لورنتز تغییر نمی‌کنند آن‌ها را در s^2 نوشته‌ایم، گرچه تعریف کامل شامل جملات y^2 و z^2 نیز خواهد بود. اکنون با توجه به وضعیت رویداد انتهایی می‌توان سه حالت مختلف برای این کمیت، که در واقع مجذور بازه بین دو رویداد است، فرض کرد:

$$(۱) \quad s^2 > ۰, \text{ بازه زمان گونه}$$

در این حالت می‌توان نوشت

$$x^2 < t^2 \quad (۷۴)$$

پس

$$\left| \frac{x}{t} \right| < ۱ \quad (۷۵)$$

اکنون از دید چارچوب پریم دار به مسأله نگاه کنید

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma t \left(\frac{x}{t} - v \right) \quad (۷۶)$$

برای این که $x' = ۰$ باشد، یعنی رویداد انتهایی روی محور زمان دستگاه لخت پریم دار قرار گیرد، باید $\frac{x}{t} = v$ ، یعنی چارچوب لخت پریم دار با سرعت v نسبت به چارچوب لخت اولیه حرکت می‌کند. پس اگر بازه بین دو رویداد زمان گونه باشد همیشه امکان دارد چارچوبی را پیدا کنیم که دو رویداد در آن در یک مکان رخ دهند. در این حالت با توجه به ناوردایی بازه فضا زمانی می‌توان نوشت

$$s^2 = t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 = t'^2 \quad (۷۷)$$

بنابراین

$$s = t' \quad (۷۸)$$

یعنی بازه فضا زمانی دو رویداد از دید ناظر پریم دار همان ویژه زمان است.

$$(۲) \quad s^2 < ۰, \text{ بازه فضاگونه}$$

در این وضعیت داریم

$$x^2 > t^2 \quad (۷۹)$$

پس

$$\left| \frac{t}{x} \right| < ۱ \quad (۸۰)$$

از دید ناظر پریم دار

$$t' = \gamma(t - vx) = \gamma x \left(\frac{t}{x} - v \right) \quad (۸۱)$$

برای این که $t' = ۰$ باشد باید داشته باشیم

$$\frac{t}{x} = v \quad (۸۲)$$

یا

$$v = \frac{t}{x} \quad (۸۳)$$

حال با توجه به رابطه (۸۰) داریم

$$v < ۱ \quad (۸۴)$$

پس همیشه می توان یک چارچوب لخت پیدا کرد که در آن دو رویداد فضاگونه به طور همزمان اتفاق بیفتند، یعنی هر دو روی محور x' قرار گیرند.

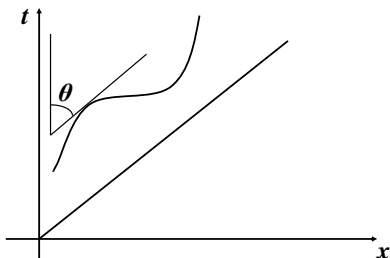
$$(۳) \quad s^2 = ۰, \text{ بازه نورگونه}$$

در این حالت

$$x^2 = t^2 \quad (۸۵)$$

یا

$$\left| \frac{x}{t} \right| = ۱ \quad (۸۶)$$



شکل ۵.۱.۲:

این جا دیگر نمی توان چارچوبی پیدا کرد که دو رویداد در آن همزمان باشند یا در یک مکان روی دهند. اما در هر چارچوبی سیگنالی که از یک رویداد گسیل شود در رویداد دیگر یافت می شود.

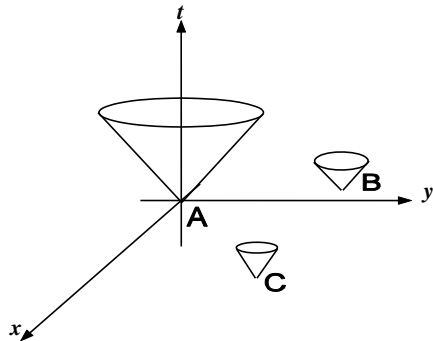
حالا شما می توانید نقش این تقسیم بندی را ملاحظه نمایید. اگر بازه بین دو رویداد زمان گونه یا نورگونه باشد این دو رویداد می توانند سیگنال ردوبدل کنند و با این که نیرو و میدان بین آن دو تبادل شود. به همین دلیل این دو رویداد می توانند ارتباط علت و معلولی داشته باشند. اما در مورد بازه های فضاگونه وضعیت طور دیگری است. اگر سیگنالی بخوهد بین دو رویداد فضاگونه ردوبدل شود باید با سرعت بیش از نور حرکت کند که ممکن نیست؛ پس این دو رویداد فضاگونه رابطه علی ندارند.

۵.۲ نمودارهای فضازمانی

چارچوب مختصاتی را که قبلاً رسم کرده بودیم به خاطر بیاورید: محور افقی x و محور عمودی t است. اگر فعلاً از مختصات y و z که عمود بر امتداد سرعت نسبی هستند صرف نظر کنیم، هر رویداد با یک نقطه از این فضای دوبعدی متناظر خواهد بود. اکنون حرکت هر ذره، یعنی رویدادهای متوالی حضور ذره در نقاط مختلف و در زمان های متفاوت، در این صفحه به شکل یک خم نمایش داده می شود. هر خمی که نمایشگر وضعیت یک ذره در زمان های متفاوت در صفحه رویدادها باشد جهان خط آن ذره نامیده می شود. طبیعی است که جهان خط هر ذره ساکن خطی عمود بر محور افقی و جهان خط ذره ای که با سرعت ثابت حرکت می کند یک خط راست است که از مبدأ می گذرد و با محور زمان زاویه کمتر از 45° درجه می سازد؛ حرکت شتابدار نیز یک منحنی به ما خواهد داد (شکل ۱۵.۲)؛ اگر در هر نقطه مماس بر منحنی را رسم کنیم و زاویه آن را با محور عمودی θ بنامیم خواهیم داشت

$$\tan\theta = \frac{dx}{dt} = u \quad (۸۷)$$

چون $u < 1$ یعنی u کوچکتر از سرعت نور است، بنابراین $\tan\theta < 1$ و $\theta < 45^\circ$. در نتیجه اگر بخواهیم خمی را به عنوان جهان خط یک ذره در نظر بگیریم هیچگاه نباید زاویه مماس بر منحنی با محور عمودی از 45° بیشتر شود. در ضمن به سادگی می توان دید که جهان خط یک باریکه نور بسته به این که به مبدأ نزدیک یا از آن دور می شود نیمساز ربع اول یا دوم خواهد بود. اکنون اگر بخواهیم یک بعد فضایی دیگر هم به x اضافه کنیم مسیر نور به جای این که روی نیمساز باشد روی مخروطی خواهد بود که زاویه رأس آن 45° است. در شکل ۱۶.۲، رویدادهای A ، B و C نمایشگر روشن شدن چراغ، در نقاط مختلف فضا هستند.

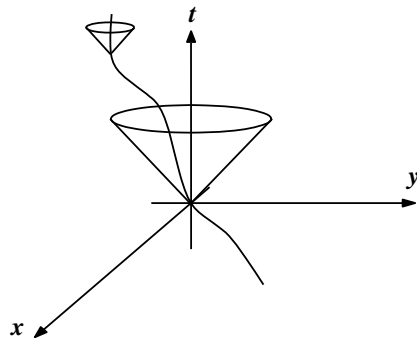


شکل ۶۱.۲:

پرتوهای نور در هر لحظه به محیط دایره‌ای می‌رسند که شعاع آن مرتباً زیاد می‌شود. این پدیده نمود دو بعدی انتشار امواج کروی است. به همین دلیل اصطلاحاً مکان هندسی جهان خط نور را که از نقطه‌ای گسیل می‌شود مخروط نور می‌نامند. با توجه به بحث قبل، جهان خط هر ذره واقعی در هر نقطه باید درون مخروط نور آن نقطه قرار بگیرد (شکل ۱۷.۲). اکنون فرض کنید می‌خواهیم مجموعهٔ محورهای مختصات مربوط به دستگاه لخت S' را هم در همین صفحهٔ رویدادها نمایش دهیم. روابط تبدیل لورنتز را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (۸۸)$$

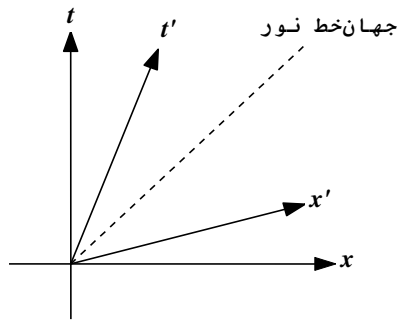
$$t' = \gamma(t - vx)$$



شکل ۷۱.۲:

اگر بخواهیم در این صفحه مختصات محورهای مختصات دستگاه پریم دار را رسم کنیم باید بگوییم که محور x' هم ارز با خطی به معادلهٔ $t' = 0$ و محور t' خط به معادلهٔ $x' = 0$ است. از روابط (۸۸) به دست می‌آوریم

$$x' = 0 \rightarrow x = vt \quad (۸۹)$$



شکل ۸.۱.۲:

$$t' = 0 \rightarrow t = vx$$

این دو محور را در شکل ۱۸.۲ ملاحظه می‌کنید. توجه داشته باشید که زاویه بین محوره‌های x و x' با زاویه بین محوره‌های t و t' مساوی است. اگر این زاویه را α بنامیم رابطه زیر برای آن برقرار است:

$$\tan \alpha = v \quad (90)$$

همچنین جهان خط نور در هر دو دستگاه بدون پریم و پریم دار نیمساز زاویه بین محورها باقی می‌ماند و به خاطر ناوردایی سرعت نور این دو نیمساز بر هم منطبق‌اند. از شکل ۱۸.۲ دیده می‌شود که تبدیل لورنتز یک دستگاه مختصات راست گوشه را به دستگاه مایل تبدیل می‌کند.

برای مقایسه بازه‌های فضایی و زمانی دو ناظر لازم است مقیاس روی محوره‌های مختصات دستگاه‌های بدون پریم و پریم دار را مشخص کنیم. برای این کار از ناورداد بودن بازه فضازمانی در گذار از یک چارچوب به چارچوب دیگر استفاده می‌کنیم

$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 \quad (91)$$

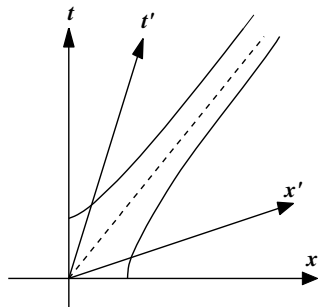
از نقطه واحد روی محور x' با مختصات $t' = 0$ و $x' = 1$ مشخص می‌شود. با قرار دادن این مقادیر در (۹۱) می‌بینیم که این نقطه تقاطع محور x' با هذلولی

$$x^2 - t^2 = 1 \quad (92)$$

به دست می‌آید. به همین طریق نقطه واحد بر روی محور t' ($x' = 0, t' = 1$) از تقاطع محور t' با هذلولی

$$t^2 - x^2 = 1 \quad (93)$$

به دست می‌آید (شکل ۱۹.۲).



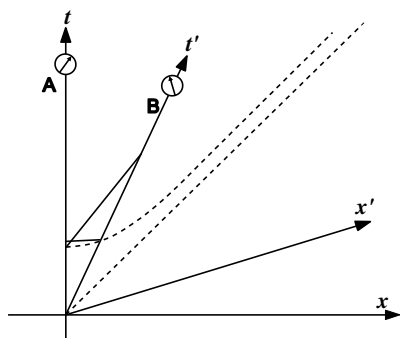
شکل ۹۱.۲:

اکنون به عنوان مثال یکی از نتایجی را که قبلاً ملاحظه کردیم، یعنی اتساع زمان، با استفاده از نمودارهای فضازمانی بررسی می‌کنیم. فرض کنید ناظر B با سرعت v نسبت به ناظر A حرکت می‌کند. چه رابطه‌ای میان آهنگ ساعت‌های A و B وجود دارد؟ با توجه به ناوردایی بازه فضازمانی می‌توانیم بنویسیم:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt'^2 - dx'^2 \quad (94)$$

ساعت B در دستگاه S' ساکن است پس برای جهان خط ساعت B داریم $dx' = 0$. همین جهان خط در دستگاه S با تابع $x(t)$ بیان می‌شود (شکل ۲۰.۲). سرعت این ساعت در دستگاه S برابر با $v = \frac{dx}{dt}$ است. از رابطه (۹۴) داریم

$$\begin{aligned} dt^2 - dx^2 &= dt'^2 \\ dx' &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$



شکل ۲۰.۲:

و از آنجا

$$dt' = dt\sqrt{1-v^2} \quad (96)$$

روشن است که $dt' < dt$ پس به نظر A آهنگ ساعت B کندتر شده است. ناظر B چه می بیند؟ از دیدگاه این ناظر ساعت A که در مبدأ دستگاه S قرار دارد، یعنی برایش $dx = 0$ ، متحرک است و جهان خط آن با تابع $x'(t')$ داده می شود. پس می توانیم بنویسیم

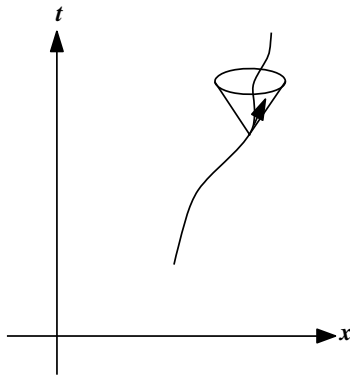
$$dt'^2 = dt^2 - dx'^2 \quad (97)$$

$$dx = 0$$

و یا

$$dt = dt'\sqrt{1-v^2} \quad (98)$$

حالا $dt < dt'$ ، یعنی از دید ناظر B آهنگ ساعت A کند شده است. پس اثراتساع زمان، متقابل است. باید همواره توجه داشت که رابطه (۹۵) به ازای $x' = const$ ، ولی رابطه (۹۷) به ازای $x = const$ برقرار است. بی توجهی به این شرط باعث سوء تفاهم های بی شمار در تاریخ نسبیت شده است. در مورد آهنگ ساعت ناظرهای شتاب دار چه می توان گفت؟ ناظر دلخواهی را در نظر بگیرید (شکل ۲۱.۲). جهان خط این ناظر یک خم است.



شکل ۲۱.۲:

پس در هر لحظه می توان دستگاه لختی یافت که ناظر شتاب دار نسبت به آن ساکن باشد. این دستگاه S را دستگاه سکون لحظه ای ناظر می نامند و محور زمان این دستگاه در لحظه مورد نظر بر جهان خط ناظر مماس است. اگر تأثیر شتاب را روی ساعت نادیده بگیریم آنگاه می توان زمان t' را با زمان ناظر شتاب دار یکسان دانست. فرض کنید (x', t') مختصات این دستگاه باشد. داریم

$$ds^2 = dt'^2 \quad (۹۹)$$

و یا

$$ds = dt' \quad (۱۰۰)$$

پس بازه فضا زمانی ds برابر است با بازه های زمانی که ساعت همراه ناظر شتاب دار اندازه می گیرد و به این جهت همان ویژه زمان ناظر است. ویژه زمان کمیتی است که تحت تبدیل لورنتز ناورد است و می توان از آن به عنوان پارامتری روی جهان خط ناظر نیز استفاده کرد. ناوردا بودن ویژه زمان آن را به کمیتی مهم در نسبیت خاص تبدیل می کند.

۶.۲ همزمانی

نتیجه مهم دیگر از تبدیل لورنتز این است که رویدادهای همزمان در یک چارچوب لخت لازم نیست. در چارچوب های لخت دیگر همزمان باشند. فرض کنید دو رویداد ۱ و ۲ در چارچوب S همزمان اند، یعنی $t_1 = t_2$ ؛ این رویدادها در دو مکان مختلف x_1 و x_2 اتفاق می افتند. از دید ناظر S' می توان نوشت

$$t'_2 - t'_1 = \gamma[(t_2 - vx_2) - (t_1 - vx_1)] = \gamma(x_1 - x_2)v \neq 0 \quad (۱۰۱)$$

در این رابطه t'_1 زمان خوانده شده از ساعت S' است که با رویداد ۱ در زمان t_1 و در مکان x_1 از S منطبق است. پس رویدادهایی که در S همزمان دیده می شوند در S' این گونه نیستند. در واقع ترتیب زمانی رویدادهای ۱ و ۲ به علامت $x_1 - x_2$ و v بستگی دارد. تنها زمانی که هر دو رویداد در یک نقطه اتفاق بیفتند، یعنی $x_1 = x_2$ ، رویدادها در همه چارچوبها همزمان خواهند بود. بنابراین همزمانی امری مطلق نیست؛ از این رو باید روش همزمان کردن ساعتها را هم به دقت بررسی کرد.

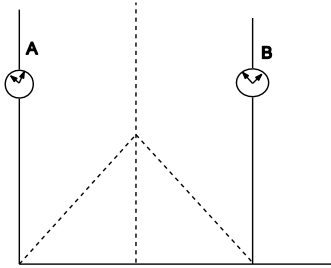
۱.۶.۲ همزمان کردن ساعتها

اکنون که صحبت از همزمان کردن ساعتها به میان آمد، بد نیست قدری راجع به این موضوع که یکی از بخش های اصولی در سینماتیک نسبیتی است صحبت کنیم. بررسی این مطلب در واقع به معنای پاسخ دادن به این پرسش است که در یک چارچوب لخت ساعت های دور از هم چگونه همزمان می شوند؟

جواب در فیزیک کلاسیک این است: ساعتها همزمان فرض می شوند به طوری که همگی در هر دستگاه، همواره زمان نیوتونی t را نشان می دهند. روش اجرایی آن می تواند یکی از طرق زیر باشد:

الف) همزمان کردن درون دستگاهی

به روشی می گویند که بتوان در هر دستگاه آن اجرا کرد و به دستگاهی دیگر وابسته نباشد. مثلاً از این طریق که دو ساعت کنار هم همزمان شده را به آهستگی از هم دور کنیم. این روش به نام روش انتقال ساعتها معروف است. روش دیگر هم این است که از یک منبع نور که در وسط فاصله میان دو ساعت قرار دارد، همزمان دو درخش به سمت ساعت گسیل و هر ساعت به محض دریافت نور مقدار مشخص تنظیم شود. این روش به نام روش اینشتین یا روش نوری شناخته شده است. این دو روش مستقل از چارچوب است و صرفاً به پدیده فیزیکی مستقل از چارچوبها وابسته است.



شکل ۶.۲.۲: دو ساعت تنها در صورتی همزمان هستند که ناظر میان آن دو سیگنال‌های گسیل شده از این دو را همزمان دریافت کند.

ب) همزمان کردن برون دستگاهی

دستگاهی را مانند اتر، ممتاز در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ساعت‌ها در آن به روشی همزمان شده باشند. سپس با استفاده از این دستگاه ساعت‌ها را در دستگاه‌های دیگر همزمان می‌کنیم. چون در فیزیک کلاسیک t ثابت فرض می‌شود، می‌توانیم روش انتقال ساعتها را در هر دستگاه دیگری نیز به کار ببریم. اما روش اینشتین یا روش نوری نتیجه دیگری به دست می‌دهد. بنابراین ساعت‌هایی که به روش نوری میزان شده‌اند اشتباه کار می‌کنند. به این ترتیب در فیزیک نیوتونی تنها روش همزمان کردن، که همواره به $t = t'$ می‌انجامد، روش انتقال ساعت‌هاست. به این ترتیب، هر دستگاه لخت می‌تواند از حیث روش همزمانی نیز با دستگاه اتر هم‌ارز باشد که این مسئله لازمه نسبیت گالیله است.

اما پاسخ به این سؤال در نسبیت این است: تمام دستگاه‌های لخت هم‌ارزند پس باید روش همزمان کردن یکسانی نیز برای تمام دستگاه‌های لخت در نظر گرفت. دو روش درون دستگاهی را شناختیم: روش انتقال ساعتها و روش نوری. اینشتین روش نوری را به کار برد. اما امروزه می‌دانیم که روش انتقال ساعت‌ها هم به همان اندازه مجاز است و دلیلی نداریم که یکی را بر دیگری ترجیح دهیم. به هر حال ما در این جا تنها روش اینشتین را بررسی می‌کنیم. اگر روش همزمانی را در دستگاه‌های مختلف یکسان در نظر نگیریم آنگاه هم‌ارزی دستگاه‌های لخت را در مقابل قوانین طبیعی به صورت تصنعی از بین برده‌ایم؛ اما همان طور که گفتیم همزمانی یک قرارداد است و هر قراردادی هم مجاز است. برای مثال، می‌توانیم در دستگاه S' همزمانی اینشتین در تبدیل لورنتز را طبق رابطه زیر تغییر دهیم:

$$t' \longrightarrow t' + f(x) \quad (102)$$

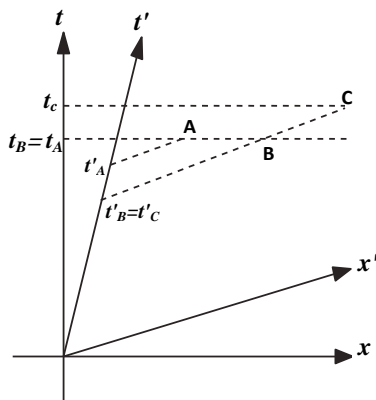
که در آن $f(x)$ تابعی است دلخواه. این بدان معنی است که زمان صفر ساعت‌ها در مکان x به اندازه $f(x)$ نسبت به ساعت‌های اینشتینی جلو کشیده می‌شوند. البته می‌توان برای هر دستگاه، $f(x)$ مقارنی را انتخاب کرد. فرض کنیم

$$f(x) = -v\gamma x \quad (103)$$

در این صورت تبدیل لورنتز می‌شود

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma t = t \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned} \quad (104)$$

بدین ترتیب دستگاه (t, x) ممتاز می‌شود: تنها در این دستگاه همزمانی به روش اینشتین انجام شده است. در تمام دستگاه‌های دیگر همزمانی به روش دیگری است. هرچه سرعت دستگاه نسبت به دستگاه ممتاز بیشتر باشد، انحراف از روش اینشتین بیشتر است. در



شکل ۲.۳۲:

این جا با قرارداد دلخواه جدید تقارن همزمانی میان دستگاه‌های مختلف را شکستیم. البته این شکست تقارن صوری است و نتیجه فیزیکی ندارد. از آن جا که در انتخاب بالا $t = 0$ و $t' = 0$ موافق هستند، نسبیت همزمانی دیگر وجود ندارد.

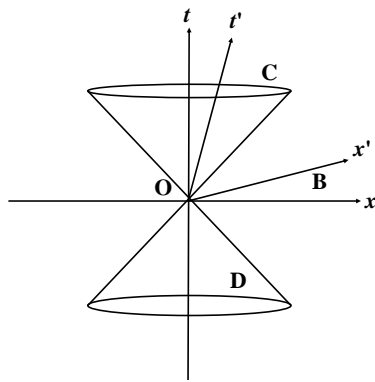
۲.۶.۲ نسبیت همزمانی

در بخش قبل دیدیم که هرگاه قرائت ساعت‌ها را مطابق تبدیل خاصی اختیار کنیم دو رویداد می‌توانند مستقل از ناظر، به طور مطلق همزمان باشند. آیا این واقعیت برای تبدیل لورنتز نیز صدق می‌کند؟ پاسخ را با استفاده از نمودار فضازمانی بررسی می‌کنیم. دو رویداد A و B را مطابق شکل ۲.۳۳ در نظر بگیرید.

ناظر S این دو رویداد را هم‌زمان می‌بیند، ناظر S' چگونه؟ برای تعیین این امر باید از A و B خطوطی موازی محور x' رسم کنیم. محل تقاطع این خطوط با محور t' زمان رویدادها را نشان می‌دهد. به وضوح می‌بینیم که برای ناظر S' ، B پیش از A روی داده است. پس همزمانی نسبی است و به ناظر بستگی دارد. همین طور دو رویداد B و C که برای ناظر S' همزمان هستند برای ناظر S ناهمزمانند. آیا می‌توان به ازای هر دو رویداد ناظری پیدا کرد که آنها را همزمان ببیند؟

آیا می‌توان با تغییر ناظر ترتیب زمانی دو رویداد را معکوس کرد؟ برای جواب به این سؤال‌ها رویداد مبدأ O را به عنوان مرجع انتخاب می‌کنیم. ناظر S تمام رویدادهای روی محور x را با O همزمان می‌بیند. برای این ناظر هر رویداد دیگری که بالای محور x قرار داشته باشد پس از O و هر رویدادی که پایین محور x باشد پیش از O روی می‌هد. اما برای اینکه بتوان ناظری پیدا کرد که دو رویداد A و O را هم‌زمان ببیند لازم است این دو رویداد روی محور x' مربوط به آن قرار بگیرند. در عین حال با توجه به تبدیل لورنتز می‌دانیم که محور x' مربوط به هیچ ناظر واقعی نمی‌تواند روی مخروط نور یا داخل آن قرار بگیرد (شکل ۲.۲۴). مثلاً رویداد C برای هیچ ناظری نمی‌تواند هم‌زمان با O روی دهد. به عکس این رویداد، به طور مطلق، یعنی بدون استثنا برای همه ناظرها پس از O روی می‌دهد. به همین ترتیب می‌بینیم که رویداد D به طور مطلق پیش از O روی می‌دهد. یا به عبارت دیگر C در آینده O و D در گذشته O است. هر رویدادی مخروط‌های گذشته و آینده خود را دارد: رویداد را در مبدأ یک دستگاه مختصات قرار می‌دهیم و مخروط‌های نور دستگاه را رسم می‌کنیم. در ضمن بقیه رویدادهایی که خارج از دو مخروط نور O قرار دارند می‌توانند، با انتخاب مناسب ناظر، با O هم‌زمان شوند و به همین دلیل گفته می‌شود این رویدادها در «حال» O قرار دارند.

نکته دیگری نیز درخور اهمیت است. دو رویداد O و C برای ناظر S در دو نقطه متفاوت روی می‌دهند. در صورتی که ناظر S' این دو رویداد را در یک مکان اما در زمان‌های متفاوت می‌بیند. به این ترتیب هم‌مکانی نیز امری نسبی است. البته واضح است که



شکل ۴۲.۲:

رویدادهایی که در حال O قرار دارند هیچ‌گاه نمی‌توانند با O هم‌مکان شوند. این موضوع را طور دیگری نیز می‌توانید تحقیق کنید: بازهٔ فضا-زمان s^2 را برای رویدادهایی که در حال O قرار دارند حساب کنید، نتیجه منفی خواهد بود و در نتیجه بازهٔ بین این رویداد و O فضاگونه است. با همین روش، بازهٔ فضا-زمانی بین رویدادهای داخل مخروط‌های آینده و گذشته و مبدأ مثبت می‌شود که نشان رویداد زمان‌گونه است.

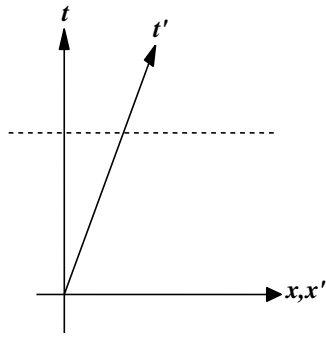
۳.۶.۲ قرارداد همزمانی

قبلاً اشاره کردیم چگونه اصل نسبیت آن‌گونه که آن را به کار بردیم ما را مجبور به وضع قراردادهایی می‌کند. از جمله اینکه روش همزمان کردن ساعت‌ها را در تمام دستگاه‌های لخت یکسان گرفته‌ایم. حال اگر در دستگاه S' ، که با سرعت v نسبت به S حرکت می‌کند روش همزمانی را تغییر دهیم هم‌ارزی دودستگاه به هم می‌خورد بدون اینکه محتوای فیزیکی تغییری کند. در اثر این تغییر قرارداد همزمانی، شکل نمودارهای فضا-زمان عوض می‌شود. برای شناخت نوع تغییرات ابتدا باید ببینیم که چه نوع همزمانی در اصل نسبیت مستتر است.

از اصل نسبیت به دست آوردیم که سرعت نور همواره ثابت است. یعنی در دستگاه S' نیز سرعت نور میان دو نقطه A و B برابر c است. اما روشن است که سرعت نور میان A و B به قرارداد همزمان کردن ساعت‌های A و B بستگی دارد. اگر قرائت ساعت A را به اندازه Δt تغییر دهیم، سرعت نور از A به B دیگر c نخواهد بود در صورتی که سرعت میانگین نور از A به B و از B به A برابر c می‌ماند.

یعنی سرعت میانگین نور میان هر دو نقطهٔ دلخواه، که آن را سرعت دو طرفه نور نیز می‌نامند، مستقل از قرارداد همزمانی است. اما سرعت یک طرفه نور یعنی از A به B یا از B به A به قرارداد همزمانی بستگی دارد. همزمانی ساعت‌ها را می‌شود مثلاً به طریق زیر تعریف کرد. فرض کنید دو ناظر A و B نسبت به هم ساکن باشند و می‌خواهند ساعت‌های خود را همزمان کنند. ناظر A در لحظهٔ t_0 سیگنال نوری به طرف B می‌فرستد. لحظه‌ای را که ناظر B این سیگنال را دریافت می‌کند t_1 می‌نامیم. این ناظر پس از دریافت سیگنال بازگشت را به A می‌فرستد. ساعت A به هنگام دریافت سیگنال زمان t_2 را نشان می‌دهد. بنا به قرارداد، ساعت‌های A و B را طوری همزمان می‌کنیم که

$$t_1 = t_0 + \epsilon(t_2 - t_0), \quad 0 < \epsilon < 1 \quad (105)$$



شکل ۵۲.۲:

پارامتر ϵ مشخصه قراردادهای گوناگون است به ازای $\epsilon = \frac{1}{c}$ سرعت نور از A به B برابر سرعت نور از B به A است، که این همان همزمانی اینشتین است. به ازای هر مقدار دیگر ϵ سرعت نور در دو سو متفاوت است. اما سرعت میانگین نور، یا سرعت دو طرفه نور، همواره برابر با c است. پس هر تبدیل

$$t' \rightarrow t' + f(x) \quad (106)$$

به معنای تغییر همزمانی و تعریف جدیدی از همزمانی است. مثلاً می‌توان همزمانی اینشتین را در تبدیل لورنتز تغییر داد. روشن است که این تغییر قرارداد متضمن تغییر محتوای فیزیکی نظریه نیست. به طور مثال، همان گونه که قبلاً دیدیم، اگر زمان را در دستگاه S' بنا بر رابطه

$$t' \rightarrow t' - v\gamma x \quad (107)$$

تبدیل کنیم، تبدیل لورنتز می‌شود

$$x' = \gamma(x - vt) , \quad t' = \gamma t \quad (108)$$

این تبدیل جدید متضمن همزمانی مطلق است همان گونه که نمودار فضا-زمان شکل ۲۵.۲ نشان می‌دهد. از نمودار بر می‌آید که خطوط t' ثابت به موازات محور x' و x قرار دارند. پس رویدادهایی که t' یکسان دارند t ی آنها نیز یکسان است. این همزمانی مطلق را به قیمت از دست دادن روش همزمانی یکسان در تمام دستگاه‌ها به دست آورده‌ایم دستگاه (x, t) با انتخاب قرارداد همزمانی اینشتین نسبت به دستگاه‌های دیگر ممتاز است. این امتیاز صوری است: هرگاه دستگاه (x, t) را اتر بنامیم نباید واقعیت فیزیکی به آن نسبت دهیم.

۷.۲ تبدیل سرعت و شتاب

پس از به دست آوردن مجموعه تبدیلات برای مختصات فضایی و زمان، می‌توانیم روابط تبدیل برای سایر کمیت‌های فیزیکی را هم به دست بیاوریم ولی در عین حال باید در به دست آوردن تبدیلات جدید اصل نسبیت را هم در نظر داشته باشیم: هموردایی قوانین فیزیک! نخست به این موضوع توجه کنید که تبدیلات لورنتزی که به دست آورده‌ایم تنها برای مقادیر مطلق مختصات درست نیستند بلکه برای بازه‌ها هم به کار می‌روند:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \quad (109)$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x)$$

مخصوصاً می‌توانیم بازه‌ها را دیفرانسیلی هم در نظر بگیریم

$$dx' = \gamma(dx - vdt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \gamma(dt - vdx) \quad (110)$$

اکنون با تقسیم دو طرف روابط dx' و dt' بر یکدیگر خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx - vdt}{dt - vdx} \\ &= \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right) - v}{1 - v\left(\frac{dx}{dt}\right)} \end{aligned} \quad (111)$$

اگر $\frac{dx}{dt}$ مؤلفه x سرعت یک متحرک از دید ناظر S و $\frac{dx'}{dt'}$ مؤلفه x' سرعت همان متحرک از دید S' باشد، رابطه آخر را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x} \quad (112)$$

که u_x و u'_x به ترتیب مؤلفه‌های x سرعت از دید S و S' هستند. رابطه (۱۱۲) یکی از روابط تبدیل سرعت در نسبیت است. روابط دیگر را هم می‌توان به همین ترتیب به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{\gamma(dt - vdx)} \\ &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left[1 - v\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]} \end{aligned} \quad (113)$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x)} \quad (114)$$

همچنین به همین روش یا با توجه به تقارن و تشابه بین مختصات y و z بلافاصله می‌توان نوشت

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x)} \quad (115)$$

به روابط (۱۱۴) و (۱۱۵) توجه کنید، اولاً تغییر نکردن مختصات y و z (به عنوان مختصات عمود بر سرعت نسبی S و S') تحت تبدیلات لورنتز، باعث نمی‌شود که مؤلفه‌های u_y و u_z هم تغییر نکنند زیرا سرعت هم به مختصه فضایی و هم به زمان وابسته است و تغییر مختصه زمانی هم می‌تواند باعث تغییر سرعت بشود. از سوی دیگر، مقدار مؤلفه‌های y و z سرعت از دید ناظر S' نه تنها به مؤلفه‌های y و z بلکه به مؤلفه x سرعت از دید S هم بستگی دارند. این واقعیت‌ها که با شهود ما مغایرت دارد ناشی از آن است که، بر خلاف مکانیک کلاسیک، مختصه زمان از دید ناظرهای متفاوت یکسان اندازه‌گیری نمی‌شود.

برای اینکه از نتایج به دست آمده اطمینان پیدا کنیم بهتر است ببینیم در حد سرعت‌های کم، یعنی $v \ll c$ ، که معرف حالت غیرنسبیتی است، چه بر سر تبدیلات ما می‌آید. در این وضعیت $\gamma \simeq 1$. با چشم‌پوشی از جمله $v.u_x$ در مقابل ۱ (یعنی در مقابل c^2) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - v \\ u'_y &= u_y \\ u'_z &= u_z \end{aligned} \quad (116)$$

که همان روابط تبدیل سرعت گالیله است. پس در حد سرعت‌های کم مجدداً روابط مکانیک کلاسیک به دست می‌آیند. همین مسیر را می‌توان برای به دست آوردن تبدیل مؤلفه‌های شتاب نیز ادامه داد؛ البته در این مورد، محاسبات قدری پیچیده‌تر از قبل خواهند شد. بنابراین بهتر است بررسی این موضوع را تا فصل ۴ عقب بیندازیم و در آنجا روابط مورد نیاز را از طریق تبدیل نیرو به دست آوریم.

پیش از پایان این بخش بد نیست رابطه جمع سرعت‌های نسبیتی را هم حساب کنیم. فرض کنید سرعت یک ذره از دید ناظر S' برابر با u' باشد. بنابراین داریم

$$x' = u't' \quad (117)$$

می‌خواهیم سرعت این ذره را از دید ناظر S هم پیدا کنیم. اگر این سرعت را u بنامیم خواهیم داشت

$$x = ut \quad (118)$$

برای محاسبه u ، مقادیر x' و t' را در رابطه (۱۱۷) جایگذاری می‌کنیم:

$$\gamma(x - vt) = u'\gamma(t - vx) \quad (119)$$

در نتیجه

$$x(1 + u'v) = (v + u')t \quad (120)$$

پس خواهیم داشت

$$u = \frac{v + u'}{1 + u'v} \quad (121)$$

این رابطه جمع سرعت‌ها است که به دنبالش بودیم. باز هم در محدوده سرعت‌های کم می‌توان دید که (۱۲۱) تبدیل می‌شود به

$$u = v + u' \quad (122)$$

که همان جمع سرعت‌ها در مکانیک کلاسیک است. اکنون یک نتیجه جالب و مهم رابطه (۱۲۱) را هم بیان می‌کنیم. فرض کنید ناظر S' در حال مشاهده یک پالس نور است که سرعت آن همان $c = 1$ است. سرعت پالس از دید S چقدر است؟ با استفاده از رابطه (۱۲۱) داریم:

$$u = \frac{1+v}{1+v} = 1 \quad (123)$$

نتیجه مهم: مستقل از سرعت نسبی، هر دو ناظر سرعت پالس نور را برابر $c = 1$ اندازه می‌گیرند. این نتیجه در تضاد آشکار با نتایج مکانیک کلاسیک است و به اندازه‌ای مهم است که اینشتین در مقاله اولیه خود آن را به عنوان یک اصل جداگانه در کنار اصل نسبیت ذکر کرده است. البته با روشی که ما برای به دست آوردن تبدیل لورنتز استفاده کردیم احتیاجی به این اصل نیست. با این حال اهمیت موضوع را چه به عنوان اصل و چه به عنوان نتیجه، نباید دست کم گرفت. مجدداً به مستقل بودن نتیجه رابطه (۱۲۳) از مقدار v توجه کنید. بسیاری افراد در اولین برخورد با موضوع جمع سرعت‌های نسبیتی می‌پرسند اگر ناظر S سوار بر همان پالس نوری باشد که می‌خواهد سرعتش را اندازه بگیرد نتیجه چه خواهد شد؟ از یک طرف واضح است که نتیجه (۱۲۳) مستقل از v است؛ پس اگر v را برابر c هم بگذاریم باز هم خواهیم داشت $u = c$. این نتیجه ظاهراً به هیچ وجه با شهود فیزیکی سازگار نیست، اما به خاطر داشته باشید که شهود فیزیکی ما ناشی از رویدادهای جهان اطراف ما است، در حالی که نتایج نظریه نسبیت در محدوده سرعت‌های بسیار زیاد خود را نشان می‌دهد. از طرف دیگر توجه کنید که ما دستگاه لخت را به گونه‌ای تعریف کردیم که هیچگاه سرعت آن نسبت به چارچوب‌های دیگر به سرعت حد (سرعت نور) نمی‌رسد. احتمالاً سؤال‌هایی از این نوع باز هم برایتان پیش خواهند آمد.

حالت کلی‌تری که می‌توان برای تبدیل مختصات و سرعت‌ها در نظر گرفت این است که چهارچوب‌های مرجع هم‌چنان دارای محورهای مختصات موازی باشند ولی سرعت نسبی موازی هیچ محوری نباشد. در نتیجه اگر سرعت نسبی S و S' را یک سرعت راست خط یکنواخت \vec{v} در نظر بگیریم می‌توانیم روابط تبدیل مختصات را به شکل زیر بنویسیم

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} - \gamma \vec{v}t \quad (124)$$

$$t' = \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{x}) \quad (125)$$

قاعده جمع سرعت‌ها را هم می‌توان با همان روش قبلی به دست آورد

$$\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}' + \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} \vec{v} \cdot \vec{u}'}{\gamma} \right) \vec{v} + \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{u}') \quad (126)$$

که در آن v اندازه بردار \vec{v} است. اندازه بردار \vec{u} را هم می‌توان به شکل زیر نوشت

$$u^2 = 1 - \frac{(1-u'^2)(1-v^2)}{(1+\vec{v} \cdot \vec{u}')^2} \quad (127)$$

از این رابطه به راحتی می‌توان دید که $u \leq 1$. تساوی هنگامی برقرار می‌شود که سرعت ذره در دستگاه S' ، یعنی u' ، برابر یک باشد. یعنی با سرعت نور سروکار داشته باشیم که در این صورت این سرعت در دستگاه S هم برابر با یک، یعنی همان سرعت نور خواهد بود. این امر سازگاری با سرعت حدی را نشان می‌دهد و در نتیجه سرعت نور حداکثر سرعتی است که یک متحرک می‌تواند داشته باشد. شاید از ذرات با سرعت بیش از سرعت نور شنیده باشید؛ زیاد تعجب نکنید: برای اطلاعات بیشتر به فصل آخر کتاب مراجعه کنید.

۸.۲ باطل‌نماهای نسبیت

باطل‌نما به معنای وضعیتی است که در آن از فرض‌های صحیح و با نتیجه‌گیری منطقی صحیح ظاهراً به یک تناقض می‌رسیم که نشان‌دهنده وجود یک مشکل است. البته این مشکل همیشه غیرقابل حل نیست. گاهی اوقات باطل‌نما شامل وضعیتی است که منجر به یک سؤال بدون جواب می‌شود اما بعضی وقت‌ها، فرض‌ها و یا روش نتیجه‌گیری حاوی اشکالی است که منجر به تناقض می‌شود و با رفع این اشکال تناقض نیز برطرف می‌شود.

در تاریخ منطق و فلسفه باطل‌نماهای زیادی وجود دارند که اغلب از نوع اول هستند.

یک نمونه معروف از باطل‌نماهای کلاسیک، «باطل‌نمای آرایشگر» نام دارد که منسوب به برتراند راسل فیلسوف مشهور انگلیسی است. فرض کنید در یک روستا، آرایشگر تنها کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان خود را اصلاح نمی‌کنند. اکنون سؤال این است که چه کسی آرایشگر را اصلاح می‌کند؟ با کمی دقت خواهید دید که چه جواب دهید خودش خودش را اصلاح می‌کند و چه اینکه بگویید خودش خودش را اصلاح نمی‌کند منجر به تناقض خواهد شد. این مثال خوبی از یک باطل‌نمای منطقی است.

در تاریخ نسبیت هم چند باطل‌نما مطرح شده است ولی همگی از نوع قابل حل بوده است و علت پیش آمدن آنها وجود اشتباه‌های ظریف در مرحله استنتاج است. با کشف این نکته‌های ظریف مسئله هم حل شده است. در این بخش ما سه باطل‌نمای مطرح شده در نسبیت را بررسی می‌کنیم.

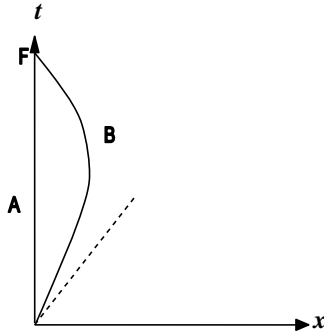
۱.۸.۲ باطل‌نمای دوقلو

این باطل‌نما معروف‌ترین و احتمالاً قدیمی‌ترین شبهه‌ای است که در نسبیت مطرح شده است. اولین بار لانژوین در مقاله‌ای که در ۱۹۱۱ راجع به مفاهیم فضا و زمان نوشت ضمن یک آزمایش ذهنی این مسئله را مطرح کرد و بعد از آن تاکنون موضوع بارها در مقالات و کتاب‌های راجع به نسبیت خاص و عام به میان آمده و راجع به آن بحث شده است.

فرض کنید یک آزمایش بر روی دو کودک هم‌زاد یا دوقلو انجام دهیم. اولی که آن را با A نمایش می‌دهیم روی زمین می‌ماند و دومی، یعنی B را سوار بر یک موشک بسیار سریع به سفری فضایی می‌فرستیم. موشک به یک سیاره دور دست می‌رود و از آنجا به زمین باز می‌گردد. از دید A زمان برای B کندتر گذشته است و در نتیجه زمان سفر رفت و برگشت از دید A بیش‌تر از همین زمان از دید B است. پس وقتی که سفر تمام شود و دوقلوها با یکدیگر ملاقات کنند A پیرتر از B خواهد بود. اما نتیجه تناقض آمیز این است که با توجه به اینکه اتساع زمان یک پدیده دوگانه است، دوقلوی B هم تحلیل مشابهی می‌کند. او نیز مدعی است که A به همراه زمین یک سفر رفت و برگشت نسبت به او انجام داده‌اند. او می‌گوید که ساعت A کندتر کار کرده و در نتیجه هنگام ملاقات در پایان سفر B پیرتر خواهد بود. اما این دو نتیجه نمی‌توانند به طور هم‌زمان درست باشند. پس واقعیت چیست؟

پاسخ به این نتیجه متناقض مستلزم نگاه عمیق‌تر به مسئله زمان در نسبیت است که نشان می‌دهد فرض‌های این باطل‌نما همگی صحیح نیستند. نکته اصلی در این موضوع دوگانه فرض شدن اتساع زمان از دید A و B است که در واقع به معنای هم‌ارزی چارچوب‌های مرجع A و B است. اما در اینجا به این نکته توجه نشده است که هم‌ارزی چارچوب‌ها به عنوان یکی از اصول نسبیت، فقط در مورد چارچوب‌های لخت معتبر است در حالی که چارچوب متصل به موشک (یعنی چارچوب B) در کل مسیر لخت نیست.

واضح است که موشک در ابتدای حرکت، در زمان رسیدن به سیاره و به اصطلاح «دور زدن»، و زمان توقف در پایان سفر باید



شکل ۶۲.۲:

حرکت شتاب‌دار انجام دهد. بنابراین چارچوب B اصولاً یک چارچوب لخت به حساب نمی‌آید که ما بتوانیم دوگانی اتساع زمان را در مورد آن به کار ببریم. و در واقع یک فرض غلط منجر به تناقض شده است. اما وضعیت واقعی چیست؟ نمودار فضا-زمان مسئله مطابق شکل (۲۶.۲) است. فرض کنیم که فاصله زمانی ابتدا تا انتهای سفر از دید A برابر با t باشد. حال فاصله زمانی بین رویدادهای آغاز و پایان سفر (F, S) اندازه‌گیری شده توسط B ، از دید A چقدر خواهد بود؟ اگر زمان اندازه‌گیری شده به وسیله B را با τ نشان دهیم، برای یک بازه بی‌نهایت کوچک بین دو رویداد، رابطه اتساع زمان به شکل زیر خواهد بود

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2(t)} dt \quad (128)$$

و در نتیجه

$$\int d\tau = \int \sqrt{1 - v^2(t)} dt \quad (129)$$

مقدار انتگرال سمت راست بر اساس شکل تابع $v(t)$ تعیین می‌شود. برای مثال در زمان‌هایی از سفر که موشک با سرعت ثابت v نسبت به زمین حرکت می‌کند رابطه (۱۲۸) به همان فرمول معمول اتساع زمان تبدیل می‌شود:

$$\tau = \sqrt{1 - v^2} t \quad (130)$$

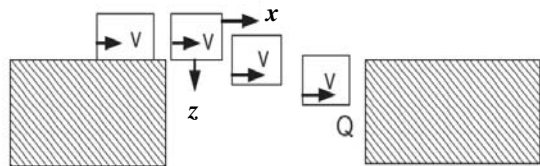
در مناطقی که حرکت شتاب‌دار با شتاب ثابت a انجام می‌گیرد خواهیم داشت

$$\tau = \int \sqrt{1 - (at)^2} dt \quad (131)$$

و اگر شتاب ثابت نباشد باید مستقیماً به رابطه (۱۲۹) مراجعه کرد و انتگرال را محاسبه کرد. اما در هر حال با توجه به اینکه رادیکال داخل انتگرالده کوچک‌تر از ۱ است، τ کوچک‌تر از t خواهد بود و در پایان سفر A پیرتر از B خواهد بود.

۲.۸.۲ باطل‌نمای انقباض طول

دومین باطل‌نما ناظر به مفهوم انقباض طول است. فرض کنید میله‌ای صلب به شکل مکعب مستطیل روی سطح بدون اصطکاک میز می‌سوراخی وجود دارد که ویژه طول آن با ویژه طول میله برابر است. از دید ناظر ساکن نسبت به



شکل ۲۲.۲:

میز (S) میله که در حرکت است دچار انقباض طول می‌شود و در نتیجه هنگامی که به سوراخ می‌رسد درون آن سقوط می‌کند. ناظر ساکن نسبت به میله (S') چه می‌گوید؟ او نیز می‌گوید که سوراخ در حال حرکت است پس طول آن کوچک‌تر از ویژه طول میله خواهد شد و در نتیجه میله از روی سوراخ عبور می‌کند و درون آن نمی‌افتد. واقعیت کدام است؟ فرض کنید که ناظر S' که متصل به میله است از چارچوب لختی که به انتهای پایینی میله وصل است استفاده می‌کند. در ضمن سرعت نسبی S و S' را v فرض می‌کنیم. رسیدن گوشه پایینی سمت راست Q به ابتدای سوراخ را رویداد مبدا می‌گیریم. جهت مثبت محور x را در امتداد حرکت نسبی و جهت مثبت z را رو به پایین می‌گیریم (شکل ۲۲.۲).

تبدیل لورنتز را به صورت زیر می‌نویسیم

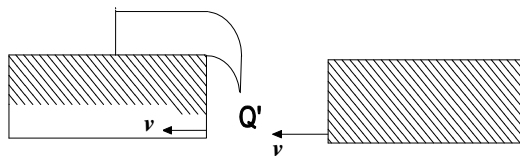
$$\begin{aligned} z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx') \end{aligned} \quad (۱۳۲)$$

معادله حرکت گوشه پایینی میله در S به شکل زیر است

$$\begin{aligned} z &= 0, & t < 0 \\ z &= \frac{1}{\gamma}gt^2, & t \geq 0 \end{aligned} \quad (۱۳۳)$$

با توجه به رابطه (۱۳۲) شرط $t \geq 0$ در S معادل با رابطه $x' \geq \frac{-t'}{v}$ در S' است بنابراین معادلات حرکت (۱۳۳) در S' به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} z' &= 0, & x' < \frac{-t'}{v} \\ z' &= \frac{1}{\gamma}\gamma^2(t' + vx')^2, & x' \geq \frac{-t'}{v} \end{aligned} \quad (۱۳۴)$$



شکل ۸.۲.۲:

با توجه به شکل (۲۸.۲) تعبیر روابط (۱۳۴) چنین است: در S' یک سهمی را در نظر بگیرید که رأس آن در Q' ، محور آن قائم و رو به پایین است، و پارامتر آن $\frac{1}{a\gamma^2 v^2}$ است. رأس این سهمی با سرعت $\frac{1}{v}$ در امتداد میله حرکت می‌کند و حرکت آن در $t' = 0$ شروع می‌شود و میله، در روی سهمی «سرازیر» می‌شود و پایین می‌آید. روشن است که تا وقتی میله به دیواره شکاف اصابت نکرده است بعد افقی آن ثابت می‌ماند. به آسانی می‌توان ثابت کرد که در لحظه t' نقطه شروع شکاف در $x' = \frac{-L}{\gamma} - vt'$ است که L طول سکون میله است. در نتیجه این نقطه که با سرعت v در امتداد میله حرکت می‌کند از رأس سهمی جلوتر است و رأس سهمی درست در $x' = -L$ یعنی در ته میله به آن می‌رسد در نتیجه باید طول میله در S' به نحو محسوسی کم شود چنان‌که از توصیف S دیده می‌شود.

در واقع از پیامدهای حد نسبیتی این است که اجسام صلب و سیال‌های تراکم‌ناپذیر حتی به عنوان مدل‌های ایده‌آل یا حالت‌های حدی نیز نمی‌توانند وجود داشته باشند زیرا چنین اجسامی طبق تعریف می‌توانند سیگنال‌ها را با سرعت بی‌نهایت انتقال می‌دهند.

۳.۸.۲ باطل‌نمای میله و گاراژ

باطل‌نمای حرکت مکعب روی میزبه ما می‌گوید که انقباض نسبیتی طول به هیچ وجه «پنداری» نیست، بلکه به تمام معنی واقعی است و هر چند تا به حال کسی برای تحقیق صحت آن به آزمایش مستقیم دست نزده است، شک نیست که چنین کاری اصولاً ممکن است. یک مورد دیگر را ذکر می‌کنیم که قبول داریم غیر واقعی است ولی جالب است و صورت دیگری از این حقیقت که در نسبیت جسم صلب وجود ندارد را نشان می‌دهد: شخصی را در نظر بگیرید که میله‌ای به طول 20 متر به طور افقی در دست دارد و می‌خواهد به داخل گاراژی به طول 10 متر برود. این شخص با سرعت $v = 0.866c$ می‌دود، تا γ خود را مساوی 2 بکند و طول میله‌اش به 10 متر برسد. بهتر است قید کنیم که در ته گاراژ یک قالب سنگین بتونی وجود دارد؛ بنابراین این پرسش که آیا سرانجام میله در چارچوب لخت گاراژ ساکن می‌شود یا به عکس، موردی ندارد. پس دنده با میله‌ای که به دست دارد (واکنون منقبض شده است) به داخل گاراژ می‌دود و دوستش در را بلافاصله پشت سر او می‌بندد. تردیدی در امکان‌پذیر بودن این آزمایش، یعنی در واقعی بودن انقباض طول نداریم. وقتی میله در چارچوب سکون گاراژ متوقف می‌شود، در واقع «در فضا چرخیده» است و گرایش دارد که، در صورت امکان طول اصلی خود را نسبت به گاراژ بازیابد. این است که اگر از برخورد جان سالم به در برد، یا باید خم شود یا این‌که در گاراژ را بشکافد و از آن بیرون بزند.

در این جا ممکن است «باطل‌نما» به ذهن برسد و آن این‌گونه باشد که چه بر سر تقارن پدیده می‌آید؟ مگر نه این که طول گاراژ نسبت به شخص دنده فقط 5 متر است؟ بله، درست است. پس میله 20 متری چگونه می‌تواند در گاراژ 5 متری جا گیرد؟ بسیار

خوب اجازه بدهید ببینیم که در چارچوب سکون میله چه رخ می دهد. در این چارچوب، گاراژ با در باز به طرف میله ساکن حرکت می کند و به دلیل وجود دیوار بتونی حتی پس از برخورد هم به حرکت خود ادامه می دهد و سر میله را در این حرکت با خود می برد. اما ته میله همچنان در سکون است، زیرا به دلیل محدود بودن سرعت انتشار هر نوع سیگنالی ابتدای میله نمی تواند «دریابد» که ته میله به گاراژ اصابت کرده است. حتی اگر «سیگنال» (در این مورد موج ضربه ای کشسان) با سرعت نور در طول میله حرکت کند پیش از رسیدن به ته آن باید ۲۰ متر راه بپیماید و حال آن که در این مدت در گاراژ فقط باید ۱۵ متر حرکت کند. اگر v برابر با $c/75$ باشد، در این مسابقه طرفین مساوی خواهند شد. اما v برابر با $c/866$ است و بنابراین نه فقط میله داخل گاراژ قرار می گیرد بلکه زمان زیاد هم می آورد؛ (میله حتی می تواند داخل گاراژی که طول آن در حال سکون $5/4$ متر و در حال حرکت $2/7$ متر است جا بگیرد. در این حالت، در گاراژ باید $17/3$ متر راه بپیماید و موج ضربه ای 20 متر. و برای این که طرفین در این مسابقه با هم مساوی شوند یعنی میله در داخل گاراژ کاملاً جا بگیرد و جای اضافی هم باقی نماند، لازم است که نسبت سرعت های آنها $17/3$ به 20 یعنی $c/865$ باشد.)

تمرین

- ۱) ذرات بنیادی طول عمر کوتاهی دارند. در شتابدهنده همواره ذرات تولید و نابود می شوند. اگر قوانین نیوتون برای سرعت های بالای این ذرات صادق بود، ذرات می بایست سریع تر از سرعت نور حرکت می کردند تا مسافت بیشتری را قبل از نابودی طی کنند. سرعت متوسط این ذرات را با مکانیک نیوتونی به دست آورید اگر:
 - الف) مزون π با عمر متوسط $10^{-8} s \times 2/6$ در نقطه ای به فاصله 1 کیلومتر از مکان تولیدش دیده شود.
 - ب) باریون Λ_B با طول عمر $10^{-12} s \times 1/23$ به فاصله 3 میلی متر از محل تولید دیده شود.
- ۲) یک خلبان تصمیم می گیرد در راستای شرق از A به B رفته و بر می گردد. اگر u سرعت هوا و l فاصله بین این دو مکان باشد، واضح است که زمان طی مسیر وقتی باد نباشد $t_0 = \frac{l}{u}$ است.
 - الف) فرض کنید با سرعت v از غرب بوزد. زمان کل مسیر را بر حسب u, v و t_0 به دست آورید.
 - ب) اگر باد از جنوب بوزد زمان کل برای طی مسیر را پیدا کنید.
 - پ) آیا این دو زمان برابرند؟
 - ت) در آزمایش مایکلسون مورلی، آزمایش قرار بود نشان دهد که زمان حرکت نور برابر است هر چند این آزمایش نمایانگر تغییر بود وقتی آنها دستگاه را می چرخاندند. تفاوت اساسی در این دو حالت چیست؟
- ۳) در بخش ۲.۲.۲، در به دست آوردن تبدیل لورنتز کجا از اصل نسبیت استفاده شده است؟
- ۴) هواپیمایی از بالای زمین با سرعت v حرکت می کند. وقتی که هواپیما بالای سر ناظر است پالس نوری از وسط هواپیما گسیل می شود. این پرتو به وسیله ناظر A در جلوی هواپیما و ناظر B در عقب هواپیما آشکار می شود. هر دو ناظر فاصله خود را d اندازه می گیرند.
 - الف) توضیح دهید چرا ناظرهای A و B در اینکه نوره به طور همزمان رسیده هم عقیده هستند. این مدت زمان چقدر است؟
 - ب) توضیح دهید چرا ناظر زمینی زمان رسیدن نوره به A و B را همزمان نمی داند.
- ۵) در یک چارچوب مرجع رویداد 1 در $x = 0$ و $t = 0$ روی می دهد و رویداد 2 در $x = 2$ و $t = 1$. چارچوبی را پیدا کنید که دو رویداد در آن همزمان باشند.

(۶) A و B به ترتیب با سرعت $\frac{4}{5}c$ و $\frac{3}{5}c$ در چارچوب آزمایشگاه حرکت می‌کنند. فرض کنید C با سرعتی حرکت کند که ببیند A و B هر دو با سرعت u به او نزدیک می‌شوند. u را پیدا کنید.

(۷) فرض کنید فضا در هر نقطه همسانگرد است. آنگاه نشان دهید که همگن نیز خواهد بود. عکس این قضیه صادق نیست. چرا؟ مثال بیاورید.

(۸) قطاری با ویژه طول l با سرعت $\frac{4}{5}c$ نسبت به زمین حرکت می‌کند. توپی با سرعت $\frac{3}{4}c$ نسبت به قطار از انتها به ابتدای قطار پرتاب می‌شود. از دید یک ناظر زمینی چه مدت زمان طول می‌کشد تا این مسیر طی شود؟

(۹) الف) آیا معادلات ماکسول تحت تبدیل گالیله ناورداست؟ در مورد تبدیل لورنتز چطور؟ مسئله را فقط در مورد معادله انتشار امواج الکترومغناطیس بررسی کنید.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

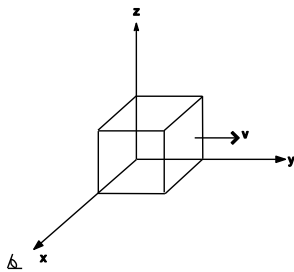
ب) اگر سرعت انتقال پیام به جای c ، c' بود، آیا باز هم معادله فوق تحت تبدیل لورنتز با c' هموردا باقی می‌ماند؟ با توجه به اینکه الکترودینامیک به طور کامل با تجربه تأیید شده در مورد تبدیلات لورنتز با سرعت c' به عوض c (یعنی سرعت نور) چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

(۱۰) مسئله (۹) را در مورد معادله شرودینگر بررسی کنید (مقایسه معادله تحت تبدیل گالیله و لورنتز). از اینکه معادله شرودینگر تحت تبدیل لورنتز ناوردا نیست، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)$$

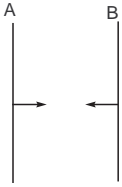
چرا ما علاقه داریم شکل معادلات تحت تبدیل دستگاه‌های مختصات تغییر نکند (هموردا باشد)؟

(۱۱) یک مکعب به ضلع l با سرعت v در راستای y حرکت می‌کند. ناظری عمود بر سرعت v در راستای x به این مکعب نگاه می‌کند یا عکس برداری می‌کند. اگر دیافراگم دوربین خود را فقط برای یک لحظه باز و بسته کند (زمان نوردهی به فیلم را صفر بگیرد). در این صورت شکل مکعب در عکس چگونه خواهد بود؟



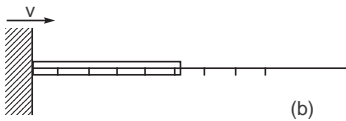
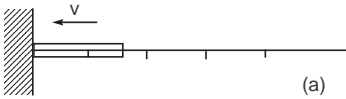
- (۱۲) چارچوب S' با سرعت v نسبت به چارچوب S در جهت مثبت و با زاویه θ نسبت به محور x در حرکت است. با فرض تبدیل لورنتز تبدیل بین S و S' را محاسبه کنید و نشان دهید که این تبدیل عام دارای خواص گروه است.
- (۱۳) سفینه‌ای که در جهت مثبت محور x با سرعت v حرکت می‌کند سیگنال نوری از یک ستاره در صفحه $x - y$ دریافت می‌کند. در چارچوب سکون ستاره شعاع نور با امتداد سفینه زاویه θ می‌سازد:
الف) زاویه θ' بین شعاع نور و محور x در چارچوب سکون سفینه را بیابید و آن را برحسب θ بنویسید.
ب) فرض کنید یک محفظه نیمکره شیشه‌ای در جلوی سفینه وجود دارد و فضانوردی که در مرکز نیمکره نشسته مشغول مشاهده ستاره‌ها است. همه ستاره‌های با $\theta' \leq \frac{\pi}{4}$ قابل رویت هستند (فرض کنید چارچوب سکون همه ستاره‌ها یکی است). نشان دهید ستاره‌های قابل رویت آنهایی هستند که برایشان $\cos\theta \geq -v$ است.
- (۱۴) قطاری با سرعت ثابت روی ریلی که از داخل یک تونل عبور می‌کند، در حرکت است. طول قطار از دید ناظرهای داخل آن دقیقاً برابر است با طول تونل از دید ناظرهای ساکن نسبت به تونل. قطار با سرعتی نزدیک به c وارد تونل می‌شود و راننده قطار و نگهبان تونل هر یک وضعیت را از دید خود توصیف می‌کنند:
الف) راننده قطار تصمیم می‌گیرد که مسئله را از طریق شلیک دو موشک از ابتدا و انتهای آن به سمت آسمان بررسی کند. در ضمن یک زمان سنج درون قطار وجود دارد که دو موشک را به طور همزمان و وقتی وسط قطار از وسط تونل عبور می‌کند، شلیک می‌کند.
ب) نگهبان تونل هم تصمیم به حل قضیه از طریق بستن دو دروازه بزرگ در ابتدا و انتهای تونل، وقتی که قطار درون تونل جای گرفت، می‌گیرد. زمان سنج او هم دو دروازه را همزمان و وقتی که وسط قطار از وسط تونل می‌گذرد، می‌بندد. از دید هر ناظر چه اتفاقی می‌افتد؟ مسئله را از طریق رسم نمودار فضا زمانی حل کنید.
- (۱۵) دو ساعت را که در یک جا همزمان شده‌اند و ابتدا در یک نقطه از فضا در چارچوب S بوده‌اند در نظر بگیرید. ساعت A در چارچوب S ساکن می‌ماند. ساعت B یک سفر شتابدار در امتداد محور x به مدت کل T (اندازه‌گیری شده توسط A) انجام می‌دهد. همه زمان‌ها، سرعت‌ها و شتاب‌ها در S اندازه‌گیری می‌شوند. در انتهای سفر ساعت B گذشت زمان T' را نشان می‌دهد. سفر را می‌توان به صورت زیر به دو قسمت متقارن تقسیم کرد:
بخش رفت:
۱. ساعت B برای مدت $f \frac{T}{\gamma}$ تحت یک شتاب ثابت a قرار می‌گیرد که f کسری از کل سفر است که در آن حرکت شتابدار انجام می‌شود.
۲. سپس B برای مدت $(1-f) \frac{T}{\gamma}$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند.
۳. ساعت B برای مدت $f \frac{T}{\gamma}$ تحت یک شتاب $-a$ حرکت می‌کند و به سکون می‌رسد.
بخش بازگشت:
 B دقیقاً همان حرکت‌های بخش رفت را فقط با جهت و ترتیب عکس انجام می‌دهد و در آخر در محل A به سکون می‌رسد.
الف) نسبت $\frac{T'}{T}$ را به عنوان تابعی از a, v, f به دست آورید.
ب) نشان دهید در حد $1 \rightarrow f$ (یعنی بدون حرکت با سرعت ثابت) و $1 \rightarrow v$ خواهیم داشت $\frac{T'}{T} = \frac{1}{\gamma}$.
پ) نشان دهید در حد $0 \rightarrow f$ (یعنی شتاب گرفتن کوتاه) و v بزرگ نتیجه متعارف باطل‌نمای دو قلو به دست می‌آید.

(۱۶) دو چوب یک متری A و B مطابق شکل از کنار یکدیگر عبور می‌کنند. چوب A در دو انتهای خود قلم موی آغشته به رنگ دارد. با استفاده از این دستگاه نشان دهید که در چارچوب سکون هر یک از چوب‌ها، طول چوب دیگر همچنان یک متر است.



(۱۷) سفینه‌ای با سرعت v نسبت به دو ستاره A و B ساکن نسبت به هم و به فاصله L از هم با ساعت‌های همزمان شده، حرکت می‌کند. به هنگام عبور از کنار ستاره A ساعت خود را با ساعت A همزمان می‌کند. سپس از کنار ستاره B عبور می‌کند و ساعت خود را با آن مقایسه می‌کند. بازه زمانی بین این دو عبور را از دید ستاره B و سفینه بررسی کنید.

(۱۸) یک خط‌کش مطابق شکل عمود بر دیوار قرار دارد. قطعه چوبی به طول l با سرعت v طوری حرکت می‌کند که جلوی قسمتی از خط‌کش را می‌گیرد و مانع از دیدن آن می‌شود. هنگامی که چوب به دیوار برخورد می‌کند می‌ایستد. در چارچوب آزمایشگاه چوب کوتاه‌تر از l است و در نتیجه درست قبل از برخورد با دیوار می‌توان علامتی روی خط‌کش را دید که فاصله‌اش تا دیوار کمتر از l واحد است. اما در چارچوب چوب علامتهای روی خط‌کش به هم نزدیکتر هستند. بنابراین وقتی دیوار به چوب برخورد می‌کند نزدیکترین علامت خط‌کش نسبت به دیوار را که می‌توان دید بزرگتر از l واحد است. کدام گزاره درست است (و ایراد گزاره غلط چیست)؟ شکل اول چارچوب آزمایشگاه و شکل دوم چارچوب چوب را نشان می‌دهد.



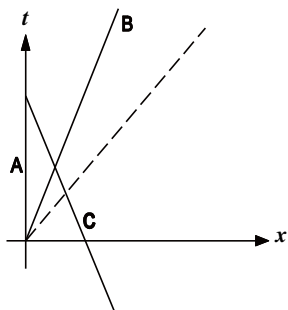
(۱۹) جسمی با سرعتی به مؤلفه‌های (u_x, u_y) حرکت می‌کند. شما با سرعت v در جهت x حرکت می‌کنید. v چقدر باشد تا شما هم سرعت جسم را u_y در راستای y ببینید.

۲۰) مطابق شکل هر کدام از ناظرهای A ، B ، و C یک ساعت دارند. در چارچوب A ، B با سرعت v به سمت راست حرکت می‌کند. وقتی B از کنار A عبور می‌کند، هر دو ساعت‌هایشان را در صفر تنظیم می‌کنند. همچنین در چارچوب A ، C با سرعت v به سمت چپ حرکت می‌کند. وقتی C و B از کنار هم عبور می‌کنند، C ساعت خود را با B هم‌زمان می‌کند و در نهایت هنگام عبور C از کنار A آن‌ها ساعت‌هایشان را با هم مقایسه می‌کنند. اگر زمان ساعت A را T_A و زمان ساعت C را T_C بنامیم:

$$\text{الف) در دستگاه } A, \text{ نشان دهید } T_C = \frac{T_A}{\gamma}.$$

$$\text{ب) در دستگاه } B, \text{ نشان دهید } T_C = \frac{T_A}{\gamma}.$$

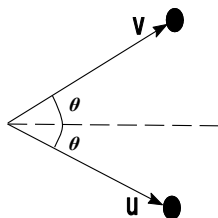
$$\text{پ) در دستگاه } C, \text{ نشان دهید } T_C = \frac{T_A}{\gamma}.$$



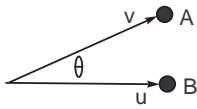
۲۱) دو نفر به فاصله d از هم قرار دارند. در یک لحظه هر دو به طور هم‌زمان در امتداد خط واصل با ویژه شتاب a شروع به شتاب گرفتن می‌کنند. در لحظه شروع حرکت هر یک فاصله بین دو تیک متوالی ساعت دیگری را چقدر می‌بینند؟ مسئله را با استفاده از نمودار فضا-زمانی حل کنید.

۲۲) یک فضاپیما در زمان $t = 0$ از سکون شتاب می‌گیرد؛ ساعت داخل فضاپیما هم زمان را $t' = 0$ را نشان می‌دهد. ویژه شتاب فضاپیما a است (یعنی در زمان $t' + dt'$ فضاپیما با سرعت adt' نسبت به چارچوبی که در زمان t' در آن بوده حرکت می‌کند). بعد از آن شخصی در چارچوب آزمایشگاه t و t' را اندازه می‌گیرد. رابطه بین این دو زمان چیست؟

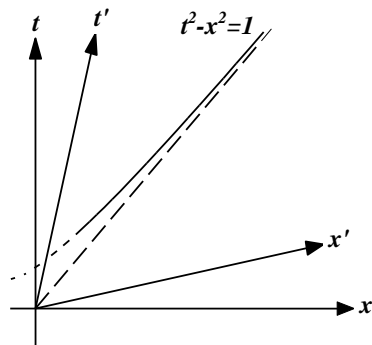
۲۳) در چارچوب آزمایشگاه، دو ذره با سرعت v مطابق شکل حرکت می‌کنند. زاویه بین مسیر دو ذره 2θ است. سرعت هر ذره از دید ذره دیگر چقدر است؟



(۲۴) در دستگاه سکون، دو ذره A, B با سرعت v, u مطابق شکل حرکت می‌کنند. زاویه بین آن‌ها θ است. سرعت هر کدام نسبت به دیگری چقدر است؟



(۲۵) شکل روبرو را در نظر بگیرید. در دستگاه S ، منحنی $t^2 - x^2 = 1$ به صورت نقطه‌چین رسم شده است. چارچوب S' هم در شکل رسم شده است که با سرعت v نسبت به چارچوب S حرکت می‌کند. با استفاده از ناوردایی $s^2 = t^2 - x^2$ واحد اندازه‌گیری روی S و S' را به دست آورید.



مراجع

- (۱) جان مادوکس، نسبیت خاص چقدر خاص است، مجله فیزیک، ۱۳۷۴، ۱۳، ۳، ۴، ۱۱۴-۱۱۵.
- (۲) آر.جی. لو، پارادوکس ساعت در شکل بی شتاب، مجله فیزیک، ۱۳۶۹، ۸، ۹۵-۹۶.
- (۳) ن. مک‌گیل، شکل ظاهری اجسام متحرک در نسبیت خاص، مجله فیزیک، ۱۳۶۵، ۴، ۲۷۵-۲۸۵.
- (۴) دیوید مرمین، جمع نسبیتی سرعت‌ها با استفاده مستقیم از ناوردایی سرعت نور، مجله فیزیک، ۱۳۶۴، ۳، ۴، ۳۷۷-۳۸۰.
- (۵) انقباض نسبیتی یک میله شتابان، arxiv:physics/9810017.
- (۶) یک «باطل‌نمای دوقلوی جدید» برای دانشجویان باهوش، arxiv:gr-qc/0511126.
- (۷) مقاله‌ای جالب در مورد اتساع زمان و باطل‌نمای میله و گاراژ، arxiv:physics/0606135.

۸) مقاله لانژوین که اولین مقاله راجع به باطل‌نمای دوقلواست،
Langevin, P.(8988), "L' e'volution de l'espace et du temps", Scientia, X,P31.

۹) شکل ظاهری اجسام در نسبیت،
P.Singell, "Appearance at relativistic speeds", PHYSNET project, Michigan state university, 2003.

۱۰) نمایش ویژه زمان از طریق نمودارها، [.arxiv:physics/0505134](https://arxiv.org/abs/physics/0505134)

۱۱) شکل و محل ظاهری اجسام، [.arxiv:physics/0403094](https://arxiv.org/abs/physics/0403094)

۱۲) توضیح راجع به نسبیت همزمانی، [.arxiv:physics/0511062](https://arxiv.org/abs/physics/0511062)

۱۳) نوعی دیگر از نمودار فضا-زمانی، [.arxiv:physics/0404027](https://arxiv.org/abs/physics/0404027)

۱۴) نسبیت از طریق نمودار مینکوفسکی، [.arxiv:physics/0703002](https://arxiv.org/abs/physics/0703002)

فصل ۳

فضازمان نسبیتی

۱.۳ خواص هندسی فضای سه بعدی

نظریه نسبیت نظریه‌ای در مورد فضا و زمان است و از این جهت می‌توان آن را یک نظریه‌ی هندسی دانست. اما هندسه‌ای که اینجا از آن صحبت می‌شود کاملاً با هندسه متعارف فضای سه‌بعدی (هندسه اقلیدسی) متفاوت است.

با وجود اینکه می‌توان همه چیز را در نسبیت از دیدگاه غیر هندسی مطرح کرد، اما اگر موضوعات نسبیتی را به زبان موجودات هندسی مانند «بردارها» بیان کنیم تصویر بسیار منسجم‌تر و گویاتری از نسبیت به دست می‌آوریم. از سوی دیگر، اغلب اوقات کار کردن با زبان هندسه محاسبات را خیلی ساده‌تر می‌کند. در واقع خواهیم دید که نسبیت نظریه هندسی یک موجود واحد به نام فضازمان است تا نظریه فضا و زمان. علاوه بر این اگر بخواهیم مطالبی را که در نسبیت خاص گفته می‌شود به نوعی گسترش دهیم که تبدیل بین چارچوب‌های مرجع دلخواه (نالخت) را هم در بر بگیرد (این کار نهایتاً راه رسیدن به نسبیت عام را سهل می‌کند) بدون ابزار هندسی کاری تقریباً غیر ممکن در پیش خواهیم داشت. پیش از پرداختن به هندسه نسبیتی بد نیست برخی از نکات مهم هندسه سه بعدی را که برایمان آشنا است یادآوری کنیم. در یک دستگاه مختصات سه بعدی مؤلفه‌های بردار \vec{r} را که ابتدای آن روی نقطه (x_1, y_1, z_1) و انتهای آن روی نقطه (x_2, y_2, z_2) قرار دارد به شکل یک بردار ستونی می‌نویسیم:

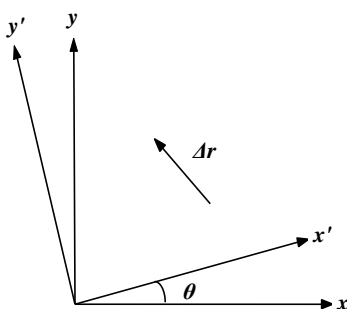
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (1)$$

که در آن $\Delta x = x_2 - x_1$ و $\Delta y = y_2 - y_1$ و $\Delta z = z_2 - z_1$.

اما در این نحوه‌ی نمایش بردارها باید مراقب نکته‌ای بود: اگر دستگاه مختصات را تغییر دهیم بردار \vec{r} مؤلفه‌های دیگری خواهد داشت (یا به اصطلاح نمایش مختصاتی آن عوض خواهد شد)، و مثلاً به شکل زیر در خواهد آمد

$$\vec{\Delta r} = \begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} \quad (۲)$$

توصیف بردار بر حسب مؤلفه‌هایش نسبت به یک دستگاه مختصات کاری است که برای سادگی محاسبات انجام می‌شود ولی نکته در این جاست که بردار $\vec{\Delta r}$ همان بردار است. به عبارت دیگر مؤلفه‌های بردار تنها نسبت به یک دستگاه مختصات معنی دارند و با تبدیل دستگاه مختصات این مؤلفه‌ها هستند که تغییر می‌کنند نه بردار به این معنا که بردار موجودی مستقل از دستگاه مختصات است. علاوه بر این می‌دانیم کمیت‌هایی مثل طول بردار و زاویه‌ی بین هر دو بردار در همه دستگاه‌های مختصات یکی هستند. با وجود اینکه این گزاره بدیهی به نظر می‌رسد، بهتر است مقدار طول یک بردار و زاویه‌ی بین بردارها را برای دو دستگاه مختصات متفاوت حساب کنیم. برای مثال فرض کنید تبدیلی که دو چارچوب مختصات را به هم‌دیگر تبدیل می‌کند دوران به اندازه θ حول محور z باشد (شکل ۱.۳). در نتیجه تبدیل مؤلفه‌های بردار به صورت زیر نوشته می‌شود



شکل ۱.۳:

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (۳)$$

با استفاده از این رابطه داریم

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \quad (۴)$$

که همان ناوردا بودن اندازه‌ی بردار تحت تبدیل دوران از یک دستگاه به دستگاه دیگر است. علاوه بر این برای هر دو بردار Δr_1 و Δr_2 مشاهده می‌کنیم:

$$\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta y_1 \Delta y_2 + \Delta z_1 \Delta z_2 = \Delta x'_1 \Delta x'_2 + \Delta y'_1 \Delta y'_2 + \Delta z'_1 \Delta z'_2 \quad (۵)$$

بدون شک هر دو طرف رابطه (۵) برای شما آشناست: ضرب داخلی Δr_1 و Δr_2 . این نتیجه به ما می‌گوید که زاویه بین دو بردار در هر دو دستگاه مختصات نیز ثابت است. پس معادله تبدیل (۵) با این حقیقت که طول و جهت‌گیری نسبی بردارها مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است، سازگار است. در این جا بهتر است گزاره‌ای را بیان کنیم که در تعمیم به هندسه چهاربعدی راهنمای ما خواهد بود: هر کمیتی با سه مؤلفه که تحت دوران دستگاه مختصات درست مانند Δr تبدیل شود یک بردار سه بعدی است. مثال‌های خوبی از یک بردار سه بعدی، نیرو، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، سرعت، شتاب و غیره هستند. می‌توانید نحوه تبدیل این کمیت‌ها تحت دوران را امتحان کنید. از طرف دیگر نه هر سه عددی که در یک سطر یا ستون نوشته شود بردار است، باید که مانند Δr تبدیل شود!

۲.۳ چاربردار

اکنون ما از ملاحظات بخش قبل برای معرفی مفهوم برداری که بازه بین دو رویداد را در فضا زمان تعیین می‌کند استفاده می‌کنیم. مهم این است که نشان دهیم مختصات یک رویداد دارای خواص تبدیلی مشابه با رابطه (۵) برای بردارهای سه بعدی است، البته با بعضی تفاوت‌های اساسی.

ابتدا از تبدیل مختصات رویدادها در دستگاه لخت شروع می‌کنیم. مختصات یک رویداد E را در دو دستگاه S و S' به ترتیب $x^\mu = (t, x_1, x_2, x_3)$ و $x'^\mu = (t', x'_1, x'_2, x'_3)$ می‌نامیم. توجه کنید که اکنون از شاخص‌های یونانی برای فضا زمان استفاده می‌کنیم. شاخص μ می‌تواند مقدارهای ۰، ۱، ۲، ۳ را اختیار کند، که ۰ برای زمان و بقیه برای مؤلفه‌های مکان است. در نتیجه مؤلفه‌های بردارها در این فضا هم (مانند فضای سه بعدی) با یک شاخص مشخص می‌شوند. با این زبان عناصر یک ماتریس با دو شاخص نمایش داده می‌شوند. بنابراین اگر ماتریس تبدیل لورنتز را با L^μ_ν نشان دهیم، این تبدیل به صورت زیر نوشته می‌شود

$$x^\mu = \sum_\nu L^\mu_\nu x^\nu \quad (6)$$

برای سهولت در نوشتن، رسم است که علامت جمع زنی Σ حذف می‌شود و می‌پذیریم هرگاه یک شاخص تکرار شود، یکی در بالا و دیگری در پایین نوشته شود، روی آن جمع بزنییم. این قاعده را جمع زنی انیشتین می‌گویند. پس رابطه بالا به صورت ساده زیر نوشته می‌شود

$$x^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (7)$$

و منظور این است که در این رابطه روی شاخص ν جمع زده می‌شود. تبدیل لورنتز در حالت متعارف را که متناظر با سرعت دستگاه لخت S' در جهت محور x دستگاه S است، در نظر می‌گیریم. در این صورت رابطه (۷) به صورت باز، این‌گونه نوشته می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (8)$$

اکنون چاربردار را تعریف می‌کنیم. می‌گوییم هر چهارکمیت مرتب شده A^μ که تحت تبدیل لورنتز از رابطه (۷) تبعیت کند یک چاربردار است:

$$A'^\mu = L^\mu_\nu A^\nu \quad (9)$$

پس اگر ما بردار A را بشناسیم، یعنی بدانیم A در دستگاه S و S' چه مؤلفه‌هایی دارد، و اگر این مؤلفه‌ها از رابطه (۹) تبعیت کردند، آنگاه می‌گوییم که با یک چاربردار سروکار داریم.

به عنوان مثال، دو رویداد E_1 و E_2 را در نظر بگیرید. فرض کنیم E_1 در چارچوب S دارای مختصات $x^\mu = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ و $x'^\mu = (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ باشد. این دو مجموعه مختصات از طریق تبدیل لورنتز به یکدیگر مربوط می‌شوند. روابط مشابه برای E_2 نیز وجود دارد. بنابراین برای بازه‌های مختصات بین E_1 و E_2 در دو چارچوب S و S' می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - v\Delta x)\end{aligned}$$

(۱۱)

بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (12)$$

یا

$$\Delta x^\mu = L^\mu_\nu \Delta x^\nu \quad (13)$$

پس Δx^μ یک چاربردار است.

۱.۲.۳ ضرب داخلی چاربردارها و متریک مینکوفسکی

چگونه می‌توان دو چاربردار A, B را در هم ضرب داخلی کرد؟ بديهی است قاعده ضرب داخلی بردارهای سه بعدی فضای اقلیدسی به کار نمی‌آید. دیدیم که، به جای طول در فضای اقلیدسی، در فضای مینکوفسکی بازه فضازمانی s می‌نشیند. پس لازم است از این بازه ناوردا برای تعریف «طول» یا ضرب داخلی استفاده کنیم. بنابراین ضرب داخلی دو بردار A^μ و B^μ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A \cdot B = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \quad (14)$$

در این صورت اندازه بازه میان دو رویداد می‌شود

$$(\Delta X)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta s)^2 \quad (15)$$

که یک ناورداست. به عبارت دیگر طول یک چاربردار، و همین‌طور ضرب داخلی دو چاربردار، مستقل از دستگاه مختصات است و تحت تبدیل لورنتز ناورداست. با استفاده از قاعده جمع‌زنی اینشتین می‌توان طول یک چاربردار را به شکل ساده‌تری نیز نوشت. رابطه (۱۵) را می‌توان نوشت

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (16)$$

که در آن

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۱۷)$$

به عبارت دیگر $\eta_{\mu\nu}$ یک ماتریس قطری است که جمله $0 \circ 0$ آن $+1$ و بقیه جمله‌های قطر $1-1$ است. جمله‌های غیرقطری هم صفر هستند. این نماد تعمیم نماد δ_{ij} در هندسه سه بعدی است که آن هم قطری است اما همه سه مؤلفه روی قطر آن برابر $+1$ است. اگر دقیق‌تر به رابطه (۱۵) نگاه کنید این سؤال پیش می‌آید که نماد $\eta_{\mu\nu}$ چه موجودی است؟ بیایید همین رابطه را در دستگاه S' نگاه کنیم: در سمت چپ، Δs^2 ناوردا است، اما چاربردار Δx^μ تبدیل می‌شود. سؤال این است که $\eta_{\mu\nu}$ چگونه تغییر می‌کند یا تبدیل می‌شود؟ از این ویژگی که بازه بین رویدادها مستقل از دستگاه لخت است استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \eta_{\mu\nu} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} L_\rho^\mu L_\sigma^\nu \Delta x^\rho \Delta x^\sigma \\ &= \eta_{\rho\sigma} \Delta x^\rho \Delta x^\sigma \end{aligned} \quad (۱۸)$$

پس

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} L_\rho^\mu L_\sigma^\nu \quad (۱۹)$$

وارون ماتریس η را با $\eta^{\mu\nu}$ نشان می‌دهیم تا در رابطه‌ها بتوانیم از قاعده جمع زنی اینشتین بهتر استفاده کنیم. پس

$$\eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (۲۰)$$

در واقع رابطه (۱۸) نمایشگر چگونگی تبدیل ماتریس در اثر تبدیل دستگاه مختصات است.

۲.۲.۳ مؤلفه‌های پادوردا و هموردای چاربردارها

چاربردار A با مؤلفه‌های A^μ را در نظر بگیرید. به کمک متریک مینکوفسکی می‌توان چهار کمیت A_μ را به صورت زیر تعریف کرد

$$A_\mu := \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad (۲۱)$$

این چهار کمیت را مؤلفه‌های هموردای بردار A می‌نامند. گاهی هم به مسامحه A_μ چاربردار هموردا نامیده می‌شود. به خاطر تمایز با این مؤلفه‌های هموردا چهار کمیت A^μ را مؤلفه‌های پادوردای بردار A ، یا فقط چاربردار پادوردا می‌نامند. رابطه (۲۰) را می‌توان به کمک وارون متریک، یعنی $\eta^{\mu\nu}$ ، وارون کرد و مؤلفه‌های پادوردا را بر حسب مؤلفه‌های هموردا به دست آورد.

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu \quad (۲۲)$$

تبدیل چاربردار هموردا تحت تبدیل لورنتز، با توجه به رابطه (۱۸)، به سهولت به دست می‌آید:

$$A'_\mu = \eta_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} L_\rho^\nu A^\rho = \eta_{\mu\nu} L_\rho^\nu \eta^{\rho\sigma} A^\sigma \quad (۲۳)$$

به این ترتیب می‌بینیم که مؤلفه‌های هموردا هم از قاعده تبدیل معینی پیروی می‌کنند. مؤلفه‌های هموردا کمک می‌کنند تا ضرب داخلی را به شکل متعارف بنویسیم:

$$A.A = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = A^\mu A_\mu \quad (۲۴)$$

۳.۲.۳ ضرب تانسوری چاربردارها

منظور از ضرب دو چاربردار عملی است که از دو چاربردار موجودی دیگر بسازد که تحت تبدیل لورنتز رفتار مشخصی داشته باشد. دو چاربردار A^μ ، B^ν را در نظر بگیرید. می‌گوییم حاصلضرب تانسوری این دو چاربردار موجودی است با دو شاخص، $T^{\mu\nu}$ ، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \quad (۲۵)$$

در واقع فرض کرده‌ایم دو چاربردار انتزاعی A و B (نه مؤلفه‌های آنها) را می‌توان به صورت $T = A \otimes B$ ضرب کرد، که در آن نماد \otimes علامت ضرب تانسوری است. موجود جدید را تانسور می‌نامیم که مؤلفه‌های آن از رابطه (۲۵) داده می‌شود. به صراحت می‌توان نشان داد که این تانسور $T^{\mu\nu}$ تحت تبدیل لورنتز به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$T'^{\mu\nu} = L^\mu_\rho L^\nu_\sigma T^{\rho\sigma} \quad (۲۶)$$

به همین دلیل هر موجود با دو شاخص را که به صورت بالا تبدیل می‌شود تانسور رتبه ۲ می‌نامیم. همان گونه که در مورد مؤلفه‌های پادوردا و هموردای بردارها دیدیم، می‌توانیم $T^{\mu\nu}$ را مؤلفه‌های پادوردای تانسور T تلقی کنیم. هر شاخص $T^{\mu\nu}$ را می‌توان با یک بار ضرب کردن در متریک $\eta^{\mu\nu}$ پایین آورد و به شاخص هموردا تبدیل کرد. مثلاً

$$T^\nu_\mu = \eta_{\mu\rho} T^{\rho\nu} \quad (۲۷)$$

به همین ترتیب می‌توان متریک $\eta_{\mu\nu}$ را مؤلفه‌های هموردای یک تانسور تلقی کرد، که البته تانسوری است ناوردا، چون مؤلفه‌های آن تحت تبدیل لورنتز عوض نمی‌شود. رابطه (۱۷) هم‌ارز ماتریسی تانسور متریک است.

۳.۳ فضای مینکوفسکی

در قسمت قبلی تعریف چاربردار را دیدیم و به طور مختصر راجع به خواص آن صحبت کردیم. قاعدتاً تعداد مؤلفه‌های بردار نشان‌دهنده بعد فضا است و در نتیجه فضای نسبیت خاص یک فضای چهاربعدي است. اما باید گفت با وجود این که رفتار چاربردارها با بردارهای سه‌بعدي در مکانیک نیوتونی خیلی شبیه است، ولی تفاوت‌های موجود باعث می‌شود نتوانیم هندسه نسبیت خاص را با هندسه فضای متعارف در فیزیک کلاسیک یکسان فرض کنیم. در ادامه این بخش منظور از هندسه فضای نسبیت خاص را توضیح خواهیم داد. به این منظور یک بار دیگر بازه فضازمانی را به شکل دیفرانسیلی آن می‌نویسیم

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (۲۸)$$

اگر مطابق آنچه که در بخش گذشته گفته شد مختصات را با شاخص‌های عددی شماره‌گذاری کنیم می‌توانیم رابطه (۲۸) را به شکل زیر بنویسیم

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (۲۹)$$

که به شکل بسته زیر هم نوشته می‌شود

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} (dx^\mu)(dx^\nu) \quad (۳۰)$$

$\eta_{\mu\nu}$ همان ماتریسی است که در رابطه (۱۷) آن را دیدیم. بنابراین عناصر این ماتریس تعیین کننده بازه فضا زمانی بین دو رویداد و یا در واقع فاصله بین دو نقطه در فضای چهاربعدی رویدادها هستند. تعریف ماتریس η مختص فضای چهاربعدی در نسبیت خاص نیست و فاصله بین دو نقطه را در هر فضایی می‌توان به شکل رابطه‌ای مانند (۳۰) نوشت. که البته شکل ماتریس η (متریک) در آنها متفاوت است. می‌توانید ضمن مقایسه این وضعیت با حالت فضای سه بعدی در مکانیک کلاسیک ماتریس متناظر با η را در آن حالت هم به دست آورید: یک ماتریس 3×3 .

بنابراین فضای نسبیت خاص یک تعمیم ساده از ۳ بعد به ۴ بعد در مکانیک کلاسیک نیست، عنصرهای فضایی η به جای ۱ برابر با ۱- است. همین علامت منفی باعث اختلاف مهم با مکانیک کلاسیک می‌شود که نمونه‌اش را در بازه‌های فضا زمانی مشاهده کردیم.

η را به نام متریک فضا می‌شناسیم. در حالت کلاسیک که نمایش ماتریسی متریک، یک ماتریس یکه است فضا را فضای اقلیدسی می‌نامند. همچنین فضای چهاربعدی نسبیت خاص به همراه متریک مینکوفسکی، فضای مینکوفسکی نامیده می‌شود. پس با توجه به اینکه خصوصیات هندسی یک فضا با متریک آن مشخص می‌شود، آشکار است که هندسه فضای مینکوفسکی با فضای اقلیدسی متفاوت است. مجدداً یاد آور می‌شویم که در فضای مینکوفسکی مجذوریک فاصله می‌تواند منفی باشد، قانون مثلث دیگر برقرار نیست. اما متریک η در تعریف کمیت‌های دیگری که از خصوصیات یک فضا ناشی می‌شود، ظاهر می‌شود. مهم‌ترین کمیتی که در این زمینه می‌توان به آن اشاره کرد ضرب داخلی بین دو بردار است، که در مورد چاربردارها در بخش ۳.۱.۳ به آن اشاره شد.

۴.۳ میدان‌های تانسوری

موجوده‌های ریاضی، مانند بردار و تانسور، می‌توانند به مختصات وابسته باشند، در این صورت در فیزیک به آن‌ها میدان می‌گوییم. معروفترین میدان، میدان الکتریکی و مغناطیسی است که هر کدام برداری سه بعدی اقلیدسی اما وابسته به مکان است. انرژی یک ذره در میدان گرانش زمین به مکان وابسته است. می‌توان آن را یک کمیت نرده‌ای وابسته به مکان در نظر گرفت. میدان گرانش زمین را می‌توان به پتانسیل گرانش اطلاق کرد که کمیتی نرده‌ای است یا به نیروی گرانش اطلاق کرد که در این صورت کمیتی برداری است. در نسبیت میدان‌ها موجوداتی هستند در چارچوب تبدیل لورنتز، میدان نرده‌ای، میدان برداری، یا میدان تانسوری. همگی این‌ها موجودهایی هستند وابسته به رویداد، یعنی مختصات فضا زمان، که به ازای هر رویداد مقدار مشخصی اختیار می‌کنند.

به این ترتیب در نسبیت منظور از کمیت‌هایی مانند $\phi(x^\mu)$ ، $A^\mu(x^\nu)$ ، یا $T^{\mu\nu}(x^\alpha)$ میدان‌های نرده‌ای، برداری، یا تانسوری لورنتزی است. بدیهی است قواعد جبری تانسورها برای میدان‌های تانسوری نیز معتبر است. البته باید توجه کرد که به هنگام رفتن از یک چارچوب به چارچوبی دیگر، و اعمال تبدیل لورنتز، شناسه میدان نیز تبدیل می‌شود:

$$T'^{\mu\nu}(x'^\alpha) = L^\mu_\rho L^\nu_\sigma T^{\rho\sigma}(x^\alpha) \quad (31)$$

به این ترتیب میدانی لورنتزی است که تحت تبدیل لورنتز در این رابطه صدق کند

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (32)$$

زیرا شکل تابع ϕ هم پس از جانشینی x' جای x تغییر می‌کند، اما مقدار تابع نباید عوض شود.

۱.۴.۳ مشتق میدان‌های تانسوری

مشتق‌گیری از میدان‌های تانسوری در مختصات دکارتی کار ساده‌ای است. هنگام اعمال مشتق باید توجه کنیم که عملگر مشتق دو نقش بازی می‌کند: یکی نقش مشتق‌گیری که اعمال آن روی هر مؤلفه میدان تانسوری همانند اعمال مشتق روی یک تابع است،

نقش دیگر آن نقش جبری است. مشتق بسته به نوع آن مانند یک چاربردار یا چارتانسور عمل می‌کند، پس ضرب آن در یک تانسور مانند ضرب تانسوری، تانسوری با مرتبه بالاتر تولید می‌کند. به طور مثال عملگر $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ را در نظر بگیرید، که بیانگر مشتق مرتبه اول نسبت به مختصه x^μ است. این عملگر تانسور مرتبه دوم $T^{\alpha\beta}$ را به تانسور مرتبه سوم $T_{,\mu}^{\alpha\beta} = \partial_\mu T^{\alpha\beta}$ تبدیل می‌کند. که در شاخص α و β یادورداست و در شاخص μ هموردا! در اینجا نقش جبری ∂_μ مانند یک چاربردار هموردا است. به همین ترتیب می‌توان چاربردار یادوردا $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$ را ساخت و نیز ضرب داخلی $\partial_\mu \partial^\mu$ را تعریف کرد. بدیهی است این ضرب داخلی منجر به یک نرده‌ای لورنتزی می‌شود که آن را دالامبری یا عملگر دالامبری می‌نامند:

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (33)$$

۲.۴.۳ انتگرال میدان‌های تانسوری

(خواندن این بخش برای کسانی که جبر خطی را فراموش کرده‌اند و بیماران قلبی توصیه نمی‌شود!)

انتگرال‌گیری از میدان‌های تانسوری در دو مورد کاربرد وسیعی در فیزیک دارد. یکی هنگامی که روی کل فضا زمان انتگرال می‌گیریم، دوم هنگامی که انتگرال‌گیری ما روی یک حجم سه بعدی، یا ابرسطحی سه بعدی از فضا زمان، انجام می‌گیرد. هدف از این انتگرال‌گیری به دست آوردن کمیت‌هایی است که مانند انتگرالده موجودی ریاضی هستند و بنابراین مستقل از ناظر. انتگرال‌گیری روی ابرسطح‌ها تفاوت دیگری هم با نظیر سه بعدی‌اش دارد: عمود بر ابرسطح ممکن است فضاگونه، زمان گونه، یا حتی نورگونه باشد. ابرسطح فضاگونه تعمیم فضای سه بعدی در یک زمان مشخص است: ابرسطح سه بعدی معادل (ثابت t) یک تعریف هموردا نیست! برای تعریف این ابرسطح‌ها و عنصر انتگرال‌گیری روی آنها باید از مفاهیم هموردا استفاده کرد.

در فضای مینکوفسکی چهارپایه $e_\mu = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که هر کدام از e_μ ها یک چاربردار واحد در فضای مینکوفسکی است و شاخص μ بیانگر مؤلفه‌ها نیست، بلکه شماره‌ده بردار است. اکنون در جهت هر یک از این پایه‌ها مقدار دیفرانسیل dx^μ را در نظر می‌گیریم: یعنی بردارهای $e_0 dt$ ، $e_1 dx$ ، $e_2 dy$ و $e_3 dz$. حجم مکعبی که این چاربردارهای بینهایت کوچک می‌سازند عنصر حجم چهاربعدی را می‌دهد (برای فهم بهتر این رابطه حجم مکعب در ۳ بعد را به خاطر بیاورید):

$$dV = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (e_0 dt)^\mu (e_1 dx)^\nu (e_2 dy)^\rho (e_3 dz)^\sigma = dt dx dy dz \quad (34)$$

که در آن

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{یک یا چند شاخص تکراری} \\ +1 & \text{جابجست زوج از مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ۳ برای شاخصها} \\ -1 & \text{جابجست فرد از مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ۳ برای شاخصها} \end{cases} \quad (35)$$

این عنصر حجم چهاربعدی یک نرده‌ای لورنتزی است. بنابراین، اگر از یک تانسور روی این حجم چهاربعدی انتگرال گرفته شود نتیجه یک تانسور است. حالا می‌رویم به سراغ انتگرال‌گیری روی یک ابرسطح سه بعدی.

گیریم ابرسطح $\sigma(\lambda_i) = 0$ با سه پارامتر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ پرمایش شده باشد، در امتداد هر یک از خطوط مختصاتی متناظر با λ_i بردارهای بینهایت کوچک $dx_1^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda_1} d\lambda_1$ ، $dx_2^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda_2} d\lambda_2$ و $dx_3^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda_3} d\lambda_3$ را تعریف می‌کنیم. عنصر حجم سه بعدی، یا بردار بینهایت کوچک $d\sigma_\mu$ عمود بر ابرسطح σ را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} d\sigma_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx_1^\nu dx_2^\rho dx_3^\sigma \\ &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda_1} \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda_2} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \lambda_3} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \end{aligned} \quad (36)$$

به وضوح دیده می‌شود که این بردار بر هر سه بردار dx_i^μ عمود است:

$$d\sigma_\mu \cdot dx_i^\mu = 0 \quad (۳۷)$$

اگر ابرسطح را با $t = t_0$ تعریف کنیم، بردار عمود بر سطح می‌شود:

$$d\sigma_0 = dx dy dz = d^3x, \quad d\sigma_i = 0 \quad (۳۸)$$

به این ترتیب عنصر انتگرال‌گیری روی ابرسطح به صورت یک چاربردار تعریف می‌شود، و انتگرال‌گیری ما یک تعریف همورد است. این چاربردار، مانند هر چاربردار فضای مینکوفسکی، می‌تواند فضاگونه، زمان‌گونه، یا نورگونه باشد:

$$\begin{aligned} d\sigma_\mu d\sigma^\mu &> 0 \\ d\sigma_\mu d\sigma^\mu &< 0 \\ d\sigma_\mu d\sigma^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (۳۹)$$

بنابراین حجم سه‌بعدی فضای مورد نظر ما، که معادل ابرسطح $t = \text{const}$ است، ابرسطحی است فضاگونه که چاربردار عنصر حجم آن برداری است زمان‌گونه.

با این مقدمات می‌توانیم قضیه گaus را بنویسیم:

$$\int_R d^4x T_{,\nu}^{\mu\nu} = \int_{\partial R} d\sigma_\mu T^{\mu\nu} \quad (۴۰)$$

که در آن R حوزه انتگرال‌گیری چهاربعدی ماست و ∂R مرز سه‌بعدی آن است که ابرسطحی است بسته. حالا می‌خواهیم موردی را بررسی کنیم که واگرایی تانسور $T^{\mu\nu}$ در حوزه R صفر است:

$$T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \int_R d^4x T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (۴۱)$$

بنابراین مقدار انتگرال در هر حوزه‌ای که درون R باشد هم صفر است. اکنون نشان می‌دهیم که انتگرال روی تانسور دلخواه $T^{\mu\nu}$ روی ابرسطح σ ، یعنی

$$\int_\sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\mu = p^\nu(\sigma) \quad (۴۲)$$

مستقل است از ابرسطح σ به شرطی که

$$T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (۴۳)$$

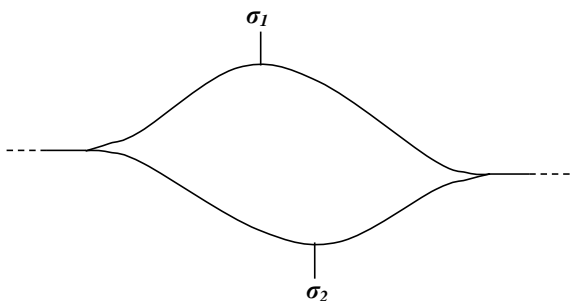
و $T^{\mu\nu}$ در بینهایت فضایی به سمت صفر برود. برای اثبات دو ابرسطح σ_1 و σ_2 را در نظر بگیرید که همدیگر را در محلی متناهی قطع می‌کنند و یا آنها را به مرزی مناسب در بینهایت با سطوحی نافضاگونه متصل می‌کنیم، به گونه‌ای که سطح بسته داخل R باشد. در هر دو صورت به خاطر قضیه گaus داریم:

$$\int_{\sigma_1} T^{\mu\nu} d\sigma_\mu - \int_{\sigma_2} T^{\mu\nu} d\sigma_\mu = \int_S T^{\mu\nu} d\sigma_\mu = 0 \quad (۴۴)$$

که در آن S ابرسطح بسته‌ای است داخل R که در آن $T_{,\nu}^{\mu\nu}$ برابر با صفر می‌شود. به این ترتیب استقلال انتگرال (۴۱) از ابرسطح دلخواه σ اثبات می‌شود. به عنوان مثال، ابرسطح σ را اگر ابرسطح فضاگونه $t = t_0$ در نظر بگیریم داریم:

$$p^\nu = \int_{t=t_0} T^{\sigma\nu} dx^3 \quad (۴۵)$$

گرچه به نظر می‌رسد این انتگرال به t_0 وابسته است اما به وضوح از اثبات بالا دیده می‌شود که نتیجه انتگرال، یعنی p^ν ، مستقل از زمان t_0 و ابرسطح $t = t_0$ است.



شکل ۲.۳:

تمرین

(۱) ماتریس تبدیل L را برای تبدیل لورنتز در یک بعد فضا بنویسید و رابطهٔ زیر را تحقیق کنید.

$$L^T \eta L = \eta$$

(۲) نشان دهید ماتریس

$$L_{\mu}^{\sigma} = \eta_{\mu\nu} L_{\rho}^{\nu} \eta^{\rho\sigma}$$

وارون و ترانزپوز ماتریس L_{ρ}^{ν} است.

(۳) تبدیل $\vec{x} \rightarrow i\vec{x}$ متریک مینکوفسکی را به متریک اقلیدسی

$$ds^2 = dl^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

تبدیل می‌کند. در این فضای اقلیدسی شده تبدیل لورنتز به دوران چهاربعده تبدیل می‌شود (چرا؟). آیا تحت تبدیل دوران تمایز میان (مؤلفه‌های) هموردا و پادوردا لزومی دارد؟

(۴) تبدیل لورنتز و نیز تبدیل دوران در فضای اقلیدسی هر دو خطی‌اند. اما تبدیل مختصات مثلاً از دکارتی به کروی در سه بعد اقلیدسی خطی نیست. چگونه می‌توانید برای این مورد بردارهای هموردا و پادوردا را تعریف کنید؟ آیا سه‌تایی (r, θ, ϕ) می‌تواند نماینده نوعی بردار باشد؟

(۵) میدان برداری $u^{\mu}(x)$ را در نظر بگیرید. داریم

$$u^2 = u_{\mu} u^{\mu} = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2$$

u^0 و $u_{\mu} u^{\mu}$ هر دو تابعی از x^{μ} هستند. آیا این دو کمیت نرده‌ای هستند؟ جواب را توضیح دهید.

(۶) نشان دهید که حاصل ضرب داخلی دو میدان برداری یک کمیت نرده‌ای است.

(۷) نشان دهید که رد تانسور مختلط T_{ν}^{μ} یک کمیت نرده‌ای است، اما کمیت $\sum_{\mu} T_{\mu\mu}$ که در آن $T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} T_{\nu}^{\rho}$ است نرده‌ای نیست.

(۸) نشان دهید که هر بردار نافیضاگونه اگر در دستگاهی آینده‌سو باشد (داخل یا روی مخروط نور آینده قرار گیرد)، آنگاه در هر دستگاه دیگری آینده‌سو است.

(۹) نشان دهید که بردارهای زمان‌گونه، فضاگونه و نورگونه را می‌توان به ترتیب به صورت‌های زیر نوشت:

$$(u^{\mu}) = (\pm\sqrt{u^2}, 0, 0, 0)$$

$$(u^{\mu}) = (0, \sqrt{-u^2}, 0, 0)$$

$$(u^{\mu}) = (\pm 1, 1, 0, 0)$$

(۱۰) نشان دهید که هر بردار عمود بر یک بردار نورگونه یا نورگونه است یا متناسب با آن. در مورد بردارهای فضاگونه و زمان گونه چه می توان گفت؟

(۱۱) نشان دهید که مجموع چاربردارهای نافضاگونه آینده سو، نافضاگونه و آینده سواست (کوژی مخروط نور).

(۱۲) هر تانسور مرتبه دوم را می توان به صورت مجموع دو تانسور متقارن و پاد متقارن نوشت:

$$T'_{\mu\nu} = T'_{(\mu\nu)} + T'_{[\mu\nu]}$$

(۱۳) هرگاه بتوان تانسوری را به گونه ای بخش گرد که هر بخش آن تحت تبدیل مختصات جداگانه تبدیل شود آن تانسور را تحویل پذیری می نامند. تانسور $T'_\nu{}^\mu$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این تانسور تحویل پذیر است. بخش های تحویل یافته این تانسورها عبارتند از رد تانسور $T = T'_\mu{}^\mu$ و تانسور بی رد $T'_\nu{}^\mu - \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu T$.

(۱۴) A_μ یک چاربردار همورداست. مشتق $\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = A_{\mu,\nu}$ در حالت تبدیل های عام تانسور نیست. اما موجود پادمتقارن

$$A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} A_{\rho,\sigma}$$

همواره یک تانسور پادمتقارن است، چه تبدیل ها از نوع لورنتز (خطی) باشند چه نباشند. این موجود پادمتقارن را با $F_{\mu\nu}$ نشان می دهیم. نشان دهید که موجود

$$\chi_{\mu\nu\rho} := F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu}$$

تانسور کاملاً پادمتقارن همورداست.

(۱۵) نشان دهید که نماد تعمیم یافته کرونگر، $\frac{1}{p!}\delta_{\mu\nu\rho\dots}^{\chi\phi\sigma\dots}$ ، یک عملگر تصویر است، یعنی

$$\frac{1}{p!}\delta_{\mu\nu\rho\dots}^{\chi\phi\sigma\dots} \cdot \frac{1}{p!}\delta_{\chi\phi\sigma\dots}^{\alpha\beta\gamma\dots} = \frac{1}{p!}\delta_{\mu\nu\rho\dots}^{\alpha\beta\gamma\dots}$$

(۱۶) با استفاده از اینکه $\det L_\mu^\nu = +1$ ، نشان دهید $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ یک تانسور لورنتزناورداست.

(۱۷) رابطه های زیر را اثبات کنید

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4!$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\phi} = -3!\delta_\sigma^\phi$$

(۱۸) نشان دهید برای تانسورهای پادمتقارن T_μ^ν :

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4!}\epsilon_{\sigma}^{\mu\nu\rho} T_{\rho\sigma}^*$$

که در آن

$$T^{*\mu\nu} = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^{\rho\sigma}$$

(۱۹) نشان دهید

$$T^{**} = (-1)^{p-1} T$$

که در آن T یک تانسور کاملاً پادمتقارن رتبه p است.

مراجع

(۱) هندسه تصویری و نسبیت خاص arxiv:gr-qc/0512125

فصل ۴

دینامیک

به منظور بنا نهادن مکانیک بر مبنای نسبیت، که آن را مکانیک نسبیتی می‌نامیم، لازم است ابتدا مفاهیم اصلی مانند سرعت و شتاب را تعریف کنیم. تعریف این مفاهیم، گرچه ساده خواهد نمود، اما بدیهی نیست. مهم‌ترین نکته در بیان مفاهیم نسبیتی این است که باید از موجودهای ریاضی استفاده کنیم. بنابراین کمیت‌های ما باید نرده‌ای، چاربردار، یا چارتانسوری باشند. همین قید ما را از مکانیک نیوتنی جدا می‌کند. باید دید که نتیجه اصل نسبیت در مکانیک نسبیتی به چه پدیده‌های جدیدی منجر می‌شود و آیا مکانیک جدید در حد سرعت‌های کم مکانیک نیوتنی را می‌دهد؟

۱.۴ سرعت، تکانه، و شتاب

سرعت در مکانیک نیوتنی برداری است که از مشتق بردار مکان بر حسب زمان به دست می‌آید. جانشین بردار مکان در نسبیت چاربردار فضا زمان است که محل رویداد را در فضای مینکوفسکی مشخص می‌کند. اگر ذره‌ای را در نظر بگیریم که نسبت به دستگاه S حرکت می‌کند چاربردار فضا زمان آن، x^μ ، تابعی از زمان است. آیا مشتق x^μ نسبت به زمان هنوز یک چاربردار است؟ دیفرانسیل x^μ متناظر است با اختلاف دو چاربردار، پس می‌توان آن را چاربردار در نظر گرفت. این چاربردار اگر به دیفرانسیل زمان تقسیم شود، دیگر نه یک چاربردار است و نه هیچ موجود ریاضی دیگر، زیرا t و dt تنها مؤلفه‌ای از چاربردار فضا زمان است و یک کمیت نرده‌ای نیست. پس اگر به دنبال کمیتی می‌گردیم که بتوانیم dx^μ را به آن تقسیم کنیم، آن کمیت باید نرده‌ای لورنتزی باشد. تنها کمیتی که می‌شناسیم و تنها به مختصات بستگی دارد ویژه زمان τ یا s است. پس می‌توانیم از این کمیت استفاده کنیم و چارسرعت را این‌گونه تعریف کنیم

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (1)$$

استنباط ما این است که روی جهان خط ذره به عنوان یک خم در فضای چهاربعدی مینکوفسکی پارامتر s تعریف شده است. پس x^μ تابعی است از s ، که یک کمیت نرده‌ای مستقل از ناظر است. بنابراین نسبت $\frac{dx^\mu}{ds}$ تحت تبدیل لورنتس همانند یک چاربردار تبدیل می‌شود و موجود ریاضی به درخور است. اکنون نگاهی می‌اندازیم به مؤلفه‌های این چاربردار:

$$v^\mu = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \frac{dt}{ds} \left(1, \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \quad (2)$$

در فصل ۲ دیدیم که $\frac{dt}{ds} = \gamma(v)$ ، که در آن v قدر مطلق سرعت ذره نسبت به دستگاه S است. پس رابطه (۲) این گونه خلاصه می‌شود:

$$v^\mu = \gamma(1, \vec{v}) \quad (3)$$

در این جا \vec{v} سرعت سه بعدی نیوتنی است. مؤلفه صفرم در اینجا طبیعتاً جدید است و انتظار ما این است که مؤلفه فضایی چاربردار همان سرعت سه بعدی نیوتونی باشد، که البته با آن متفاوت است. اما در سرعت‌های کم $v \ll 1$ داریم $\gamma \simeq 1$ ، پس

$$v^\mu \simeq (1, \vec{v}), \quad v \ll 1 \quad (4)$$

می‌بینیم که در سرعت‌های کم بخش فضایی چارسرعت همان سرعت سه بعدی نیوتنی است، و مؤلفه صفرم هم یک است. این نشان می‌دهد که تعریف چارسرعت تعریف مناسبی است، در عین اینکه می‌دانیم راهی دیگر برای تعریف سرعت هم نداریم. چاربردار سرعت خاصیت مهمی دارد. طول این چاربردار را حساب می‌کنیم:

$$v^\mu v_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 \quad (5)$$

به وضوح دیده می‌شود که چاربردار سرعت نه تنها زمان‌گونه است، بلکه طول آن هم یک است. این پدیده جدیدی در نسبیت است که باید یا آن خو بگیریم. چون v^μ زمان‌گونه است، پس همواره می‌توانیم در هر لحظه به دستگاهی برویم که در آن $v^\mu = (1, 0)$ باشد. این دستگاه همان دستگاه سکون لحظه‌ای ذره است. با این تعریف متوجه می‌شویم که بردار v^μ همواره بر جهان خط ذره مماس است و نقش محور زمان را برای دستگاه سکون لحظه‌ای بازی می‌کند.

به منظور تعریف تکانه لازم است برای جرم ذره فرضی بکنیم. به هر ذره کمیتی به نام جرم نسبت می‌دهیم که همواره ثابت باشد و آن را m_0 می‌نامیم. شاخص صفر در این جا بیانگر این است که این جرم همواره در دستگاه سکون ذره تعریف می‌شود و به ذره ساکن وابسته است. علت این است که اگر جرم را وابسته به ناظر تعریف کنیم در این مرحله توضیحی برای وابستگی آن به سرعت یا ناظر نداریم. بنابراین به هر ذره چارتکانه‌ای نسبت می‌دهیم به این صورت:

$$p^\mu = m_0 v^\mu = m_0 \gamma(1, \vec{v}) \quad (6)$$

واضح است که این تعریف، در سرعت‌های کم به چاربرداری می‌رسد که بخش فضایی آن همان تکانه سه بعدی نیوتونی است:

$$p^\mu \simeq m_0 (1, \vec{v}) \quad (7)$$

بخش زمانی این چاربردار اکنون در حد نیوتونی برابر جرم سکون ذره است، اما در حالت کلی برابر $m_0 \gamma$ است که به سرعت وابسته است. با توجه به تعبیر جرم سکون در حد نیوتونی طبیعی است که این کمیت را جرم بنامیم:

$$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (8)$$

در بخش‌های بعدی با مفهوم فیزیکی این جرم بیشتر آشنا خواهیم شد.

حاشیه: مفهوم جرم و مقدار ماده

سوآلی که بلافاصله پس از تعریف مجدد جرم در نسبیت می توان مطرح کرد این است که آیا جرم برابر با مقدار ماده است؟ و آیا پایستگی جرم به معنی پایستگی ماده است؟
 خواص فضا: زمان و ناظر در نسبیت خاص پایستگی جرم را به معنی پایستگی انرژی به دست می دهد؛ به عبارت دیگر انرژی مضربی است از جرم لختی. چون اصل هم ارزی در نسبیت عام بیان می کند که جرم لختی و جرم گرانشی برابر هستند، پس می توان به طور کلی گفت که انرژی و جرم متناسب اند. به این ترتیب به مفهوم جرم نباید به صورت محتوای مادی یک ذره نگاه کرد، بلکه صحیح تر این است که جرم را با انرژی ذره مترادف بگیریم.

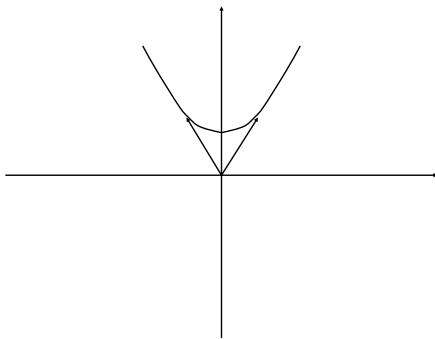
از سوی دیگر پرسش متفاوتی هم قابل طرح است: آیا جرم سکون یک جسم برابر با مجموع جرم سکون اجزای تشکیل دهنده آن است؟ به نظر می رسد از دیدگاه هم ارزی جرم و انرژی، پاسخ به این پرسش منفی است زیرا در محاسبه جرم سکون باید علاوه بر جرم اجزای تشکیل دهنده، انرژی بستگی آنها را نیز به حساب آوریم. اکنون می توان در مورد ذراتی که تصور می کنیم خود از اجزایی تشکیل نشده اند (مانند الکترون) این بحث را ادامه داد. در اینجا هم مجدور تکانه رفتار عجیبی دارد:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m_0^2 \quad (9)$$

بنابراین مجدور چارتکانه هر ذره، مستقل از نوع حرکت ذره، ثابت است و برابر است با مجدور جرم سکون همان ذره. حالا مجدور چارتکانه را بر حسب مختصات می نویسیم. بخش متناظر با فضای آن بیانگر مؤلفه های فضایی چارتکانه و بخش زمانی آن متناظر با مؤلفه صفرم چارتکانه است. باز هم برای سهولت مسئله را با یک بعد فضا بررسی می کنیم، پس داریم

$$p^2 = p_0^2 - p_x^2 = m_0^2 \quad (10)$$

این رابطه نشان می دهد که ذره همواره طوری حرکت می کند که چاربردار تکانه آن روی یک هذلولی با معادله بالا می لغزد. این هذلولی را «لاک جرم» می نامند.



شکل ۱.۴:

بدیهی است در حالت چهاربعدهای با یک هذلولی گون در فضای چهاربعدهای سروکار داریم.

شتاب را هم می‌توان مانند چارسرعت تعریف کرد. برای اینکه شتاب هم موجودی ریاضی باشد، باید از چاربردار سرعت نسبت به ویژه‌زمان s مشتق بگیریم:

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{dv^\mu}{ds} \quad (11)$$

پس شتاب هم یک چاربردار است. برای تعیین نوع این چاربردار بهترین راه مشتق‌گیری از مجذور چارسرعت است که صفر می‌شود:

$$\frac{d}{ds}(v^\mu v_\mu) = 2a^\mu v_\mu = 0 \quad (12)$$

بنابراین، حاصلضرب سرعت در شتاب در نسبیت همواره صفر است. این به آن معنی است که چارشتاب برداری است فضاگونه، بر خلاف سرعت که همواره زمان‌گونه است. با این تعریف از شتاب می‌توانیم نیرو را هم چاربردار متناسب با شتاب یا برابر با مشتق تکانه تعریف کنیم:

$$f^\mu = m_0 a^\mu = \frac{d}{ds} p^\mu \quad (13)$$

از رابطه (۱۲) فوری نتیجه می‌شود

$$f^\mu v_\mu = 0 \quad (14)$$

یعنی چاربردار نیرو بر چاربردار سرعت عمود است و برداری است فضاگونه. بنابراین در دستگاه سکون لحظه‌ای چارنیرو به صورت $f^\mu = (0, \vec{f})$ در می‌آید. در یک دستگاه دلخواه می‌توان دید (تمرین) که مؤلفه صفرم چارنیرو برابر است با کار انجام شده در واحد ویژه‌زمان. بنابراین باید انتظار داشت که مؤلفه صفرم تکانه از جنس انرژی ذره باشد. از طرف دیگر اگر مؤلفه صفرم تکانه را بر حسب سرعت بسط دهیم به دست می‌آوریم

$$p^0 = \gamma m_0 = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (15)$$

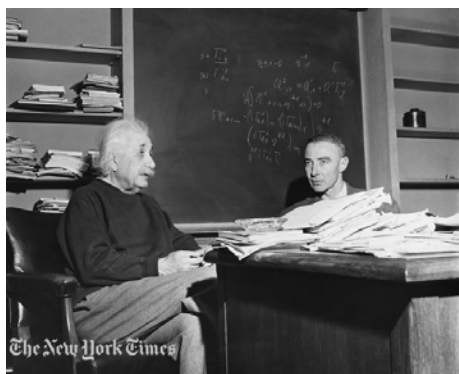
جمله اول جرم سکون ذره است، اما جمله دوم همان انرژی جنبشی نیوتونی است. پس طبیعی است اگر فرض کنیم مؤلفه صفرم تکانه تشکیل می‌شود از انرژی سکون و انرژی جنبشی نسبی، T :

$$\begin{aligned} p^0 &= m_0 + T \\ T &= p^0 - m_0 \end{aligned} \quad (16)$$

انرژی جنبشی نسبی با انرژی جنبشی نیوتونی در جمله‌هایی از مرتبه بزرگی v^4 اختلاف دارند. روابط (۱۶) اگر در مجموعه واحدهای SI نوشته شوند با یک دستکاری کوچک تبدیل می‌شوند به فرمول معروف $E = mc^2$. این رابطه که نمایشگر هم‌ارزی جرم نسبی و انرژی کل است جزء آن دسته از نتایج نسبیت به حساب می‌آید که از شهود فیزیکی ما فاصله دارد. اما بیایید قدری راجع به این هم‌ارزی صحبت کنیم. با توجه به بزرگ بودن ضریب c^2 می‌توان دید که مقدار انرژی معادل جرم حتی برای کوچکترین ذرات هم مقدار بسیار بزرگی است و برای آزاد شدن آن باید اتفاقاتی مثل نابودی زوج ذره-پادذره (زیربخش ۲.۴.۴ را ببینید) روی دهد. همین وضعیت در مورد سیستم‌های متشکل از چند ذره هم برقرار است با یک تفاوت: در اینجا هم تقریباً همه انرژی مربوط به جرم سکون ذرات بنیادی تشکیل دهنده ماده است ولی کسر بسیار کوچکی از این انرژی شامل سهم برهمکنش‌های مختلف بین ذرات سیستم مانند انرژی حرارتی ناشی از حرکت ملکولها، نیروهای بین ملکولی و بین اتمی، و انرژی بستگی ذرات داخل هسته است و می‌توان آنرا در فرآیندهای شیمیایی و هسته‌ای آزاد کرد.

حاشیه: هم‌ارزی جرم و انرژی

اینشتین اولین کسی نیست که راجع به ارتباط جرم و انرژی بحث کرده است. فیزیکدانان دیگری، از جی جی تامسون گرفته تا هانری پوانکاره و لورنتز پیش از او راجع به این ارتباط بررسی کرده‌اند. مثلاً تامسون در ۱۸۸۱ ضمن یک محاسبه نشان داد که یک کرهٔ باردار طوری رفتار می‌کند که انگار دارای یک جرم اضافی $\frac{E}{c^2}$ است، که E انرژی میدان کولنی کره است. اما در همهٔ کارهای قبلی انرژی معادل با جرم ناشی از میدان الکترومغناطیسی است. تنها مدت کوتاهی پس از ارائهٔ فرمول با تعبیر نسبیتی بوسیلهٔ اینشتین، معلوم شد که همهٔ فرآیندهای هسته‌ای و ذرات بنیادی باید با در نظر گرفتن آن توجیه شوند. سر و کلهٔ مفهوم فیزیکی مربوط به مفهوم هم‌ارزی جرم و انرژی در خیلی جاها ظاهر می‌شود: واکنشهای ذرات بنیادی، فرآیند تولید انرژی در ستاره‌ها، نیروگاههای هسته‌ای، و البته بمب اتمی. در دو تصویر زیر اینشتین در حال توضیح هم‌ارزی جرم و انرژی برای خبرنگاران و همچنین در اتاق کارش در پرنستون به همراه رابرت اُپنهایمر مسئول پروژهٔ منهتن (پروژهٔ بمب اتمی آمریکا) دیده می‌شود.



قبل از اتمام این بخش خوب است به پرسش دیگری پاسخ دهیم. چه می‌شود اگر ذره‌ای جرم (سکون) نداشته باشد. یا ذره‌ای، مانند فوتون و گراویتون، روی مخروط نور حرکت کند که برای آن $ds = 0$ است؟ چگونه می‌توان برای چنین ذره‌هایی چارتکانه تعریف کرد؟ با نگاهی به رابطهٔ (۶) دیده می‌شود که برای $ds = 0$ باید $m_0 = 0$ باشد تا تعریف چارتکانه معنی پیدا کند. پس برای فوتون، و هر ذرهٔ دیگری که روی مخروط نور حرکت کند. یعنی سرعت آن c باشد، باید جرم سکون صفر باشد. اما باز هم چارتکانه تعریف نمی‌شود، اما تعریف آن ممکن می‌شود. از زمان پلانک می‌دانیم به فوتون می‌توان تکانهٔ سه‌بعدی $\hbar \vec{k}$ نسبت داد که قدرمطلق آن برابر

است با بسامد ω :

$$|\vec{k}| = \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (۱۷)$$

که در آن \vec{k} بردار موج و λ طول موج فوتون است. از طرف دیگر چاربردار سرعت نور باید نورگونه باشد، پس همین طور چارتکانه فوتون برداری است نورگونه. پس باید بتوان آن را به صورت زیر نوشت

$$p^\mu = \hbar k^\mu = \hbar(\omega, \vec{k}) \quad (۱۸)$$

که در آن k^μ چاربردار موج خوانده می‌شود. این چاربردار نورگونه است و در شرط (۱۷) صدق می‌کند. به این ترتیب چارتکانه برای فوتون هم تعریف می‌شود. از این تعریف در همه فرایندهایی که فوتون درگیر است، مانند ابیراهی نور و اثر کامپتون، استفاده می‌کنیم. توجه کنید که در این تعریف $\hbar\omega$ انرژی فوتون، متناظر است با جرم در تعریف چارتکانه ذره که قبلاً تعریف کردیم. چرا در اینجا مفهومی مانند انرژی سکون، شبیه به جرم سکون پیش نمی‌آید؟ وابستگی ω به دستگاه لخت چگونه تعبیر می‌شود؟ (تمرین).

۲.۴ فرایندهای فوتونی

اکنون خواص فوتون‌ها را با استفاده از روش چاربرداری در چند مثال می‌بینیم.

۱.۲.۴ اثر دوپلر و ابیراهی نور

فرض کنید چاربردار موج فوتونی در چارچوب S' به شکل زیر است:

$$k'^\mu = \omega' (1, \cos\theta', \sin\theta', 0) \quad (۱۹)$$

این فوتون در صفحه $x'y'$ و با زاویه θ' نسبت به محور x' انتشار می‌یابد. حال می‌خواهیم مؤلفه‌های این چاربردار را در دستگاه S که نسبت به S' با سرعت v حرکت می‌کند به دست آوریم. مطابق روش تبدیل در مورد چاربردارهای دیگر می‌توانیم بنویسیم

$$k^\mu = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \omega' \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta' \\ \sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۲۰)$$

از برابر قرار دادن مؤلفه‌های متناظر در دو طرف به دست می‌آوریم

$$\omega = \gamma(1 - v\cos\theta)\omega' \quad (۲۱)$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' - v}{\gamma(1 - v\cos\theta')} \quad (۲۲)$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(1 - v\cos\theta')} \quad (۲۳)$$

رابطه (۲۱) نشان دهنده پدیده‌ای است که به آن اثر دوپلر می‌گوییم. این اثر در فیزیک کلاسیک نیز وجود دارد: اگر یک چشمه موج وجود داشته باشد و چشمه و ناظر نسبت به یکدیگر در حرکت باشند فرکانس موجی که توسط ناظر دریافت می‌شود با فرکانس موج تولید شده متفاوت خواهد بود. اگر در رابطه (۲۱) قرار دهیم $\theta = \theta' = 0$ به دست می‌آوریم

$$\omega' = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \omega \quad (۲۴)$$

این رابطه نسبیتی اثر دوپلر است برای حالتی که چشمه و ناظر روی یک خط به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. بدیهی است که با تبدیل v به $-v$ حالت دور شدن ناظر و چشمه به دست می‌آید که در این حالت $\omega' < \omega$. اگر رابطه (۲۴) را بر حسب طول موج بنویسیم داریم

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \lambda \quad (25)$$

و برای حالت دور شدن ناظر و چشمه

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \lambda \quad (26)$$

از رابطه (۲۶) دیده می‌شود که $\lambda' > \lambda$. بنابراین اگر منبع و چشمه از یکدیگر دور شوند طول موج مشاهده شده نسبت به موج گسیلی بزرگ‌تر است و برای مثال در حالت نور مرئی، طول موج به سمت قرمز طیف انتقال پیدا می‌کند. این پدیده به «انتقال به سرخ دوپلری» معروف است و مبنای یکی از مهم‌ترین کشفیات کیهان‌شناسی در قرن بیستم قرار گرفته است.

روابط (۲۴) تا (۲۶) در واقع هم‌ارز با همان پدیده دوپلری هستند که در فیزیک کلاسیک، مثلاً در مورد یک منبع صوت متحرک می‌شناسیم. اما اکنون فرض کنید در رابطه (۲۱) داشته باشیم $\theta = \frac{\pi}{2}$. یعنی جهت حرکت ناظر عمود بر جهت نور فرودی باشد. آنگاه خواهیم داشت

$$\omega = \omega' \sqrt{1-v^2} \quad (27)$$

این پدیده «اثر عرضی دوپلر» است و هیچ معادل کلاسیکی برای آن وجود ندارد. در واقع این پدیده ناشی از اتساع زمان است که یک اثر خالص نسبیتی می‌باشد. در عین حال در حد نا نسبیتی یعنی $v \ll 1$ ، رابطه (۲۷) به شکل $\omega = \omega'$ تبدیل می‌شود که همان نتیجه آشنای کلاسیک است: در امتداد عمود بر حرکت ناظر، اثر دوپلر رخ نمی‌دهد.

حاشیه: اثرهای نسبیتی در اندازه‌گیری سرعت شعاعی سیاره‌های فراخورشیدی و ستاره‌های دوتایی

اندازه‌گیری دقیق سرعت‌های شعاعی با دقت درازمدت حدود یک متر بر ثانیه امروزه برای چندین تلسکوپ و رصدخانه در دنیا عادی شده است. مهم‌ترین دستاورد علمی این اندازه‌گیری دقیق، کشف سیاره‌های بیرون منظومه شمسی یا فراسیارات است. با استفاده از این روش‌ها می‌توان اثرهای دوپلر نسبیتی را در ستاره‌های دوتایی طیفی دید. سرعت نوعی مؤلفه‌های ستاره‌های دوتایی نزدیک به هم به $150 \frac{km}{s}$ (یعنی $\beta = \frac{v}{c}$ از مرتبه 10^{-4}) می‌رسد. اثر دوپلر کلاسیک انتقال طول موجی برابر با $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \beta$ پیش‌گویی می‌کند. تصحیح بعدی نسبیتی از مرتبه $O(10^{-8})$ است که معادل سرعت از مرتبه $1 \frac{m}{s}$ است.

اندازه‌گیری درازمدت داده‌های ستاره‌های دوتایی علی‌الاصول اجازه می‌دهد این اثر دوپلر عمودی اندازه‌گیری شود. در نتیجه، جرم ستاره‌ها، و از آنجا رابطه جرم شعاع و جرم قدر با دقت بیش‌تری مشخص خواهد شد. مقاله زیر را ببینید:

arxiv:astro-ph/0609753

همان‌طور که گفته شد روابط (۲۲) و (۲۳) نشانگر پدیده دیگری هستند که آن را به نام ابیراهی نور می‌شناسیم و این پدیده را می‌توان به خوبی هنگامی که رصد با تلسکوپ انجام می‌شود، دید. با توجه به این روابط باید گفت نوری که از دستگاه S' تحت زاویه

θ' نسبت به جهت حرکت (که در اینجا به معنای جهت حرکت زمین است) گسیل می‌شود، در دستگاه S تحت زاویه θ مشاهده می‌شود. پس به نظر می‌رسد که شیء به اندازه زاویه $\alpha = \theta - \theta'$ چرخیده است؛ به طوری که به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ یعنی رویت در S عمود بر جهت حرکت، داریم

$$\cos\theta' = v \quad (28)$$

و در نتیجه

$$\sin\theta' = \sqrt{1 - v^2} \quad (29)$$

و از آنجا

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - v^2} \quad (30)$$

این حالت به معنای این است که لولهٔ تلسکوپ را به طور کاملاً قائم نگه داشته‌ایم و می‌خواهیم جسمی را که درست در بالای سر ما است رصد کنیم. اگر سرعت حرکت زمین به دور خورشید را در حدود $30 \frac{km}{s}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت $v/c \simeq 10^{-4}$ و در نتیجه

$$\alpha \simeq 20.5 \text{ arcsec} \quad (31)$$

با وجود اینکه این زاویه مقدار کوچکی است اما اگر یک منجم برای دیدن جسمی که دقیقاً در زاویه 90° درجه نسبت به سطح زمین قرار دارد، لولهٔ تلسکوپ خود را کاملاً عمود نگاه دارد نمی‌تواند جسم را رصد کند!

جدا از این اثر چرخش پدیدهٔ دیگری نیز وجود دارد که می‌تواند جالب توجه باشد. در فرایندهایی مانند رصد یا هر نوع کار دیگری که شامل ثبت تصویر روی صفحهٔ عکاسی باشد انقباض طول قابل مشاهده نخواهد بود. برای اثبات این موضوع ابتدا فرض می‌کنیم فاصلهٔ صفحهٔ عکاسی تا شیء زیاد باشد و دو فوتون با بردار موج یکسان k در نظر می‌گیریم که به ترتیب از نقاط A و B گسیل می‌شوند. معادلهٔ جهان خط فوتون‌ها به شکل زیر است

$$\begin{aligned} x_A^\mu &= k\lambda_A^\mu + d_A^\mu \\ x_B^\mu &= k\lambda_B^\mu + d_B^\mu \end{aligned} \quad (32)$$

که در آنها λ_B, λ_A دو پارامتر هستند که در امتداد جهان خط تغییر می‌کنند و به آنها پارامترهای آفین می‌گوییم. d_B, d_A هم به ترتیب فاصلهٔ نقاط A و B از صفحهٔ عکاسی هستند. صفحهٔ عکاسی را عمود بر جهت مسیر فوتون‌های فرودی می‌گیریم. برای تشکیل یک تصویر فوتون‌ها هم‌زمان به این صفحه می‌رسند. شرط این هم‌زمانی این است که

$$k_\mu(d_A^\mu - d_B^\mu) = 0 \quad (33)$$

برای اثبات این رابطه به دستگاه سکون عکاسی می‌رویم. چاربردار $x_A - x_B$ دارای مؤلفه‌های زیر است

$$x_A^\mu - x_B^\mu = (0, \vec{x}_A - \vec{x}_B) \quad (34)$$

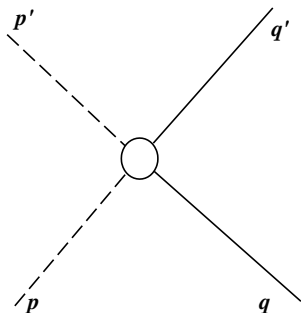
بردار $\vec{x}_A - \vec{x}_B$ بر روی صفحهٔ عکاسی قرار دارد پس بر \vec{k} بردار موج سه بعدی عمود است. بنابراین داریم

$$k \cdot (x_A - x_B) = (k^0, \vec{k}) \cdot (0, \vec{x}_A - \vec{x}_B) = 0 \quad (35)$$

از سوی دیگر $k^2 = 0$ پس داریم

$$(x_A - x_B)^2 = (d_A - d_B)^2 \quad (36)$$

بنابراین فاصلهٔ $|x_A^\mu - x_B^\mu|$ که برای دستگاه سکون صفحهٔ عکاسی مطرح است، همان است که در دستگاه سکون شیء دیده می‌شود.



شکل ۲.۴:

۲.۲.۴ اثر کامپتون

فرض کنید یک فوتون با یک الکترون آزاد برخورد کند و سپس فوتون و الکترون آزاد هر دو پراکنده شوند (شکل ۲.۴). همچنین فرض کنید چارتکانه فوتون به ترتیب قبل و بعد از برخورد p و p' و چارتکانه الکترون q و q' باشد. می‌خواهیم تغییر بسامد یا انرژی فوتون را در اثر پراکندگی حساب کنیم. پایستگی چارتکانه را می‌نویسیم

$$p^\mu + q^\mu = p'^\mu + q'^\mu \quad (۳۷)$$

برای حذف q'^μ ، که اندازه‌گیری نمی‌شود، مناسب‌تر است که با کمیت‌های مجذور کار کنیم

$$m^2 = q'^2 = (p - p' + q)^2 = p^2 + p'^2 + q^2 - 2p^\mu p'_\mu + 2q_\mu (p^\mu - p'^\mu) \quad (۳۸)$$

اما

$$p^2 = p'^2 = 0 \quad (۳۹)$$

و

$$q^2 = m^2 \quad (۴۰)$$

در نتیجه

$$q^\mu (p_\mu - p'_\mu) = p^\mu p'_\mu \quad (۴۱)$$

که در این رابطه تکانه الکترون بعد از برخورد، q' ، حذف شده است. در چارچوب سکون الکترون، قبل از برخورد داریم

$$q^\mu = (m, 0, 0, 0) \quad (۴۲)$$

همچنین

$$\begin{aligned} k^\mu &= (\omega, \vec{k}) \\ k'^\mu &= (\omega', \vec{k}') \end{aligned} \quad (۴۳)$$

که در آن θ زاویه میان امتداد فوتون فرودی و فوتون پراکنده است. اگر رابطه (۴۱) را بر حسب طول موج بنویسیم

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{\hbar}{m}(1 - \cos\theta) \quad (44)$$

این همان رابطه معروف کامپتون است که در زمان ارائه شدن تأیید مهمی برای نظریه کوانتومی تابش الکترومغناطیسی به شمار می‌آید و نشان می‌داد که فوتون فرودی پس از پراکندگی دچار تغییر طول می‌شود که مقدار این تغییر بستگی به زاویه θ دارد. مثلاً در $\theta = \frac{\pi}{2}$ داریم

$$\Delta\lambda = \frac{\hbar}{mc} = 2/426 \times 10^{-10} \text{ cm} \quad (45)$$

حاشیه: شکست تقارن لورنتز

پروتون با انرژی بیش از حدود 10^{20} eV در اثر برخورد ناکشسان با فوتون انرژی از دست می‌دهد. این کاهش انرژی را باید در پرتوهای کیهانی پر انرژی دید، اما چنین اثری مشاهده نشده است. برای رفع این معما در چند سال اخیر برخی فیزیک‌دان‌ها پیشنهاد کرده‌اند که شاید مجبور به نقض تبدیل لورنتز در انرژی‌های بالاتر از 10^{20} eV باشیم، که به آستانه GZK معروف است. این معما هنوز حل نشده است، اما مشاهده‌های بیش‌تری مبنی بر این نقض تقارن لورنتز دیده شده است. مقاله زیر را ببینید:

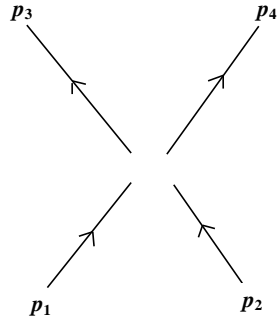
arxiv:hep-ph/0301191

۳.۴ برخورد ذره‌ها و قانون پایستگی

اگر یادمان باشد در مکانیک کلاسیک چند قانون پایستگی داشتیم: پایستگی انرژی، پایستگی تکانه، و پایستگی تکانه زاویه‌ای. علاوه بر این جرم ذره به عنوان یک ثابت همواره فرض می‌شد. مفهوم تکانه زاویه‌ای و پایستگی آن را فعلاً کنار می‌گذاریم و از مبحث برخورد تنها به موردی می‌پردازیم که به این مفهوم وابسته نباشد، مانند برخورد دو ذره. در این حالت ماتنها تکانه را داریم که ممکن است برای آن قانون پایستگی بنویسیم. گرچه در رابطه (۱۶) شاهدی به دست آوردیم که با انرژی مرتبط است، و به علاوه ارتباط این انرژی با مؤلفه صفرم تکانه دیدیم، اما به دلیل نرده‌ای نبودن مؤلفه صفرم چارتکانه نمی‌توانیم از اینجا به یک نتیجه مستقل از ناظر برسیم. پس می‌پردازیم به چارتکانه و برای آن قانون پایستگی می‌نویسیم.

دو ذره با چارتکانه p_1^μ و p_2^μ را در نظر می‌گیریم (شکل ۳.۴). چون چارتکانه تنها کمیت در اختیار ماست، برای شرایط پس از برخورد نمی‌توانیم فرض دیگری اضافه کنیم. در حالت عام یک یا چند ذره می‌تواند به وجود بیاید. از اتلاف چارتکانه به هر صورت دیگر چشم‌پوشی می‌کنیم، یعنی برخورد را کشسان در نظر می‌گیریم. گرچه در حالت کلی پس از برخورد، n ذره با n چارتکانه ظاهر می‌شوند، برای سهولت در شرایط پس از برخورد دو ذره با چارتکانه‌های p_1^μ و p_2^μ در نظر می‌گیریم. قانون پایستگی چارتکانه را چنین می‌نویسیم:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \quad (46)$$



شکل ۳.۴:

انتظار داریم این قانون چهارتایی در حد ناسبیتی (کلاسیک) به قوانین پایستگی انرژی و تکانه سه بعدی منجر شود. البته تکلیف ثابت بودن جرم هم باید روشن شود. در حد $v \ll 1$ داریم

$$p^\mu = \gamma(m_o, m_o \vec{v}) \simeq (m_o, m_o \vec{v}) \quad (۴۷)$$

بنابراین رابطه پایستگی (۴۶) تجزیه می‌شود به

$$m_{o_1} + m_{o_2} = m_{o_3} + m_{o_4} \quad (۴۸)$$

$$m_{o_1} \vec{v}_1 + m_{o_2} \vec{v}_2 = m_{o_3} \vec{v}_3 + m_{o_4} \vec{v}_4 \quad (۴۹)$$

به این ترتیب مؤلفه صفرم قانون پایستگی چارتکانه منجر می‌شود به پایستگی جرم، که متناظر است با فرض ثابت بودن جرم، اما اجازه می‌دهد ذره‌های جدید با جرم جدید به وجود آیند. در این تقریب از پایستگی انرژی خبری نیست. اما اگر مؤلفه صفرم را در حالت عام نسبیتی بنویسیم به دست می‌آوریم

$$(m_{o_1} + T_1) + (m_{o_2} + T_2) = (m_{o_3} + T_3) + (m_{o_4} + T_4) \quad (۵۰)$$

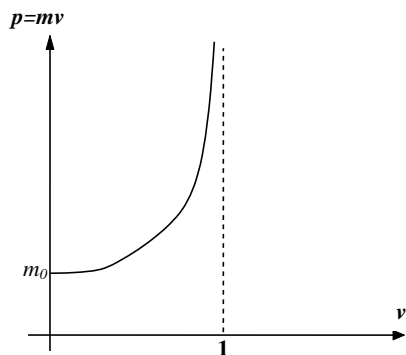
وارد شدن ترکیب $p^\circ = m_o + T$ در رابطه پایستگی تکانه اهمیت ویژه‌ای دارد. این ترکیب نشان می‌دهد که تنها مجموع جرم و انرژی جنبشی پایسته است، و نه هر یک به تنهایی! پس می‌توان فرایندهایی را تصور کرد که در آن جرم و انرژی به یکدیگر تبدیل شوند. به همین دلیل است که p° ، و نه $T = m_o - p^\circ$ ، را انرژی کل ذره می‌نامیم. در بخش فضایی قانون پایستگی تکانه هم به این صورت به دست می‌آید:

$$\gamma_1 m_{o_1} \vec{v}_1 + \gamma_2 m_{o_2} \vec{v}_2 = \gamma_3 m_{o_3} \vec{v}_3 + \gamma_4 m_{o_4} \vec{v}_4 \quad (۵۱)$$

بنابراین، به هنگام برخورد، ذره در مکانیک نسبیتی، برخلاف مکانیک نیوتونی، به گونه‌ای رفتار می‌کند که گویی جرم آن برابر است با

$$m = \gamma m_o = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (۵۲)$$

این جرم به سرعت وابسته است و با افزایش سرعت زیاد می‌شود. به همین دلیل است که $m_o = m(v=0)$ را جرم سکون ذره و این پدیده را افزایش جرم نسبیتی می‌نامیم. هنگامی که v به سرعت نور نزدیک می‌شود، جرم m به سمت بینهایت می‌رود (شکل ۴.۴). به عبارت دیگر انرژی کل ذره، $p^\circ = \gamma m_o$ ، به هنگام $v \rightarrow 1$ بدون حد افزایش می‌یابد و به سمت بینهایت می‌رود. این واقعیت دلیل دینامیکی برای دسترس ناپذیری سرعت نور است.



شکل ۴.۴:

ما از لفظ جرم سکون و انرژی سکون به یک معنی صحبت می‌کنیم و اگر سرعت نور را وارد کنیم داریم $E_0 = m_0 c^2$. این انرژی عظیم است. مثلاً برای ذره‌ای به جرم یک گرم داریم $E_0 = m_0 c^2 = 9 \times 10^2 \text{ erg}$ ، یعنی چیزی در حدود انرژی بمب هیروشیما (۲۰ کیلو تن). مفهوم انرژی پتانسیل در این رهیافت دیده نمی‌شود. باید دید سهم این نوع انرژی در جرم چیست. توجه داشته باشیم که مفهوم انرژی پتانسیل به هنگام حضور نیرو یا میدان وارد می‌شود. به هنگام بحث‌های دینامیکی مانند الکترو دینامیک و گرانش، باید نظیر مفهوم کلاسیک پتانسیل را در دینامیک نسبیتی به دست آورد.

میان انرژی کل، p^0 ، و تکانه رابطه مفیدی است که از $p^2 = m_0^2$ به دست می‌آید:

$$p^0 = \sqrt{m_0^2 + (\vec{p})^2} \quad (53)$$

که در آن منظور از (\vec{p}) بخش فضایی چارتکانه است. برای انرژی جنبشی هم به دست می‌آوریم

$$T = \sqrt{m_0^2 + (\vec{p})^2} - m_0 \quad (54)$$

در سرعت‌های کم، یعنی برای $m_0 \ll |\vec{p}|$ داریم

$$T = \frac{(\vec{p})^2}{2m_0} \quad (55)$$

که همان رابطه کلاسیک است. سرعت را هم می‌توان چنین بیان کرد:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m_0^2 + (\vec{p})^2}} \quad (56)$$

۴.۴ مثال‌هایی از برخورد

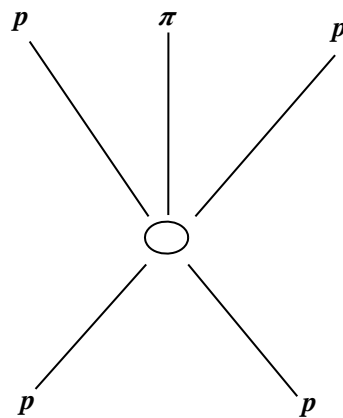
۱.۴.۴ پراکندگی پروتون - پروتون

فرایندی را در نظر می‌گیریم که در آن پیمون و نوترون تولید می‌شود (شکل ۵.۴). مانند

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0 \quad (57)$$

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+ \quad (58)$$

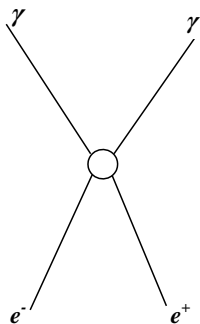
هر دوی این فرایندها به لحاظ پایستگی بار ممکن است. در این موارد انرژی جنبشی پروتون‌ها باید به حدی باشد که جرم سکون لازم پیمون را تأمین کند (تمرین).



شکل ۵.۴:

۲.۴.۴ نابودی زوج

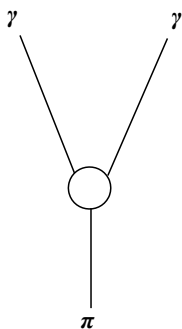
الکترون و پوزیترون به هنگام برخورد نابود می‌شوند و فوتون تولید می‌کنند (شکل ۶.۴).



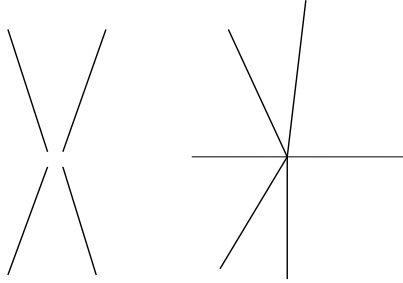
شکل ۶.۴:

۳.۴.۴ واپاشی

ساده‌ترین حالت واپاشی $2\gamma \rightarrow \pi^0$ است، که در آن جرم پیون کاملاً به انرژی دو فوتون تبدیل می‌شود. بدیهی است که انرژی پیون باید برای تولید دو فوتون کافی باشد (شکل ۷.۴).



شکل ۷.۴:



شکل ۸.۴: نمودار فضازمانی برخورد در چارچوبهای مرکز جرم و آزمایشگاه

۵.۴ چارچوب مرکز تکانه

مرکز جرم در مکانیک نیوتنی مفهومی است کارا و بی‌ابهام. در نسبیت، با توجه به تغییر مفهوم جرم، مرکز جرم وابسته به ناظر است (تمرین). اما می‌توان مفهوم جدیدی، نزدیک به مفهوم مرکز جرم، به نام چارچوب مرکز تکانه وارد کرد. مجموعه‌ای از n ذره به جرم m_i و چارتکانه p_i^μ را در چارچوب S در نظر بگیرید. جمع این چارتکانه‌ها را $P^\mu = \Sigma p_i^\mu$ می‌نامیم. P^μ هم چاربرداری است زمان گونه و آینده‌سو، پس می‌توان آن را چارتکانه ذره‌ای فرضی تصور کرد به جرم $M = \Sigma m_i$ و سرعت $\vec{U}_{cm} = \vec{P}/M$ که در آن بردار \vec{P} جمع بخش فضایی چارتکانه‌هاست. اکنون واضح است که چارتکانه ذره فرضی ما، P^μ ، در دستگاهی که با سرعت U_{cm} نسبت به S حرکت می‌کند مؤلفه فضایی ندارد. این دستگاه را چارچوب مرکز تکانه یا چارچوب CM می‌نامند. به سادگی می‌توان دید که مرکز جرم این مجموعه، گرچه به ناظر وابسته است، اما همواره در چارچوب مرکز تکانه ساکن است (تمرین). گاهی مرکز جرم را برای ناظر ساکن در چارچوب مرکز تکانه، مرکز جرم ویژه می‌نامند.

اکنون جرم سکون ذره فرضی (سیستم ذرات) را در M_0 و چارسرعت آن را V^μ می‌نامیم. داریم

$$P^\mu = M_0 V^\mu = (M, \vec{P}) \quad (61)$$

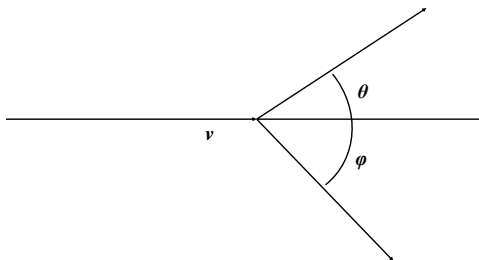
با مجذور کردن این رابطه و استفاده از تعریف سرعت دستگاه مرکز تکانه (ذره فرضی) به دست می‌آوریم

$$M = M_0 \gamma_{cm} \quad (62)$$

که در آن γ_{cm} متناظر است با سرعت $\vec{U}_{cm} = \frac{\vec{P}}{M}$. به این ترتیب، علاوه بر تعریف چارچوب مرکز تکانه و سرعت آن نسبت به S ، تعبیری به دست آورده‌ایم برای مجموعه‌ای از ذرات: اگر از ساختار ترکیبی ذره‌ها چشم‌پوشی کنیم، به مجموعه ذرات می‌توان هم‌چون ذره‌ای به جرم سکون M_0 نگاه کرد که با سرعت \vec{U}_{cm} نسبت به S در حرکت است.

اکنون به این مجموعه در چارچوب مرکز تکانه نگاه می‌کنیم. جرم ذره فرضی ما M برابر با M_0 می‌شود. در این چارچوب تک‌تک ذره‌ها در حرکت‌اند و انرژی جنبشی دارند. انرژی جنبشی هر ذره هم از رابطه $T_i = m_i - m_{0i}$ به دست می‌آید. پس در این دستگاه انرژی جنبشی کل برابر است با:

$$T = \Sigma m_i - \Sigma m_{0i} = M - \Sigma m_{0i} = M_0 - \Sigma m_{0i} \quad (63)$$



شکل ۹.۴: نمودار فضایی دو بعدی در دستگاه آزمایشگاه

بنابراین، واضح است که انرژی سکون ذره فرضی ما، یا انرژی مؤثر مجموعه ذره‌ها از جمع انرژی سکون آن‌ها بیش‌تر است و انرژی جنبشی تک‌تک ذره‌ها را در بر می‌گیرد.

۶.۴ بیلارد نسبی

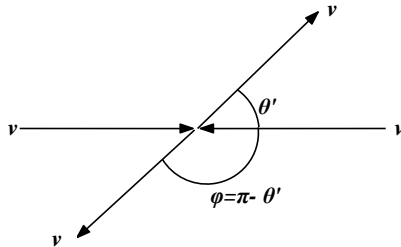
در این برخورد دو ذره یکسان را در نظر می‌گیریم. ذره اول ساکن است و برخورد نیزکشسان است (شکل ۹.۴). ساده‌ترین راه بررسی این مسئله این است که به چارچوب مرکز تکانه برویم که در آن مؤلفه فضایی تکانه کل صفر است. در چارچوب مرکز تکانه دو ذره با سرعت‌های v و $-v$ به سمت یکدیگر می‌آیند و پس از برخورد هم با همین سرعت از یکدیگر دور می‌شوند، گرچه جهت سرعت آن‌ها عوض می‌شود (شکل ۱۰.۴). چون موضوع مورد توجه ما تغییر جهت ذره‌ها پس از برخورد است، یعنی زاویه‌های θ' و ϕ' و رابطه آن‌ها با زاویه‌ها در دستگاه آزمایشگاه، بهتر است از رابطه ابیراهی ذره استفاده کنیم. داریم

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(1 + \cos\theta')}, \quad \tan\phi = \frac{\sin\theta'}{\gamma(1 - \cos\theta')} \quad (64)$$

که در آن γ وابسته به سرعت v است. و زاویه‌ها مطابق شکل تعریف شده‌اند.

از این جا نتیجه می شود

$$\tan(\theta) \tan(\phi) = \frac{1}{\gamma^2} \quad (65)$$



شکل ۱.۴: نمودار فضایی دو بعدی در دستگاه مرکز تکانه

در حد نیوتنی $\gamma = 1$ است و همان نتیجه آشنای $\theta + \phi = \pi$ به دست می آید. اما در حالت نسبیتی همواره $\theta + \phi < \pi$ است.

۷.۴ انرژی آستانه

در برخورد از نوع تولید ذره یا تولید زوج دیدیم که انرژی جنبشی چگونه به جرم سکون ذره جدید تبدیل می شود. برای اینکه چنین اتفاقی بیفتد حداقلی برای انرژی جنبشی ذره ها قبل از برخورد باید وجود داشته باشد. این کمینه را انرژی آستانه می نامند. برای مثال برخورد پروتون - پروتون را در نظر می گیریم که در آن پروتون ها حداقل انرژی را برای تولید یک پيون خنثی داشته باشند:

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0 \quad (66)$$

بدیهی است کمترین هزینه انرژی، دست کم به لحاظ نظری، هنگامی حاصل می شود که ذره ها پس از برخورد مثل یک مجموعه صلب حرکت کنند تا مجذور تکانه برابر مجذور جرم سکون ذره های پس از برخورد، m_0 ، بشود. پس ذره اول را ساکن فرض کنیم تا ذره دوم با سرعت v به آن برخورد کند. از مجذور رابطه

$$p_1 + p_2 = p \quad (67)$$

که در آن p تکانه کل پس از برخورد است، با فرض بالا به دست می آوریم

$$(m_{0_1})^2 + (m_{0_2})^2 + 2m_{0_1}m_{0_2}\gamma(v) = (m_0)^2 \quad (68)$$

همین رابطه را اکنون برای برخورد پروتون پروتون بالا می‌نویسیم

$$2(m_{op})^2 + 2(m_{op})^2 \gamma(v) = (2m_{op} + m_{o\pi})^2 \quad (69)$$

که از آن جا به دست می‌آوریم

$$\gamma = 1 + 2 \frac{m_{o\pi}}{m_{op}} + \frac{m_{o\pi}^2}{2m_{op}^2} \quad (70)$$

به وضوح دیده می‌شود که بخشی از انرژی جنبشی پروتون اولیه به انرژی جنبشی ذره‌ها پس از برخورد تبدیل می‌شود (تمرین).

حاشیه: فاصله یابی لیزری ماه (Lunar Laser Ranging, LLR) و آزمون نقض تبدیل لورنتز

فاصله زمین-ماه را می‌توان با دقت زیادی تعیین کرد: لیزری که از رصدخانه‌های زمینی به بازتابنده‌های موجود روی سطح ماه تابانده و دریافت می‌شوند برای تعیین این فاصله به کار می‌روند. از سال ۱۹۶۹/۱۳۴۸ که فضانوردان آپولو روی سطح ماه نشستند این بازتابنده‌ها مستقر شده‌اند. داده‌های بیش از ۳۸ سال اجازه می‌دهد این فاصله را با دقت چند میلی‌متر تعیین کرد، یعنی با دقت 10^{-12} به نسبت فاصله زمین-ماه! گرچه عامل‌های متعددی در این فاصله دخیل هستند، از جمله اختلال توسط سیاره‌های منظومه شمسی و اعمار آنها، اما بررسی‌های اخیر نشان داده است که در چارچوب مدل‌های شش پارامتری نقض کننده تبدیل لورنتز این پارامترها با دقت 10^{-6} تا 10^{-11} همان تبدیل لورنتز را می‌دهند. به این مقاله مراجعه کنید:

arxiv:0710.0702

۸.۴ مکانیک به زبان لاگرانژ در مقابل زبان نیوتون

در مکانیک نیوتونی دیده‌ایم که سرعت، شتاب، و نیرو مفاهیم بنیادی برای بیان حرکت ذره با جرم معین، یا مجموعه‌ای از ذره‌ها، هستند. بر همین مبنا قوانین نیوتون بنا شده‌اند. آیا این تنها زبان توصیف حرکت در طبیعت است؟ لاگرانژی ریاضی دان فرانسوی قرن هجدهم، زبان دیگری ابداع کرد که در آن مفهوم نیرو، که اساس قوانین نیوتون و کمیتی برداری است، پیش نمی‌آید. در این زبان، کمیت‌های بنیادی برای بیان حرکت کمیت‌های نرده‌ای اند: انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کمیت جدیدی به نام لاگرانژی. لاگرانژی L ، کمیتی است نرده‌ای و وابسته به مکان و سرعت ذره، یا مجموعه‌ای از ذرات. در اینجا به لحاظ سهولت در مرور، تنها یک ذره به جرم m در مکان $x(t)$ و با سرعت $v(t)$ را در نظر می‌گیریم. لاگرانژی وابسته به ذره در مکانیک کلاسیک این‌گونه تعریف می‌شود

$$L(x, t) = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(x) \quad (71)$$

که در آن $V(x)$ تابع (انرژی) پتانسیل وابسته به نیرویی است که باعث حرکت ذره می‌شود. توجه کنید، گرچه لفظ نیرو اینجا به کار رفت، اما آنچه در تعریف لاگرانژی وارد می‌شود پتانسیل است و نه نیرو. پس فرض شده‌است که پتانسیل $V(x)$ علت حرکت است. حالا به جای قوانین نیوتون اصل هامیلتون بیان می‌شود: حرکت ذره همواره به طریقی است که مقدار انتگرال

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (۷۲)$$

فرینه می‌شود، که البته در مکانیک کلاسیک همواره با یک کمینه سروکار داریم. S را کنش حرکت می‌نامند. t_1 و t_2 دوزمان دلخواه است. تعبیر این اصل این است که از میان تمام مسیرهای ممکن که نقطه $x(t_1)$ را به $x(t_2)$ وصل می‌کند حرکت واقعی روی آن مسیری است که به ازای آن کنش S کمینه می‌شود. به عبارت دیگر طبیعت خواستار کمترین کنش است! حساب وردش‌ها در ریاضی به سهولت جواب این مسئله را می‌دهد: برای اینکه S کمینه باشد باید رابطه اویلر-لاگرانژ برقرار شود:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (۷۳)$$

اکنون به سهولت می‌بینید که با فرض ذره‌ای به جرم m ، مکان $x(t)$ و پتانسیل $V(x)$ معادله بالا تبدیل می‌شود به

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = - \frac{dV(x)}{dx} \quad (۷۴)$$

که با تعریف نیرو به صورت

$$F = - \frac{dV}{dx} \quad (۷۵)$$

معادله (۷۴) به صورت قانون آشنای نیوتون در می‌آید. همین‌طور می‌توان تکانه را به صورت زیر تعریف کرد:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (۷۶)$$

و لاگرانژی را به عنوان تابعی از x و p به جای x و \dot{x} ، نوشت. در این حالت تابع همیلتونی، به عنوان تابعی از x و p تعریف می‌شود:

$$H = H(x, p) := p \dot{x} - L \quad (۷۷)$$

در مکانیک کلاسیک نیوتونی دیده می‌شود که H نقش انرژی را ایفا می‌کند. این مفاهیم، گرچه در یک بعد فضا نوشته شده‌اند، اما همگی در سه بعد قابل تعریف هستند. برای یک ذره آزاد، که تحت تأثیر هیچ نیرویی نیست، این کمیت‌ها می‌شوند:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V(x) = 0 \quad (۷۸)$$

$$L = T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$H = p \dot{x} - L = \frac{p^2}{2m}$$

مکانیک لاگرانژی باعث پیشرفت فیزیک در زمینه‌هایی شده‌است که مکانیک نیوتونی امکان آن را نمی‌دهد. تصور نظریه میدان‌ها، فیزیک ذرات، کیهان‌شناسی، و نسبیت عام بدون شناخت زبان لاگرانژی ناممکن است.

در نسبیت خاص زبان لاگرانژی بسیار طبیعی‌تر می‌نماید و با سهولت بیشتری اجازه فرمولبندی دینامیک را می‌دهد. علت آن هم زبان چاربردارها و استفاده از موجودات ریاضی در فیزیک است. ما باز هم فرض می‌کنیم که برای بیان حرکت کمیتی نرده‌ای وجود دارد که صرفاً تابعی است از چاربردار x^μ و چاربردار سرعت v^μ :

$$L = L(x^\mu, v^\mu) \quad (۷۹)$$

پس، بسته به شرایط حرکت و اطلاعات موجود، باید کمیتی نرده‌ای ساخته شود از چاربردار مکان و چارسرعت. با شناختی که از ناورداهای نسبیتی داریم امکان ساختن چنین کمیتی بسیار محدود است.

ساده‌ترین حالت را در نظر بگیرید: ذره‌ای به جرم m که تحت تأثیر هیچ نیرویی قرار ندارد. برای نوشتن لاگرانژی کلاسیک دانستن پتانسیل و انرژی جنبشی لازم بود. اما در نسبیت نوع استدلال عوض می‌شود. شروع استدلال این است که کنش، S ، باید کمیتی نرده‌ای باشد، یعنی تحت تبدیل لورنتز تغییر نکند. پس با توجه به تعریف (۷۲)، چون t با تغییر ناظر تبدیل می‌شود، L نیز باید به طریقی تغییر کند که Ldt کمیتی نرده‌ای بماند. اصطلاحاً گفته می‌شود L باید چگالی نرده‌ای باشد. این خصلت نرده‌ای بودن کنش، امکان گزینش را بسیار محدود می‌کند. ذره آزاد که جهان خط آن با تابع x^μ تعریف می‌شود به هیچ کمیت دیگری وابسته نیست. پارامتر روی جهان خط را می‌توان با t ، s ، و یا هر پارامتر دلخواه دیگری نمایش داد. از این میان تنها ویژه‌زمان τ یا s ، یا تابع دلخواهی از آن، پارامتری مستقل از ناظر است. اکنون می‌دانیم که تنها کمیت دیفرانسیلی که بتواند به عنوان انتگرالده کنش به کار رود $d\tau$ است، که برابر است با

$$d\tau = (dt^2 - dx^2)^{\frac{1}{2}} = dt(1 - v^2)^{\frac{1}{2}} = \gamma^{-1} dt \quad (۸۰)$$

به این ترتیب برای کنش می‌نویسیم

$$S = \alpha \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = \alpha \int_{t_0}^{t_1} \gamma^{-1} dt \quad (۸۱)$$

که در آن α کمیتی ثابت است. پس لاگرانژی متناظر با ذره آزاد چنین به دست می‌آید:

$$\alpha L(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \alpha \sqrt{1 - v^2} \quad (۸۲)$$

توجه داریم که L کمیت نرده‌ای نیست، همان‌طور که t و dt چنین نیست، اما حاصلضرب Ldt کمیتی نرده‌ای است وابسته به سرعت ذره که کنش را تعریف می‌کند. معادله اوایلر-لاگرانژ متناظر با (۸۱) معادله زیر را می‌دهد:

$$\frac{d}{dt} \left(-v \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = 0 \quad (۸۳)$$

این معادله دیفرانسیل به ازای $v = \text{const}$ معتبر است. پس معادله حرکت ذره آزاد بیان می‌کند که سرعت ذره باید ثابت باشد. توجه کنید که برای به دست آوردن این نتیجه از هیچ قانون نیوتونی استفاده نکرده‌ایم، بلکه اصل هامیلتون، یا اصل کمترین کنش، جانشین آن شده است. بنابر تعریف (۲۳) تکانه ذره برای همیلتنی به دست می‌آوریم

$$H = \alpha \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (۸۴)$$

اگر ذره ساکن باشد، یعنی در دستگاه سکون ذره، انرژی سکون غیر صفر برای ذره به دست می‌آید:

$$E_0 = \alpha \quad (۸۵)$$

از تعریف تکانه دیدیم که α باید از نوع جرم در دستگاه سکون باشد که آن را m_0 می‌نامیم. اکنون اگر سرعت نور را هم دوباره وارد کنیم به دست می‌آوریم

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (۸۶)$$

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2}} = m_0 \gamma c^2$$

$$L = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

به این ترتیب می بینیم نه تنها $\alpha = m_0$ نقش جرم را بازی می کند، بلکه $m_0 c^2$ نقش انرژی را در دستگاه سکون و $m_0 \gamma c^2$ نقش انرژی را در هر دستگاه به عهده می گیرد. توجه کنید که $m_0 \gamma c^2$ همان مؤلفهٔ صفرم چارترکانه است. این هم شاهدهی است برای نقش جملهٔ صفرم چارترکانه.

مطابق معمول اگر لاگرانژی در رابطه (۸۶) را به ازای مقادیر کوچک $\frac{v}{c}$ بسط دهیم به دست می آوریم

$$L \simeq \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 \quad (87)$$

که همان نتیجهٔ کلاسیک است. این تعریف را می توان به حالتی که ذره در یک پتانسیل $V(x)$ نیز قرار می گیرد تعمیم داد:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2} - V(x) \quad (88)$$

۹.۴ تمرین

(۱) سفینه ای با سرعت v از زمین دور می شود. ناظرهای داخل سفینه اسلحه ای را در جهتی که به نظر آنها عمود بر امتداد زمین—سفینه است شلیک می کنند و سرعت گلوله را u اندازه می گیرند. با استفاده از چاربردارها، سرعت و جهت گلوله را در چارچوب زمین به دست آورید.

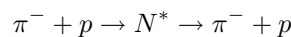
(۲) در چارچوب مرکز تکانه، یک فوتون و یک الکترون با تکانه های مساوی و عکس یکدیگر یک برخورد رودرو انجام می دهند. الکترون دارای سرعت $\frac{3}{4}c$ است و برخورد منجر به معکوس شدن تکانهٔ هر دو ذره می شود.
الف) با استفاده از روش چاربرداری انرژی و تکانهٔ قبل از برخورد فوتون را برحسب جرم سکون الکترون بنویسید.
ب) همین برخورد را در چارچوب آزمایشگاه که در آن الکترون در ابتدا ساکن است توصیف کنید.

(۳) یک ذره α به جرم $10^{-26} kg$ با سرعت $\frac{4}{5}c$ است وارد یک لایهٔ بتونی به ضخامت 0.35 متر می شود. ذره α پس از خروج $\frac{2}{3}c$ است.

الف) فرض کنید که در چارچوب آزمایشگاه آهنک تغییر تکانهٔ ذره α هنگامی که داخل بتون است مقدار ثابت F باشد. F را حساب کنید.

ب) چه مدتی طول می کشد تا ذره α از درون لایه عبور کند.

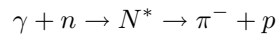
(۴) یکی از واکنش های ذرات بنیادی پراکندگی ذرهٔ پیون منفی (π^-) از پروتون است. دیده شده که احتمال این پراکندگی وقتی انرژی جنبشی پیون $K_\pi = 60 \text{ MeV}$ است، به طور غیرعادی زیاد است. این پدیده را با فرض وجود یک ذرهٔ تشدید بسیار ناپایدار N^* ، که تقریباً بلافاصله پس از تشکیل واپاشیده می شود، توجیه می کنند. پس، واکنش به شکل زیر نوشته می شود:



الف) انرژی کل مجموعهٔ پیون و پروتون را با فرض اینکه $K_\pi = 60 \text{ MeV}$ و پروتون هم در ابتدا ساکن باشد حساب کنید.

ب) جرم N^* چقدر است؟

پ) این فرایند را در چارچوب مرکزتکانه توصیف کنید و انرژی و تکانه هر ذره را حساب کنید.
ت) گیریم یک فوتون با انرژی زیاد، γ ، بتواند واکنش



ایجاد کند که در آن n یک نوترون ساکن در چارچوب آزمایشگاه است. با استفاده از جرم N^* که حساب کرده‌اید انرژی مورد نیاز فوتون برای ایجاد این واکنش در چارچوب آزمایشگاه را بدست آورید؟
($m_\pi = 140 \text{ MeV}$, $m_p = m_n = 940 \text{ MeV}$)

۵) شار انرژی تابش مستقیم خورشید در محل مدار زمین، یعنی فاصله $1.5 \times 10^{12} \text{ cm}$ از خورشید، برابر با $1.6 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$ است. یک ذره غبار کوچک به شعاع r و چگالی ρ به فاصله R از خورشید را در نظر بگیرید. فرض کنید که ذره غبار در چارچوب سکون خورشید ساکن است و همه نور تابیده بر خود را جذب می‌کند. شعاع آستانه ذره، r_c ، را حساب کنید که اگر r از آن کوچک‌تر باشد، ذره نیرویی دافعه از خورشید دریافت می‌کند، و ثابت کنید r_c از R مستقل است. برای ذره‌های با شعاع کوچک‌تر از r_c باد خورشیدی بر جاذبه گرانشی غلبه می‌کند و فشار نور آنها را به سمت خارج از منظومه شمسی می‌راند. مقدار r_c را برای ذره با چگالی $\rho = 2 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ حساب کنید.

۶) جسمی به جرم سکون $m_0 = 2 \text{ kg}$ از سکون در چارچوب S تحت اثر نیروی ثابت $F = 10 \text{ N}$ در امتداد محور x شروع به حرکت می‌کند. چه مدت طول می‌کشد تا جسم به سرعت $0.9c$ برسد؟ مقدار نیرو در چارچوب سکون جسم وقتی که سرعت آن به مقدار u_x رسیده باشد چقدر است؟

۷) می‌دانیم در نسبیت شتاب a و نیروی F در حالت کلی موازی نیستند. نشان دهید زاویه بین آنها همیشه کمتر از 90° است.

۸) با استفاده از صورتبندی چارچوبی نشان دهید سرعت نسبی ذرات قبل و بعد از یک برخورد کشسان برابر است.

۹) برخورد کشسان دو ذره با چارتهکانه p_1 و p_2 را در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر p'_1 و p'_2 چارتهکانه ذره‌ها پس از برخورد باشند، همواره داریم:

$$p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2$$

نشان دهید که این رابطه در مورد برخورد فوتون‌ها نیز صادق است.

۱۰) سرعت یک ذره چقدر باشد تا انرژی جنبشی آن برابر انرژی سکونش باشد؟

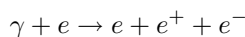
۱۱) ناظری که با سرعت v^μ حرکت می‌کند چارتهکانه ذره‌ای را p^μ اندازه می‌گیرد. نشان دهید انرژی ذره برای این ناظر برابر است با

$$E = p^\mu v_\mu$$

۱۲) دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 و سرعت‌های u_1 و u_2 به موازات محور x در یک دستگاه لخت به هم برخورد می‌کنند. پس از برخورد ذره‌ای به جرم m به دست می‌آید. نشان دهید

$$m = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \gamma(u_1) \gamma(u_2) (1 - u_1 u_2)$$

(۱۳) زوج الکترون و پوزیترون از تابیدن پرتو γ بر یک الکترون ساکن تولید می‌شود:



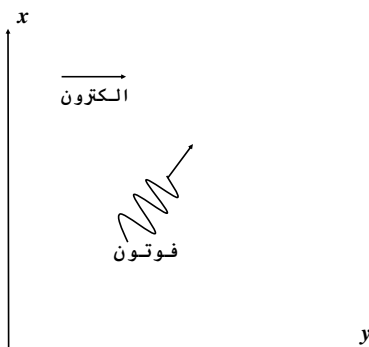
حداقل انرژی پرتو γ برای انجام چنین فرایندی چقدر است؟

(۱۴) دو ذره با جرم سکون یکسان m_0 و انرژی یکسان (برابر $\gamma m_0 c^2$) با زاویه قائمه با هم برخورد می‌کنند. گیریم ذره اول در امتداد محور x و ذره دوم در امتداد محور y حرکت کند. پس از برخورد، دو ذره اولیه می‌مانند و دو ذره هریک با جرم سکون $5m_0$ تولید می‌شوند. انرژی آستانه این واکنش را بیابید.

(۱۵) یک اتم برانگیخته به جرم m در دستگاهی ساکن است. این اتم یک فوتون گسیل می‌کند و به این ترتیب از انرژی آن مقدار ΔE کاسته می‌شود. با در نظر گرفتن پس‌زنی اتم، بسامد فوتون گسیلیده را حساب کنید.

(۱۶) در حالت نانسیتی انرژی جنبشی یک سیستم در چارچوب آزمایشگاه، K ، از رابطه $K = K^* + \frac{mv^2}{2}$ به انرژی جنبشی در چارچوب مرکز جرم، K^* ، مربوط می‌شود. m جرم کل سیستم و v سرعت مرکز جرم است. رابطه مشابه برای حالت نسبیستی چیست؟ نشان دهید این رابطه در حد سرعت‌های کوچک به رابطه نانسیتی تبدیل می‌شود.

(۱۷) یک الکترون در جهت $+x$ در دستگاه S در حرکت است. برای این الکترون $\gamma = 1000$ و با تقریب خوب می‌توان گفت که $v \simeq c$. فوتونی با انرژی $h\nu$ که با زاویه 45° نسبت به محور x حرکت می‌کند با این الکترون برخورد می‌کند و یک زوج الکترون و پوزیترون ایجاد می‌کند. انرژی آستانه فوتون برای انجام این واکنش را به دست آورید و آن را بر حسب انرژی سکون الکترون بیان کنید. همچنین جهت چارچوب مرکز تکانه را در انرژی آستانه به دست آورید.



(۱۸) یک فضاانورد به صورت شعاعی با شتاب $9/8 \frac{m_0}{\tau}$ (در چارچوب زمین) از زمین دور می‌شود. چه مدت طول می‌کشد تا انتقال به سرخ دویلری باعث شود تا نور قرمز تابلهای نئون روی زمین ($\lambda = 6200 \text{ \AA}$) برای فضاانورد مرئی نباشد؟ ناحیه مرئی طیف بین ۴۰۰۰ تا ۷۰۰۰ آنگستروم است.

(۱۹) راجع به انتقال به سرخ دویلری که در کلیه اجرام آسمانی دیده می‌شود توضیح دهید. در صورتی که یکی از خطوط جذبی Ca^{2+} به طول موج 3900 \AA آنگستروم در اثر این انتقال به طول موج 4750 \AA تبدیل شود، سرعت نسبی منبع مورد مشاهده نسبت به ما چقدر است؟

(۲۰) یک منجم طیف منبعی را که عمود بر خط دید حرکت می‌کند ثبت می‌کند. منبع در چارچوب سکون خود یک خط طیفی با طول موج $\lambda = 6562 \text{ \AA}$ گسیل می‌کند. طول موج مشاهده شده توسط منجم چقدر است؟ فرض کنید سرعت نسبی $\frac{v}{c}$ باشد.

(۲۱) در چارچوب S باریکه‌ای از فوتون‌ها به بسامد ν با زاویه θ نسبت به محور افقی گسیل می‌شود. تنها با استفاده از تبدیل انرژی و تکانه و بدون استفاده از رابطه دویلر

الف) بسامد فوتون‌ها را در چارچوب S' که در امتداد محور x با سرعت v حرکت می‌کند به دست آورید.

ب) زاویه θ' بین باریکه و محور x را در چارچوب S' حساب کنید. (رابطه به دست آمده فقط باید شامل θ ، ν و v باشد).

(۲۲) یک شعاع نور در چارچوب S' با زاویه $\theta' = 60^\circ$ نسبت به محور x' حرکت می‌کند. سرعت S' نسبت به S برابر $v = \frac{4}{5}c$ است.

الف) مؤلفه‌های سرعت شعاع نور را در S بیابید.

ب) زاویه θ شعاع نور با محور x در چارچوب S چقدر است؟

(۲۳) دو ذره پيون و میون هر کدام 10 GeV انرژی دارند و قرار است یک مسافت ۱۰۰ متری را پیمایند. میون با چه سرعتی از پيون جلو می‌افتد؟

(۲۴) جسمی به جرم m به دو فوتون وامی‌باشد. از تکانه و انرژی جسم چه می‌توانید بگویید؟

(۲۵) دو فوتون با انرژی E با زاویه θ به هم برخورد می‌کنند و ذره‌ای به جرم M تولید می‌شود. جرم M چقدر است؟

(۲۶) جرم بزرگ M با سرعت v به مانعی برخورد می‌کند و به ذره‌ای ساکن به جرم کوچک m تبدیل می‌شود. جرم m چقدر است؟ (از تقریب $M \gg m$ استفاده کنید).

(۲۷) الف) تویی به جرم m با انرژی E با توپ ساکن A به جرم M برخورد سربه سرکشسان می‌کند. نشان دهید انرژی کل بعد از برخورد برابر است با

$$E' = \frac{2m^2M + E(M^2 + m^2)}{M^2 + m^2 + 2EM}$$

ب) سرعت نهایی m را به تقریب به دست آورید.

(۲۸) جرم M_A به دو جرم M_B و M_C می‌باشد. انرژی اجسام B و C چقدر است؟ تکانه آن‌ها چقدر است؟

(۲۹) ذره‌ای به جرم m و انرژی E با ذره ساکنی برخورد می‌کند. انرژی آستانه برای حالت نهایی که شامل N ذره به جرم m است چه مقدار است؟

(۳۰) ذره‌ای به جرم m در راستای محور x تحت نیروی $F = -m\omega^2 x$ حرکت می‌کند. دامنه حرکت b است. نشان دهید دوره تناوب T_0 چنین است

$$T_0 = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} dx$$

$$\gamma = 1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)$$

(۳۱) الف) ناظری روی زمین برخورد بین دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 را مشاهده می‌کند و متوجه می‌شود که تکانه پایسته است. با استفاده از جمع کلاسیکی سرعت‌ها نشان دهید هر ناظر روی یک قطار متحرک هم پایستگی تکانه را در این برخورد مشاهده می‌کند.

ب) محاسبات را با این فرض که دو ذره نهایی می‌توانند جرم‌های m'_1 و m'_2 داشته باشند انجام دهید. نشان دهید که ناظر روی قطار تکانه را پایسته می‌بیند اگر و فقط اگر $m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2$.

(۳۲) الف) نشان دهید که M ، جرم خورشید، متناسب است با ثابت ایبراهی α ($\sin\alpha = \frac{v}{c}$):

$$M = \frac{\alpha^2 c^2 R}{G^2}$$

که در آن R شعاع مدار زمین به دور خورشید است (با فرض دایروی بودن آن).
 راهنمایی: قانون دوم نیوتون را برای حرکت زمین به دور خورشید به کار گیرید.
 ب) M را با دانستن $\alpha = 20/5''$ و $R = 1/5 \times 10^{11} m$ محاسبه کنید.

(۳۳) سعی کنید با استفاده از تعریف کلاسیک لاگرانژی، یعنی با استفاده از تعریف انرژی جنبشی، برای یک ذره نسبتی آزاد لاگرانژی بنویسید. نشان دهید که معادله اویلر-لاگرانژ این لاگرانژی منجر به دینامیکی می‌شود که با شهود نسبتی مقایرت دارد.

مراجع

- (۱) رضا منصوری، مفهوم جرم، مجله فیزیک، ۱۳۷۴، ۱۳، ۲، ۱، ۱۸-۲۳.
- (۲) یک آزمون نسبیت خاص arxiv:hep-ph/0511262
- (۳) فرمولبندی همیلتونی نسبیت خاص دوسپته ناوردا arxiv:hep-th/0512319
- (۴) نسبیت خاص در واپاشی ذرات arxiv:hep-ph/0510398
- (۵) حرکت در میدان نیروی مرکزی arxiv:physics/0405090 و arxiv:physics/0407049

فصل ۵

الکترومغناطیس

منشأ نظریه نسبیت خاص به صورت تنگاتنگ با تاریخچه الکترودینامیک ارتباط دارد. تناقضی که در اواخر قرن سیزدهم/نوزدهم و اوائل قرن چهاردهم/بیستم میان الکترومغناطیس ماکسول و نظریه‌های وجود اتر در دردها تجربه اپتیکی دیده می‌شد در ماهیت نسبیتی معادله‌های ماکسول ریشه داشت. ما در این فصل خواهیم دید که معادله‌های ماکسول، بر خلاف مکانیک نیوتونی، نسبیتی‌اند و از تبدیل لورنتز تبعیت می‌کنند. البته می‌شد معادله‌های ماکسول را تنها در اتر، در یک چارچوب مرجع مطلق، معتبر دانست و معادله‌های متناظر با آن در هر دستگاه لخت دیگر را از تبدیل گالیله به دست آورد. کاری که نتیجه بسیار پیچیده‌ای داشت و در ابتدا انجام می‌شد و همان تناقض‌های میان تجربه و نظریه را به دنبال داشت. این در حالی است که معادله‌های ماکسول را اگر تحت تبدیل لورنتز نگاه کنیم تغییر شکل نمی‌دهند، و بنابراین، لورنتز هموردا هستند. موفقیت الکترودینامیک کوانتومی در دهه‌ی چهل تا شصت میلادی قرن گذشته در پیشگویی گشتاور الکترون و میون و نیز خطوط طیفی اتم هیدروژن نشان داد که این تعبیر نسبیتی درست است و اعتبار این درستی تا فاصله‌های 10^{-15} cm می‌رسد.

۱.۵ الکترومغناطیس

۱.۱.۵ شکل هموردای الکترومغناطیس

در فصل‌های قبلی دیدیم که، یکی از پایه‌های اصلی فیزیک نسبیتی، هموردا بودن قوانین فیزیک از دید ناظرهای لخت است. همچنین، با توجه به خواص تبدیلی موجودهای ریاضی، مانند چاربردارها، دیدیم که در بیان قوانین فیزیک باید به هموردایی آن‌ها توجه کرد؛ یعنی که باید از چاربانسور، چاربردار، و یا نرده‌ای لورنتز برای بیان قانون‌ها استفاده کرد. به همین منظور می‌خواهیم قوانین الکترومغناطیس را به صورت هموردا بنویسیم. معادلات ماکسول، به علاوه معادله پیوستگی بار، نقطه شروع را تشکیل می‌دهند. برای سهولت، این معادلات را برای محیط خلأ با پارامترهای $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ می‌نویسیم:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (5)$$

در این معادلات B, E به ترتیب میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و \vec{j}, ρ به ترتیب چگالی بار و جریان‌اند. می‌دانیم که این معادلات را می‌توان بر حسب پتانسیل‌های نرده‌ای ϕ و برداری \vec{A} نیز بیان کرد. طبق تعریف، این پتانسیل‌ها در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (6)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (7)$$

پتانسیل‌های نرده‌ای و برداری به طوریکتا از این دو رابطه تعیین نمی‌شوند. به وضوح دیده می‌شود که برای هر تابع دلخواه $\Lambda(t, \vec{x})$ تبدیل

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi - \dot{\Lambda} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \nabla \Lambda \end{aligned} \quad (8)$$

شکل معادله‌های (۶) و (۷) را تغییر نمی‌دهد. این تبدیل را تبدیل پیمانه‌ای می‌نامند. پس مجازیم هر پیمانه دلخواه را انتخاب کنیم. این انتخاب را می‌توان به صورت یک شرط روی پتانسیل‌ها بیان کرد. یکی از شرط‌های مرسوم، که با هدف هم‌وردن نوشتن معادله‌های ماکسول سازگار است (تمرین)، شرط یا پیمانه لورنتز است که آن را می‌توان به این صورت نوشت

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

با توجه به این پیمانه، از معادله‌های (۱) تا (۷) به دست می‌آوریم

$$\square \phi = \rho \quad (10)$$

$$\square \vec{A} = \vec{j} \quad (11)$$

که در آن \square عملگر دالامبر، یا دالامبری، است. اکنون طبیعی به نظر می‌رسد که چارجرهای و چارپتانسیل را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} j^\mu &= (\rho, \vec{j}) \\ A^\mu &= (\phi, \vec{A}) \end{aligned} \quad (12)$$

با این تعریف‌ها معادله‌های (۱۰) و (۱۱) به این صورت خلاصه می‌شوند:

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (13)$$

این معادله شکل هم‌وردن دارد، اما قبل از اظهار نظر نهایی باید ببینیم آیا j^μ و A^μ چاربردار هستند. ابتدا با چارتابه j^μ شروع می‌کنیم. راه‌های متفاوتی برای اثبات چاربردار بودن این چارتابه وجود دارد که ما تنها به یک روش اکتفا می‌کنیم. فرض معقول و مبتنی بر تجربه و آزمایش این است که بار الکتریکی یک ذره، مثلاً الکترون، ثابت است و مستقل است از دستگاه لخت. اکنون ذره‌ای با بار e را در نظر می‌گیریم و جهان خط آن را با $X^\mu(s)$ نشان می‌دهیم که s ویژه زمان است. پس چارسرعت ذره می‌شود $u^\mu = \frac{dX^\mu}{ds}$. چگالی و جریان به عنوان تابعی از فضا و زمان هنگامی مخالف صفر است که \vec{x} روی \vec{X} بیفتند، البته بدیهی است که زمان برای هر دو یکی است، یعنی $X^0 = x^0 = t$ پس برای اینکه بتوان این تساوی را به فرمول درآورد باید چگالی و جریان

$$\rho(x^\mu) = e \delta^3(\vec{x} - \vec{X}(t)) \quad (14)$$

$$\vec{j}(x^\mu) = e \frac{d\vec{X}}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{X}(t)) \quad (15)$$

را هم‌زمان در $\delta(x^\circ - X^\circ)$ ضرب کنیم و روی آن از $x^\circ = X^\circ = t$ انتگرال بگیریم. توجه داشته باشید که چون همواره می‌توانیم جهان خط را با t یا با ویژه‌زمان s پرمایش کنیم، بسته به نیاز از این پارامتر استفاده می‌کنیم. به این ترتیب می‌نویسیم

$$\rho(x^\mu) = e \int dt \delta(X^\circ - x^\circ) \delta^3(\vec{x} - \vec{X}) = e \int ds \frac{dt}{ds} \delta^4(x^\mu - X^\mu) \quad (16)$$

$$\vec{j} = e \int \frac{d\vec{X}}{dt} \delta(X^\circ - x^\circ) \delta^3(\vec{x} - \vec{X}) = e \int ds \frac{d\vec{X}}{ds} \delta^4(x^\mu - X^\mu) \quad (17)$$

که می‌توان آنها را به صورت چارتایه‌ای نوشت

$$j^\mu = e \int ds \frac{dX^\mu}{ds} \delta^4(x^\mu - X^\mu) = e \int ds u^\mu \delta^4(x^\mu - X^\mu) \quad (18)$$

چون ds و δ^4 ناورد هستند، پس j^μ مانند u^μ یک چاربردار است. قانون پایستگی (۵) در شکل چاربرداری‌اش می‌شود

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (19)$$

چون j^μ چاربردار است، پس این رابطه هموردا است و بنابراین سمت راست در هر دستگاهی صفر است. به عبارت دیگر از چاربردار بودن j^μ نتیجه می‌شود واگرایی چارجریان همواره صفر است، که این یک بیان دیگر قانون پایستگی جریان است که مستقل از ناظر است. همین‌طور پیمانه لورنتز (۹) به این صورت درمی‌آید:

$$\partial_\mu A^\mu = A^\mu_{,\mu} = 0 \quad (20)$$

این شرط در صورتی مستقل از ناظر است که A^μ چاربردار باشد، اما با توجه به معادله (۱۳)، و نیز ناورد بودن دالامبری، نتیجه می‌شود که A^μ باید چاربردار باشد، چون j^μ چاربردار است. پس رابطه (۲۰) هم رابطه‌ای هموردا است و شرط لورنتز مستقل از ناظر در همه چارچوب‌ها معتبر است. تبدیل پیمانه نیز هم‌اکنون به این صورت نوشته می‌شود

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Lambda = A^\mu - \partial^\mu \Lambda \quad (21)$$

مجموعه معادله‌های (۱۳، ۱۹، ۲۰، ۲۱) شکل هموردای معادله‌های ماکسول را بر حسب پتانسیل‌ها بیان می‌کند. اکنون که چاربردار پتانسیل را تعریف کردیم، باید معادل چاربعدهی تاو را تعریف کنیم تا میدان متناظر با پتانسیل را هم به دست آوریم و فرمول‌بندی هموردای معادله‌های ماکسول را بر حسب میدان بیان کنیم. با توجه به خاصیت پادتقارنی تاو در سه بعد، طبیعی است که تعمیم تانسوری آن را به صورت یک تانسور رتبه دو پادمتقارن از مشتق‌های A^μ بنویسیم:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (22)$$

این تانسور را تانسور میدان الکترومغناطیسی می‌نامند. به عنوان نمونه دو مؤلفه‌ی آن را حساب می‌کنیم:

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial A_1}{\partial x} = \dot{\phi} + A_{1,x} = -E_1 \quad (23)$$

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -A_{2,x} + A_{1,y} = -B_3 \quad (24)$$

به این ترتیب تانسور $F_{\mu\nu}$ می‌شود

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

این تانسور را هم، همانند هر تانسور رتبه دو دیگر می‌توان برحسب مؤلفه‌های پادوردا نوشت:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (26)$$

برای نوشتن معادله‌های ماکسول برحسب میدان از این ویژگی استفاده کنیم که معادله‌های ماکسول از مشتق اول میدان‌ها به دست می‌آید. ابتدا مشتق اول تانسور میدان را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\square A^\mu \quad (27)$$

بنابراین، با توجه به (۱۳) می‌نویسیم

$$F_{,\nu}^{\mu\nu} = -j^\mu \quad (28)$$

این چهار معادله به جای معادله‌های ناهمگن ماکسول می‌نشینند. با توجه به پادوردا بودن $F^{\mu\nu}$ مستقیماً دیده می‌شود که

$$F_{,\mu\nu}^{\mu\nu} = -j_{,\mu}^\mu = 0 \quad (29)$$

بنابراین معادله‌ی پایستگی جریان به عنوان شرط انتگرال‌پذیری معادله‌ی (۲۸) به دست می‌آید. هنوز باید معادله‌های همگن ماکسول را نیز به صورت هموردا بیان کنیم. چون $F^{\mu\nu}$ پادمتقارن است، مشتق‌های $F_{\mu\nu,\rho}$ در یک اتحاد به صورت زیر صدق می‌کند (تمرین):

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0 \quad (30)$$

این رابطه را می‌توان به صورت جمع و جورتری هم نوشت. از تانسور مرتبه چهار کاملاً پادمتقارن استفاده می‌کنیم و تانسور $F^{\mu\nu}$ را این گونه تعریف می‌کنیم

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (31)$$

$*F^{\mu\nu}$ را تانسور میدان دوگان $F_{\mu\nu}$ می‌نامند. واضح است که

$$*F_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (32)$$

این همان رابطه‌ی (۳۰) است که برحسب میدان دوگان نوشته شده است (تمرین). معادله‌های (۲۹) و (۳۲) شکل هموردای معادلات ماکسول برحسب کمیت‌های میدان است. از طرف دیگر چهار معادله‌ی (۱۳) معادله‌های ماکسول برحسب چارپتانسیل است. لازم است مطمئن شویم که این چهار معادله با هشت معادله‌ی (۲۹) و (۳۲) هم‌ارزاند و نیز در هر دو مورد تعداد مجهول‌ها و معادله‌ها سازگارند (تمرین).

شکل هموردای کمیت‌ها و معادله‌های میدان حسن‌های متعددی دارد. از جمله اینکه فوری می‌توان نتیجه گرفت دو کمیت نرده‌ای زیر مستقل از ناظرند، ناوردا هستند، و مقدار آن‌ها در هر دستگاه همان است:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon}} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (33)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon}} *F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (34)$$

در نتیجه اگر در یک دستگاه $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ باشد، این نامساوی در همه‌ی دستگاه‌ها برقرار است. پس نمی‌توان یک میدان صرفاً الکتریکی را به یک میدان صرفاً مغناطیسی تبدیل کرد. همین‌طور اگر زاویه‌ی میان \vec{E}, \vec{B} در یک دستگاه باز باشد در هر دستگاه دیگری همین‌طور است.

قبل از اتمام این بخش خوب است بار کل مرتبط با جریان j^μ را هم به دست آوریم. از صفر شدن واگرایی چار جریانی، $j^\mu_{,\mu} = 0$ استفاده می‌کنیم. پس قضیه‌ی گاوس می‌گوید انتگرال

$$Q = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} j^{\mu} \quad (۳۵)$$

مستقل از ابرسطح σ است. این انتگرال مقدار کل بار را می‌دهد که کمیت ثابتی است مستقل از ابرسطح σ .

۲.۵ تبدیل میدان‌ها

میدان الکترومغناطیسی با تانسور رتبه دوم $F_{\mu\nu}$ داده می‌شود. پس تبدیل آن از همان قاعده‌ی تبدیل تانسورهای لورنتزی تبعیت می‌کند:

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\rho} L^{\nu}_{\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (۳۶)$$

برای نمونه یک تبدیل سرعت یا خیز را در جهت محور x در نظر می‌گیریم:

$$L^{\mu}_{\rho} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۳۷)$$

اعمال این تبدیل بر میدان (۲۵) را برای ناظر S' به صورت زیر به دست می‌دهد:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_{\parallel} & \gamma(E_{\perp} - vB_{\perp}) & \gamma(E_{\perp} + vB_{\perp}) \\ -E_{\parallel} & 0 & -\gamma(B_{\perp} - vE_{\perp}) & \gamma(B_{\perp} + vE_{\perp}) \\ -\gamma(E_{\perp} - vB_{\perp}) & \gamma(B_{\perp} - vE_{\perp}) & 0 & -B_{\parallel} \\ -\gamma(E_{\perp} + vB_{\perp}) & -\gamma(B_{\perp} + vE_{\perp}) & B_{\parallel} & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۸)$$

که با مقایسه با (۲۵) می‌توان هر یک از مؤلفه‌های \vec{E}', \vec{B}' را بر خواند. مؤلفه‌های عمود و موازی سرعت نسبی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}). \end{aligned} \quad (۳۹)$$

$$\begin{aligned} B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}). \end{aligned} \quad (۴۰)$$

به عنوان مثال یک میدان کولنی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= 0 \\ \vec{E} &= e \frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}\quad (41)$$

از روابط (۳۹) و (۴۰) می‌توان میدان را برای ناظری متحرک نسبت به ناظری که تنها میدان کولنی بالا را می‌بیند به دست آورد:

$$\begin{aligned}B'_{x'} &= B_x = 0, \\ B_{y'} &= \gamma(B_y(x^\mu) + vE_z(x^\mu)), \\ B_{z'} &= \gamma(B_z(x^\mu) - vE_y(x^\mu)).\end{aligned}\quad (42)$$

$$\begin{aligned}E'_{x'} &= E_x(x), \\ E_{y'} &= \gamma E_y(y^\mu), \\ E_{z'} &= \gamma E_z(x^\mu).\end{aligned}\quad (43)$$

علاوه بر این که طبق انتظارمان میدان مغناطیسی در دستگاه متحرک صفر نیست، باید توجه کرد که شناسه‌ی میدان جدید x'^{μ} است که آن نیز تبدیل می‌شود:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu} : \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z.\quad (44)$$

پس در سمت راست تمام روابط بالا باید از (۴۳) بنشانیم (تمرین).

۳.۵ تانسور انرژی-تکانه میدان

تانسور انرژی-تکانه تانسوری است رتبه دو که از مجذور میدان ساخته می‌شود. عام‌ترین شکل آن به این صورت است:

$$T_{\mu\nu} = \alpha F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} + \beta \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\quad (45)$$

انتظار ما این است که مؤلفه‌ی صفرم این تانسور برابر با چگالی انرژی میدان، یعنی $\frac{1}{\lambda\pi}(E^2 + B^2)$ باشد، و سه مؤلفه‌ی T_i بردار پوینتینگ، یعنی $\frac{1}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})$ ، را بدهد. به این ترتیب ثابت‌های α و β تعیین می‌شوند و به دست می‌آوریم

$$4\pi T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\quad (46)$$

معمولاً واگرایی تانسور انرژی-تکانه باید به یک قانون پایستگی منجر شود. در این مورد می‌توان با استفاده از قانون‌های ماکسول (۲۸) و (۳۰) واگرایی تانسور انرژی را حساب کرده و به دست آورد (تمرین):

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = -F^{\mu\nu} j_{\nu}\quad (47)$$

سمت راست این معادله تعبیر سرراستی دارد. بخش فضایی آن همان بردار نیروی لورنتز در الکترومغناطیس است که برای سرعت‌های کم به این صورت نوشته می‌شود

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}\quad (48)$$

این نیرویی است که میدان بر چگالی بار الکتریکی ρ وارد می‌کند. پس تعمیم نسبیتی این چارنیرو می‌شود

$$f^\mu = F^{\mu\nu} j_\nu \quad (49)$$

که آن را چارنیروی لورنتز می‌نامند. به وضوح دیده می‌شود که مؤلفه‌ی صفرم این چارنیرو برابر است با کاری که میدان بر بار در واحد زمان انجام می‌دهد. توجه داشته باشید j_μ از جنس چگالی است و بنابراین f^μ در واقع چگالی چارنیروی لورنتز است که انتگرال‌گیری از آن بر روی حجم نیرو را می‌دهد و برابر است با مشتق زمانی تکانه (تمرین):

$$\int d^3x f^\mu = \frac{d}{dt} p^\mu \quad (50)$$

از طرف دیگر به هر ذره باردار می‌توانیم یک تانسور انرژی-تکانه نسبت دهیم:

$$t^{\mu\nu} = m \int ds \delta^4(x^\rho - z^\rho(s)) u^\mu u^\nu \quad (51)$$

در این رابطه، x^ρ نقطه‌ایست از فضا-زمان، $z^\rho(s)$ جهان خط ذره‌ی باردار با پارامتر ویژه‌زمان s ، و u^μ چارسرعت آن است. واگرایی این تانسور می‌دهد:

$$\begin{aligned} t_{,\nu}^{\mu\nu} &= m \int ds \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^4(x - z(s)) u^\mu u^\nu \\ &= -m \int ds u^\mu \frac{dz^\nu}{ds} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \delta^4(x - z(s)) \\ &= - \int ds p^\mu \frac{d}{ds} \delta^4(x - z(s)) = \int ds \dot{p}^\mu \delta^4(x - z(s)) \end{aligned} \quad (52)$$

انتگرال از این رابطه روی حجم می‌دهد

$$\begin{aligned} \int d^3x t_{,\nu}^{\mu\nu} &= \int ds \dot{p}^\mu \delta(x^0 - z^0(s)) \\ &= \int dt \frac{dp^\mu}{dt} \delta(t - z^0(s)) = \frac{dp^\mu}{dt} \end{aligned} \quad (53)$$

جانمایی این نتیجه در رابطه‌های (۴۶) و (۴۹) نتیجه می‌دهد

$$\int (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} d^3x = 0 \quad (54)$$

چون انتگرال‌گیری روی یک حجم دلخواه است، نتیجه می‌گیریم:

$$(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (55)$$

بنابراین، واگرایی مجموع تانسورهای انرژی-تکانه میدان و ذره صفر است. مؤلفه‌ی صفرم این تانسور انرژی کل میدان و ذره است و مؤلفه‌های فضایی تکانه‌ی کل میدان و ذره را می‌دهد.

۴.۵ تمرین

(۱) در $t = 0$ در S بار q_1 (بار چشمه) از مبدا با سرعت v در جهت $+x$ عبور می‌کند. در همین زمان بار q_2 در $(x, y, t) = (0, y, 0)$ واقع شده و با سرعت u_x در جهت $+x$ حرکت می‌کند. نیروی وارد بر بار q_2 از طرف q_1 را پیدا کنید. مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی نیرو را پیدا کنید.

(۲) یک موج تخت الکترومغناطیسی که در جهت $+x$ حرکت می‌کند با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$E(x, t) \propto \sin[2\pi(\frac{x}{\lambda} - vt)]$$

(الف) تبدیل لورنتز را بر روی شناسه سینوس اثر دهید تا توصیف همان موج را در چارچوب S' که در جهت $+x$ با سرعت v حرکت می‌کند به دست آورید. خصوصاً فرکانس موج را که ناظری در S اندازه می‌گیرد به دست آورید (مستقیماً از رابطه دوپلر استفاده نکنید).

(ب) با فرض $v = \frac{c}{8}$ و $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$ ، طول موج λ (اندازه‌گیری شده توسط S') را به دست آورید.

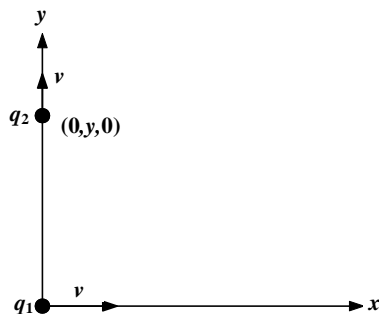
(۳) ذره‌ای با بار q در نظر بگیرید که در چارچوب S با سرعت u حرکت می‌کند. ضمن تبدیل به چارچوب سکون ذره، S' ، میدان الکتریکی و مغناطیسی ناشی از بار را در S' محاسبه و با استفاده از معادلات تبدیل میدان الکترومغناطیسی، همین میدان‌ها را در چارچوب S حساب کنید.

(۴) بار q از مبدا چارچوب S در لحظه t با سرعت v در امتداد محور x حرکت می‌کند. در همین لحظه یک بار آزمون که در امتداد محور y حرکت می‌کند از نقطه $(0, y, 0)$ با سرعت v عبور می‌کند.

(الف) نیروی وارد بر بار آزمون را در چارچوب S' که در آن بار q ساکن است، به دست آورید.

(ب) نیروهای وارد بر بار آزمون را در چارچوب S نیز بنویسید.

(پ) با استفاده از نیروی لورنتز و تبدیل $B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y)$ نیروی مغناطیسی وارد بر بار آزمون را به دست آورید.



(۵) چگونه می‌توان با فرض هموردایی معادلات ماکسول تبدیل مؤلفه‌های میدان وارد بر یک بار آزمون را به دست آورد. به انتخاب خود معادلات تبدیل را برای یک مؤلفه از این روش به دست آورید.

(۶) چگونه می‌توان با فرض هموردایی معادلات ماکسول، تبدیل مؤلفه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به دست آورد. به انتخاب خود معادلات تبدیل را برای یک مؤلفه به دست آورید.

(۷) معادله میدان الکتریکی ماکسول برابر است با

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(z, t) = 0$$

که در آن c سرعت نور است.

الف) نشان دهید که $E(z, t) = f(z \pm ct)$ به ازای هر تابعی از f یک جواب برای معادله بالاست.

ب) توضیح دهید چرا جواب بیانگر یک موج است که به سمت راست یا چپ حرکت می کند.

پ) نشان دهید معادله بالا تحت تبدیل $z' = z - vt, t' = t$ ناورد است.

ت) نشان دهید که معادله بالا تحت تبدیل لورنتز ناورد است.

راهنمایی:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_t = \left. \frac{\partial f(x', t')}{\partial x'} \right|_{t'} \left. \frac{\partial x'(x, t)}{\partial x} \right|_t + \left. \frac{\partial f(x', t')}{\partial t'} \right|_{x'} \left. \frac{\partial t'}{\partial x} \right|_t$$

(۸) یک سولنوئید رایک بار در چارچوب سکون و بار دیگر در چارچوبی با سرعت نسبی v در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$\vec{B}' \cdot \vec{v} = \vec{B} \cdot \vec{v}$$

(۹) یک بار q در امتداد محور x با سرعت ثابت β حرکت می کند. در زمان $t = 0$ بار در $x = 0$ قرار دارد. در یک زمان جلوتر $-t$

بار در نقطه $x = -\beta ct$ قرار داشته است. نقطه دلخواه P با مختصات (x, y) را در نظر بگیرید. زمان $-t$ را طوری پیدا کنید که

بعد از گذشت آن هیچ اطلاعی نتواند از ذره به P برسد مگر بعد از زمان $t = 0$.

فصل ۶

گروه لورنتز

تبدیل لورنتز به صورت ساده آن، یعنی خیز، که تا اینجا با آن آشنا شدیم، یکی از مجموعه تبدیل‌هایی است که متریک فضازمان مینکوفسکی را ناوردا می‌گذارد. از طرف دیگر در به دست آوردن خیز، از دوران مختصات و نیز جهت دلخواه بردار سرعت چشم‌پوشی شد. به علاوه انتقال مبدأ مختصات هم کنار گذاشته شد. پس حالت کلی تبدیل لورنتز باید بسیار عام‌تر باشد. بنابر تعریف هر تبدیل همگن خطی که متریک مینکوفسکی را ناوردا بگذارد تبدیل لورنتز نامیده می‌شود. اگر تبدیل ناهمگن باشد، یعنی اگر انتقال هم مجاز باشد، تبدیل را پوانکاره می‌نامند. ما در این کتاب، به جهت سهولت به تبدیل لورنتز اکتفا می‌کنیم. گیریم تبدیل عام لورنتز L_V^μ باشد. این تبدیل مختصات هر رویداد چارچوب S را به مختصات S' تبدیل می‌کند:

$$x'^\mu = L_V^\mu x^\nu \quad (۱)$$

به شرطی تبدیل لورنتز است که

$$\begin{aligned} L^T \eta L &= \eta \\ L_\rho^\mu L_\sigma^\nu \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (۲)$$

به سهولت می‌توان اثبات کرد که مجموعه تبدیل‌های لورنتزیک گروه تشکیل می‌دهند (تمرین). توجه کنید که ماتریس L_V^μ شانزده مؤلفه دارد که رابطه (۲) آنها را به شش مؤلفه مستقل محدود می‌کند. این رابطه شبیه است به رابطه تعامد برای دوران در سه بعد. در عین حال می‌دانیم که دوران به تنهایی هم، بدون تغییر چارچوب بلکه صرفاً چرخش مؤلفه‌های فضایی، متریک مینکوفسکی را ناوردا می‌گذارد؛ پس باید یک زیرگروه از تبدیلات لورنتز باشد. این زیرگروه سه پارامتر دارد، که معمول‌ترین آن‌ها زاویه‌های اویلر هستند که در مکانیک، در بخش دوران اجسام صلب، با آن سروکار داریم. پس ابتدا مروری می‌کنیم بر گروه دوران تا آماده شویم برای گروه وسیع‌تر لورنتز.

۱.۶ گروه دوران در سه بعد

در این بخش، که با سه مؤلفه و سه مختصه سروکار داریم، از شاخص‌های لاتین i, j, k استفاده می‌کنیم. به این ترتیب ماتریس دوران مختصات R_j^i را به x'^i می‌برد:

$$x'^i = R_j^i x^j \quad (۳)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} R^T R &= \mathbb{1} \\ R_j^i R_i^k &= \delta_j^k \end{aligned} \quad (۴)$$

که این شرط تعامد از ناوردا بودن طول یا متریک اقلیدسی سه بعدی به دست می آید. نشان دادن اینکه مجموعه دوران‌های سه بعدی یک گروه تشکیل می‌دهند سخت نیست (تمرین). این گروه را معمولاً با $O(۳)$ نمایش می‌دهند. اگر از تبدیل‌هایی که دستگاه راستگرد را به چپگرد می‌برند چشم‌پوشی کنیم، آنگاه $\det R = +۱$ خواهد بود (چرا؟). در این صورت گروه دوران $SO(۳)$ نامیده می‌شود، که منظور گروه دوران در سه بعد است. این گروه یک گروه پیوسته است، به این معنی که عناصر گروه گسسته نیستند، بلکه به سه پارامتر پیوسته بستگی دارند، که اصطلاحاً گروه لی خوانده می‌شود. به هر گروه لی می‌توان خمینه‌ای نسبت داد که بعد آن برابر تعداد پارامترهای مستقل گروه است. پس خمینه وابسته به گروه دوران یک خمینه سه بعدی است. یک روش پرمایش گروه دوران انتخاب زاویه‌های اوپلر است: دوران حول محور z به اندازه زاویه α ، دوران حول x با زاویه β ، دوران حول z با زاویه γ . ماتریس عملگر این دوران اینگونه است:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۵)$$

از طرف دیگر می‌توان هر دوران دلخواه را حول محوری مانند $\vec{\alpha}$ تعریف کرد که اندازه این بردار، $\alpha = |\vec{\alpha}|$ ، زاویه دوران را می‌دهد. در این صورت ماتریس دوران می‌شود (تمرین)

$$R_j^i = \cos\alpha \delta_j^i + (1 - \cos\alpha) \frac{\alpha^i \alpha_j}{\alpha^2} + \sin\alpha \frac{\epsilon^{ijk} \alpha_k}{\alpha} \quad (۶)$$

توجه کنید برای تانسورهای اقلیدسی دکارتی که اینجا با آن‌ها سروکار داریم تفاوتی میان شاخص بالا و پایین نیست. از طرف دیگر هر ماتریس متعامد خاص، با دترمینان مثبت، را می‌توان به صورت بالا نوشت. رد این ماتریس، یعنی

$$\text{tr} R = 1 + 2 \cos\alpha \quad (۷)$$

مقدار زاویه دوران را می‌دهد. از طرف دیگر از رابطه

$$\sin\alpha \frac{\alpha^i}{\alpha} = \frac{-1}{2} \epsilon^{ijk} R_k^j \quad (۸)$$

می‌توان محور دوران را به دست آورد.

هرگاه دوران بینهایت کوچک باشد می‌توان ماتریس دوران را برابر ماتریس یک به علاوه یک اختلال کوچک نوشت:

$$R = \mathbb{1} + \Omega, \quad \Omega \ll 1 \quad (۹)$$

از شرط تعامد $R^T R = \mathbb{1}$ به دست می‌آوریم

$$\Omega + \Omega^T = 0 \quad (۱۰)$$

بنابراین Ω یک ماتریس پادمتقارن است که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

این ماتریس را به سه ماتریس پایه Λ_i تجزیه می‌کنیم به گونه‌ای که $\Omega = \omega_i \Lambda_i$ بشود:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Lambda_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

این ماتریس‌ها را مولد گروه دوران می‌نامند. رابطه ساده‌ای میان حاصلضرب این مولدها وجود دارد:

$$[\Lambda_i, \Lambda_j] = \epsilon_{ijk} \Lambda_k \quad (13)$$

که به رابطه جابجایی مولدهای گروه دوران معروف است. هر یک از عنصرهای مولدها را به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\Lambda_{ijk} = -\epsilon_{ijk} \quad (14)$$

با این تعریف‌ها تبدیل بینهایت کوچک بردار \vec{x} به \vec{x}' را می‌توانیم اینگونه بنویسیم

$$x'^i = R_j^i x^j = (\delta_j^i + \Omega_j^i) x^j = x^i + \epsilon^{ijk} \omega^j x^k = x^i + (\vec{\omega} \wedge \vec{x})^i \quad (15)$$

حالا می‌توان رابطه میان دوران متناهی و دوران بینهایت کوچک را برقرار کرد. گیریم عملگر دوران بینهایت کوچک $\vec{\omega}$ به اندازه n بار اعمال شود. در این صورت عملگر دوران متناظر، زاویه $\vec{\alpha} = n \cdot \vec{\omega}$ می‌شود

$$R(\vec{\alpha}) = R^n(\omega) = (1 + \omega_i \Lambda_i)^n \quad (16)$$

این دوران به ازای $n \rightarrow \infty$ متناهی می‌شود. در این صورت داریم

$$R(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \omega_i \Lambda_i)^n = e^{\alpha_i \Lambda_i} \quad (17)$$

می‌توان نشان داد که این نتیجه با رابطه (۶) هم‌ارز است.

گروه دوران مثال نوعی و ساده‌ای است از گروه‌های پیوسته یا گروه‌های لی. این گروه لی یک خمینه سه بعدی تعریف می‌کند، که آن را خمینه گروه لی دوران می‌نامند. همان گونه که در خمینه می‌توان مختصات یا پایه‌های دلخواه انتخاب کرد، اینجا نیز راه‌های متفاوتی برای تعیین پارامترهای گروه دوران وجود دارد. از طرف دیگر مولدهای دوران یک فضای برداری سه بعدی تشکیل می‌دهند. برای بردارهای این فضا، مثلاً X, Y می‌توان ضربی به صورت زیر تعریف کرد:

$$X.Y = [X, Y] = -Y.X \quad (18)$$

به طور مثال ضرب مولدها، به عنوان بردارهای پایه، می‌دهد

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = [\Lambda_1, \Lambda_2] = \Lambda_3 \quad (19)$$

این ضرب، که به صورت یک جابجاگر تعریف می‌شود، مانند هر جابجاگری در همانی ژاکوبی صدق می‌کند:

$$(X.Y).Z + (Y.Z).X + (Z.X).Y = 0 \quad (20)$$

این فضای برداری با خواص ضرب (۱۸) و (۲۰) را جبرلی می‌نامند. برای هر جبرلی می‌توان نشان داد که رابطه زیر میان بردارهای پایه X_i وجود دارد:

$$X_i.X_j = C_{ij}^k X_k \quad (21)$$

که در آن عدد C_{ij}^k ثابت ساختار جبرلی خوانده می‌شود. توجه کنید که ثابت ساختار در دو شاخص پایین پادمتقارن است:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad (22)$$

۲.۶ گروه لورنتز

همان گونه که در فصل دوم دیدیم، تبدیل لورنتز میان دو چارچوب لخت، که با ضرایب L_ν^μ بیان می‌شود، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$L_\rho^\mu L_\sigma^\nu \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \quad (23)$$

بدیهی است که همواره می‌توان مبدأ یک چارچوب را نیز تغییر داد. در این صورت تبدیل عام میان دو دستگاه را می‌توان به این صورت نوشت:

$$x'^\mu = L_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (24)$$

این ترکیب از تبدیل لورنتز و انتقال را تبدیل پوانکاره می‌نامند. بدیهی است تبدیل‌های خطی از این نوع میان دستگاه‌های لخت تشکیل یک گروه می‌دهند. این گروه را گروه پوانکاره، و حالتی را که در آن انتقال صفر است، $a^\mu = 0$ ، گروه لورنتز می‌نامیم. با این تعریف، گروه لورنتز گروهی است پیوسته که عناصر آن از ماتریس‌های L_ν^μ تشکیل می‌شود که در رابطه (۲۳) صدق می‌کنند. ماتریس L_ν^μ دارای ۱۶ مؤلفه است که ۱۰ قید (۲۳) میان آن‌ها برقرار است؛ پس گروه لورنتز یک گروه لی ۶ پارامتری است. می‌دانیم که سه پارامتر توسط تبدیل خیز تعیین می‌شود، یعنی سه مؤلفه سرعت \vec{v} میان دو دستگاه S' و S . از طرف دیگر دوران بخش فضایی دو چارچوب حول محور دوران $\vec{\alpha}$ چارچوب لخت اولیه را به چارچوب لخت دیگری تبدیل می‌کند. بنابراین باید بتوان هر تبدیل لورنتز، یا هر عنصر گروه لورنتز، را با شش پارامتر \vec{v} و $\vec{\alpha}$ بیان کرد. ابتدا شکل تبدیل لورنتز حاصل از خیز \vec{v} و دوران $\vec{\alpha}$ را در می‌آوریم. خیز سه بعدی را چنین می‌نویسیم:

$$L_\nu^\mu(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v^i \\ -\gamma v_j & \delta_j^i + \frac{\gamma}{1+\gamma} v^i v_j \end{pmatrix} \quad (25)$$

عملگر دوران بخش فضایی را عوض می‌کند، پس اگر R_j^i عملگر دوران باشد، داریم $t' = t''$ و $x''^i = R_j^i x'^j$. فرض کرده‌ایم ابتدا عمل خیز انجام شده است سپس دوران. ضرب ماتریس دوران در خیز می‌دهد

$$L_\nu^\mu(\vec{\alpha}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v^i \\ -\gamma R_j^k v_k & R_j^i + \frac{\gamma}{1+\gamma} R_j^k v_k v^i \end{pmatrix} \quad (26)$$

این تبدیل لورنتز، که از ضرب دو عملگر خیزسه بعدی و دوران به دست می آید، ۶ پارامتر دلخواه دارد. نشان می دهیم که هر تبدیل عام لورنتز را می توان به این صورت در آورد. ماتریس عام لورنتز L_ν^μ را ابتدا به این صورت می نویسیم:

$$L_\nu^\mu = \begin{pmatrix} L_\circ^\circ & L_\circ^i \\ L_j^\circ & L_j^i \end{pmatrix} \quad (27)$$

از مقایسه این تبدیل با ماتریس (۲۶) به سهولت به دست می آوریم (تمرین)

$$\begin{aligned} \gamma &= L_\circ^\circ \\ R_j^i v_i &= -\frac{L_j^\circ}{L_\circ^\circ} \\ v^i &= -\frac{L_\circ^i}{L_\circ^\circ} \end{aligned} \quad (28)$$

و

$$R_j^i = L_j^i - \frac{L_\circ^i L_j^\circ}{1 + \gamma} \quad (29)$$

به این ترتیب، با استفاده از رابطه های بخش گذشته می توان $\vec{\alpha}$ بردار دوران، را نیز به دست آورد. پس هر ماتریس تبدیل لورنتز را می توان بر حسب سرعت \vec{v} و دوران $\vec{\alpha}$ به صورت زیر نشان داد

$$L_\nu^\mu(\vec{\alpha}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} L_\circ^\circ & L_\circ^i \\ L_j^\circ & L_j^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v^i \\ -\gamma R_j^i v_i & L_j^i \end{pmatrix} \quad (30)$$

که ماتریس L_j^i به شکلی است که در ماتریس رابطه (۲۶) آمده است. از مجموع این رابطه ها دیده می شود (تمرین)

$$\gamma^2 - \delta_{ik} L_\circ^i L_\circ^k = 1 \quad (31)$$

$$L_\circ^i L_j^i = -\gamma^2 v^i \quad (32)$$

$$(L^T)_j^k L_k^i = \gamma^2 v_j v^i + \delta_j^i \quad (33)$$

که در آن منظور از L_j° همان عنصرهای ستون صفرم L_ν^μ ، یعنی L_j° است که برای حفظ قاعده جمع زنی شاخص j را پایین نوشته ایم. این به آن معنی است که ماتریس L_j° را که $(n \times 1)$ است به صورت $(1 \times n)$ ، یعنی ترانهاد، نوشته ایم تا ضرب ماتریسی در سمت چپ (۳۲) معنی دار شود. همچنین در رابطه (۳۳) منظور از $(L^T)_j^k$ مؤلفه ستون k -ام و سطر j -ام از ترانهاد ماتریس L است، که برابر است با مؤلفه سطر k -ام و ستون j -ام ماتریس L .

همانند دوران بینهایت کوچک، اینجا نیز به سهولت می توان نشان داد که تبدیل بینهایت کوچک لورنتز به صورت زیر تجزیه می شود (تمرین):

$$L(\vec{\alpha}, \vec{v}) \simeq L(\circ, \vec{v})L(\circ, \vec{\alpha}) = 1 + \alpha^i M_i + v^i N_i \quad (34)$$

که در آن

$$\begin{aligned} M_i &= \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \Lambda_i \end{pmatrix} \\ N_i &= \begin{pmatrix} \circ & -e_i^T \\ -e_i & \circ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

Λ_i مولدهای گروه دوران و e_i بردار یکه در جهت x^i فضا است. رابطه جابجایی مولدهای M, N به این صورت است:

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k \quad (۳۶)$$

$$[M_i, N_j] = -\epsilon_{ijk} N_k \quad (۳۷)$$

$$[N_i, N_j] = -\epsilon_{ijk} M_k \quad (۳۸)$$

رابطه (۳۸) بیانگر آن است که اعمال دو تبدیل خیز به یک خیز منجر نمی‌شود، و تقدیم توماس نتیجه همین واقعیت است.

۳.۶ تقدیم توماس

وضعیتی را در نظر بگیرید که یک دستگاه شتابدار نسبت به چارچوب لخت S حرکت می‌کند، به طریقی که در هر لحظه محورهای آن موازی می‌مانند و دستگاه لخت آنی وصل به ناظر شتابدار را می‌توان با یک خیز از دستگاه آنی لحظه قبل به دست آورد. در عمل می‌خواهیم نتیجه چنین تبدیلی را به حرکت شتابدار یک الکترون اعمال کنیم. ابتدا دو تبدیل خیز پشت سر هم به چارچوب S اعمال می‌کنیم. S' از S با خیز \vec{v} و S'' از S' با خیز \vec{u} به دست می‌آید. پس داریم

$$x''^\mu = L_\rho^\mu(\vec{u})x'^\rho = L_\rho^\mu(\vec{u})L_\nu^\rho(\vec{v})x^\nu = L_\nu^\mu(\vec{\alpha}, \vec{w})x^\nu \quad (۳۹)$$

که در آن

$$L_\nu^\mu(\vec{\alpha}, \vec{w}) = L_\rho^\mu(\vec{u})L_\nu^\rho(\vec{v}) \quad (۴۰)$$

گرفته شده است. چون حاصلضرب دو خیز تبدیل لورنتز ناشناخته‌ای است، فرض کرده‌ایم از دوران $\vec{\alpha}$ و خیز \vec{w} به دست آمده است. خواهیم دید که \vec{w} از جمع نسبیتی \vec{v} و \vec{u} به دست می‌آید و بیانگر دورانی غیر صفر است که باید با $\vec{v} \times \vec{u}$ متناسب باشد. ابتدا ماتریس $L_\nu^\mu(\vec{\alpha}, \vec{w})$ را به دست می‌آوریم:

$$L_\nu^\mu(\vec{\alpha}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\gamma_u v^k \\ -\gamma_u u_j & \delta_j^k + \frac{\gamma_u}{1+\gamma_u} u^k u_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v v^i \\ -\gamma_v v_j & \delta_k^i + \frac{\gamma_v}{1+\gamma_v} v^i v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_w & -\gamma_w w^i \\ L_j^0 & L_j^i \end{pmatrix} \quad (۴۱)$$

که در آن \vec{w} جمع نسبیتی سرعت‌های \vec{v}, \vec{u} است:

$$w^i = \frac{1}{\gamma_w} (\gamma_u \gamma_v v^i + \gamma_u u^i + \frac{\gamma_u \gamma_v}{1+\gamma_v} (u_k v^k) v^i) \quad (۴۲)$$

$$= \frac{1}{\gamma_w} \left(\frac{\gamma_v (\gamma_u + \gamma_w)}{1+\gamma_v} v^i + \gamma_u u^i \right) \quad (۴۳)$$

$$\gamma_w = \gamma_u \gamma_v (1 + u_k v^k)$$

به علاوه داریم

$$L_j^i = \delta_j^i + \frac{\gamma_v}{1+\gamma_v} v_j v^i + \frac{\gamma_u}{1+\gamma_u} u_j u^i \quad (۴۴)$$

$$L_j^{\circ} = \frac{\gamma_u(\gamma_v + \gamma_w)}{1 + \gamma_u} u_j + \gamma_v v_j + \gamma_u \gamma_v \left(1 + \frac{\gamma_u \gamma_v}{(1 + \gamma_u)(1 + \gamma_v)} v_k v^k\right) u_j v^i \quad (45)$$

ماتریس (۴۴) در حالت کلی متقارن نیست. مقایسه با رابطه‌های (۲۸) و (۲۹) نشان می‌دهد:

$$R_j^i = L_j^i - \frac{\gamma_w}{1 + \gamma_w} w^i L_j^{\circ} \quad (46)$$

این ماتریس دوران تنها هنگامی صفر است که $\vec{v} \times \vec{u} = 0$ باشد. در حالت کلی این ماتریس دارای ویژه بردار $\vec{v} \times \vec{u}$ با ویژه مقدار یک است (تمرین). بنابراین، اگرچه هر یک از دو تبدیل تنها خیز هستند و محورها همواره موازی در نظر گرفته شده‌اند، اما از دید ناظر S چارچوب S'' حول بردار \vec{a} چرخیده است، که جهت آن را بردار $\vec{v} \times \vec{u}$ تعیین می‌کند و اندازه آن با رد ماتریس (۴۶) داده می‌شود، یعنی $R_i^i = 1 + 2 \cos(\alpha)$. توجه کنید که \vec{u} سرعت S'' نسبت به S' است، پس در به دست آوردن جهت بردار \vec{a} مشکل خواهیم داشت، و بهتر است که بردار دوران را بر حسب ضرب خارجی دو بردار در دستگاه S به دست آوریم. با توجه به جمع سرعت‌های (۳۸) داریم

$$\vec{v} \times \vec{w} = \frac{\vec{v} \times \vec{u}}{(1 + \vec{v} \cdot \vec{u}) \gamma_v} \quad (47)$$

پس برای تعیین بردار دوران کافی است ضرب خارجی بردارهای سرعت چارچوب‌های S' , S'' را نسبت به S بدانیم. حالا فرض کنیم که \vec{u} بینهایت کوچک باشد. در واقع مثل این است که الکترونی شتابدار را در نظر گرفته‌ایم که در لحظه t سرعت آن نسبت به ناظر لخت \vec{v} و در لحظه $t + dt$ سرعت آن نسبت به دستگاه لخت آنی در لحظه t برابر $d\vec{v} = \vec{u}$ است. در این صورت برای جمع سرعت‌ها و ماتریس دوران به دست می‌آوریم

$$w^i = \frac{1}{\gamma_w} \left(\frac{\gamma_v(1 + \gamma_w)}{1 + \gamma_v} v^i + dv^i \right); \quad \gamma_w = \gamma_v(1 + v^k dv_k) \quad (48)$$

$$R_j^i = \delta_j^i + \frac{\gamma_v}{1 + \gamma_v} (dv_j v^i - v_j dv^i) \quad (49)$$

از این رابطه می‌توان بردار دوران را بر خواند:

$$\vec{\alpha} = -\frac{\gamma_v}{1 + \gamma_v} \vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{v} \times \vec{w} \quad (50)$$

توجه کنید که در این رابطه‌ها همواره از مجذور سرعت dv چشم‌پوشی شده است. با توجه به اینکه سرعت الکترون متغیر است می‌توانیم از این رابطه بردار سرعت زاویه‌ای را حساب کنیم:

$$\vec{\omega} = -\frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{v} \times \vec{a} \quad (51)$$

که در آن \vec{a} شتاب الکترون در دستگاه S است. $\vec{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای در تقدیم توماس است. این پدیده تقدیم محور الکترون علت ناهمسازی مکانیک کوانتومی نانسبیتی با حرکت الکترون است.

تمرین

(۱) نشان دهید که عنصرهای گروه پوانکاره (a, L) به صورت زیر ضرب می‌شوند.

$$(a', L')(a, L) = (a + a', LL') \quad (52)$$

(۱) راجع به حرکت دایره‌ای و حرکت تقدیمی توماس [arxiv:gr-qc/0703090](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703090)

(۲) نسبیت خیلی خاص [arxiv:hep-ph/0601236](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0601236)

(۳) تبدیل سایه‌ها در نسبیت خاص [arxiv:gr-qc/0510063](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0510063)

فصل ۷

مباحث ویژه در نسبیت

۱.۷ آزمون نسبیت

نظریه آزمون نسبیت چیست و چه لزومی دارد؟

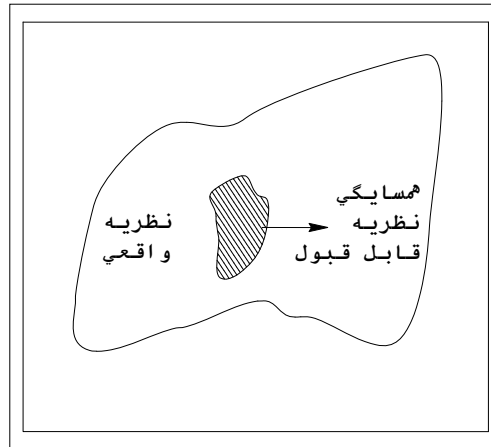
فیزیک جدید به قدری جالب، زیبا، و ساده است و آنچنان لختی‌ای در میان فیریکدانان ایجاد کرده‌است که کسی حاضر نیست چیزی درباره تغییر نظریه‌ها بشنود و یا حرفی از نظریه‌های رقیب به میان بیاورد. اخبار مربوط به تجربه‌های دقیق برای آزمون مفاهیم بنیادی فیزیک با رضایت خاطر پذیرفته می‌شوند. نسبیت خاص، که نظریه بنیادی فضا و زمان است، شاید بهترین مثال باشد. این نظریه، که در واقع اساس نظریه‌های دیگر فیزیک است، از طریق شبکه بین‌المللی ساعت‌ها (UCT)^۱ به امور روزمره ما پیوند خورده، و بسیار ساده و زیباست. به خصوص با پرداختن به نظریه‌های رقیب آن تازه یاد می‌گیریم که زیبایی و قدرت پیشگویی آن را تحسین کنیم. با این همه لازم است که این ویژگی‌ها اندازه‌پذیر شوند. تعداد تجربه‌هایی که نسبیت خاص را می‌آزمایند زیاد است. برای تعبیر درست این تجربه‌ها احتیاج به یک نظریه آزمون داریم. به طور کلی، منظور از نظریه آزمون، تعریف یک دسته نظریه‌های رقیب برحسب n پارامتر است. نظریه مورد آزمون نقطه‌ای است در فضای n بعدی پارامترها. نظریه آزمون روشی به دست می‌دهد که با آن می‌توان تجربه‌هایی را که نظریه را می‌آزمایند با نقطه‌ها و یا حوزه‌هایی از این فضای پارامترها همبسته کرد. تجربه‌های موجود با یک دسته نظریه، علاوه بر نظریه واقعی مورد آزمون، سازگار است. این دسته را نظریه‌های پذیرفتنی می‌نامند. نظریه‌های پذیرفتنی یک همسایگی حول نقطه واقعی تشکیل می‌دهند (شکل ۱.۷). دقت تحقیق و درستی نظریه واقعی را با اندازه‌ای که برای حجم این همسایگی به دست می‌آوریم، بیان می‌کنیم.

نظریه آزمون نسبیت خاص، نظریه‌ای است اساساً سینماتیکی. جنبه‌های دینامیکی هر نظریه فضا-زمان الزاماً با نظریه‌های برهمکنش‌های بنیادی، مانند الکترودینامیک ماکسول یا نسبیت عام انیشتین، تداخل پیدا می‌کند. تا جایی که به نسبیت عام مربوط می‌شود نظریه‌هایی را می‌شناسیم که پذیرفتنی‌اند و مبتنی‌اند بر نسبیت خاص. پس داشتن نظریه آزمون برای نسبیت عام لازم است، که البته این نظریه ساخته و پرداخته شده‌است [۲۱]. از طرف دیگر، الکترودینامیک ماکسول به گونه‌ای یکتا با گروه لورنتز نسبیت خاص تعریف می‌شود. به محض رها کردن این گروه، ملزم به پذیرفتن فرض‌هایی اضافی می‌شویم تا بتوانیم الکترودینامیک را در هر چارچوب مرجع دلخواهی فرمولبندی کنیم. در واقع چندگانگی‌هایی در سطح تعریف مفاهیمی ابتدایی، مانند تکانه، ظاهر می‌شود [۳]. یک جنبه مهم نظریه آزمون، مسئله همزمانی است. هر نظریه آزمون باید بتواند نظریه‌های هم‌ارز را، صرف نظر از یک قرارداد همزمانی، دسته‌بندی کند. در غیر این صورت ممکن است نظریه‌هایی که از لحاظ فیزیکی هم‌ارزند به صورت نظریه‌های رقیب عنوان

^۱ Universal Coordinated Time

شوند [۵۴].

در این بخش ابتدا روش سنتی آزمون نسبیت خاص و نظریه آزمون رابرتسون [۶ و ۷] را مرور می‌کنیم. سپس نظریه آزمون مراجع [۸] تا [۱۰] را به صورتی فشرده فرمولبندی می‌کنیم و به بررسی تجربه‌ها در چارچوب این نظریه می‌پردازیم. همچنین نمونه‌هایی از نظریه‌های هم‌ارز را، صرف نظر از قرارداد همزمانی، ارائه می‌دهیم.



شکل ۱.۷: فضای پارامترها

روش سنتی آزمون نسبیت

هنگامی که مایکلسون و مورلی آزمایش مشهور خود [۱۱] را انجام می‌دادند، انتظار داشتند اثری متناسب با $(\frac{v}{c})^2$ مشاهده کنند، که در آن v از مرتبه سرعت زمین به دور خورشید فرض می‌شد. در چارچوب دقت این تجربه هیچ اثری مشاهده نشد. در این روش آزمون، که بعدها نیز معمول شد دقت تجربه بر حسب سرعت حرکت زمین در اتر، یا کشش اتر بیان می‌شود. دقت تجربه مایکلسون-مورلی $\frac{km}{s}$ بود. این روش آزمون مبتنی بر دو فرض است:

۱. چارچوب مرجع ممتاز Σ (چارچوب اتر) وجود دارد که نور در آن همسانگردانه سیر می‌کند.
۲. تبدیل گالیله میان چارچوب‌های لخت متحرک صادق است.

بر همین مبنا نتایج تجربه‌هایی که به منظور تعیین سرعت حرکت زمین در اتر صورت می‌گرفت، به طور سینماتیکی محاسبه و بر حسب توان‌های $\frac{v}{c}$ بیان می‌شدند. تجربه‌هایی که مسیرهای بسته نور را به کار می‌گیرند، مانند تجربه‌های مایکلسون-مورلی و نیز کندی-تورندایک^۲، نسبت به توان $(\frac{v}{c})^2$ حساس‌اند، و به همین دلیل آنها را تجربه‌های مرتبه دوم می‌نامند [۱۰]. در تجربه‌های زمینی که با استفاده از مسیر بسته نور انجام می‌شد انتظار هیچ اثر مرتبه اولی نمی‌رفت. تا اواخر دهه پنجاه میلادی مشکلات فنی مانع انجام تجربه‌هایی بود که در آنها مسیر نور باز است [۹]. با کشف اثر موسباوئر، لیزر، و میزردر حدود سال ۱۳۳۹ / ۱۹۶۰ این وضع تغییر کرد و انجام تجربه‌های جدید از حیث فنی ممکن شد. مولر [۱۲] در سال ۱۹۵۷ و رودرفر [۱۳] در سال ۱۹۶۰ این امکان را

^۲Kennedy-Thorndyke

متذکر شدند و اولین تحلیل نظری آن را ارائه دادند. این امر بازار توجه به تجربه‌های مرتبه اول را گرم کرد. در همین بخش تعبیری برای این تجربه‌ها ارائه خواهیم کرد.

تجربه‌هایی که اتساع زمان را، چه مستقیم و چه غیرمستقیم، از طریق اثر دوپلر مرتبه دوم اندازه می‌گیرند نمی‌توان به این طریق بررسی کرد. چون در این روش زمان مطلق شمرده می‌شود، مسئله همزمان کردن ساعت‌ها محلی از اعراب ندارد و ساعت‌های متحرک، مستقل از سرعتشان، همان زمان مطلق را نشان می‌دهند.

نظریه آزمون رابرتسون

رابرتسون اولین کسی بود که به تحلیل سینماتیک تجربه‌های مهم مرتبه دوم پرداخت [۶ و ۷]. او با قبول اصولی مانند همسانگردی و همگنی فضا و زمان از سه تجربه مرتبه دوم تبدیل لورنتز را به دست آورد. این سه تجربه، تجربه‌های مایکلسون-مورلی، کندی-تورندایک [۱۴] و آیوز-استیلول [۱۵] بودند. اما رابرتسون به بررسی همزمان کردن ساعت‌های دور پرداخت. به همین دلیل روش او را نمی‌توان برای تحلیل تجربه‌های مرتبه اول به کار برد.

رابرتسون فرض می‌کند که یک چارچوب مرجع ممتاز Σ وجود دارد که نور در آن همسانگردانه سیر می‌کند. آنگاه برای تبدیل از چارچوب Σ به چارچوب S ، که سرعتش نسبت به Σ برابر v است، روابط زیر را می‌نویسد

$$T = a_0 t + v a_1 x$$

$$X = a_1 x + v a_0 t$$

$$Y = a_2 y$$

$$Z = a_2 z$$

که در آن (T, X, Y, Z) و (t, x, y, z) به ترتیب مختصات در Σ و S اند. توابع a_0, a_1, a_2 را باید از روی تجربه‌های مایکلسون-مورلی، کندی-تورندایک و آیوز-استیلول تعیین کرد. تبدیل به گونه‌ای انتخاب شده است که ساعت‌های دور خود به خود به روش انیشتین هم‌زمان باشند، یعنی سرعت یکطرفه نور همسانگرد باشد. حالت کلی‌تر آن است که امکان انتخاب روش هم‌زمانی وجود داشته باشد. مثلاً باید بتوان یک روش هم‌زمانی انتقالی اختیار کرد که طبق آن ساعت‌های S همان زمانی را نشان دهند که یک ساعت متحرک با سرعت کم نشان می‌دهد.

نظریه آزمونی که در مرجع‌های [۸] تا [۱۰] پیشنهاد شده است، نقش هم‌زمان کردن ساعت‌های دور را دربر می‌گیرد، و به این طریق تعبیر تجربه‌های مرتبه اول را ممکن می‌سازد.

نظریه آزمون مرجع‌های ۸ تا ۱۰

این نظریه آزمون در متون نسبیت نظریه منصوری-سکسل و گاهی نیز نظریه آزمون رابرتسون-منصوری-سکسل نامیده می‌شود. برای طرح این نظریه آزمون فرض‌های زیراساسی‌اند:

۱. سرعت نور مستقل از حرکت چشمه است.
۲. دوروش هم‌زمانی انتقال آهسته ساعت (S_T) و اینشتین (S_E) در چارچوب مرجع Σ هم‌ارزند.
۳. هیچ جهت ممتازی در Σ وجود ندارد.

آنگاه با قبول خطی بودن تبدیل میان S, Σ و برخی فرض‌های معقول سینماتیکی به دست می‌آوریم [۸].

$$\begin{aligned}
 t &= a(v)T + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 z \\
 x &= b(v)(X - vT) \\
 y &= d(v)Y \\
 z &= d(v)Z
 \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن v ، سرعت S نسبت به Σ ، به موازات محور x انتخاب شده است. $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ یک پارامتر برداری و تابع v است. دوگانگی ای که در تبدیل t دیده می شود برای بحث نظریه آزمون ما حیاتی است. فلسفه این دوگانگی به شرح زیر است. هر ساعت را با آهنگ و قرائت آن مشخص می کنیم. آهنگ ساعت ها در S ، که مستقل از مکان آنهاست، از طریق ضرب $a(v)$ با آهنگ ساعت ها در Σ مرتبط می شود. اما قرائت هر ساعت در S در هر نقطه x را می توان طبق قراردادی تنظیم کرد. بنابراین اصولاً برای تعیین زمان ساعتی واقع در x باید یک تابع $f(x, v)$ به $a(v)T$ افزود. وابستگی f به v لازم است، زیرا این تابع می تواند از دستگاه به دستگاه تغییر کند. البته اگر تابع f ، به طور دلخواه انتخاب شود بی جهت پیچیدگی هایی به مسئله می افزاید. به همین علت f را تابعی خطی از x فرض می کنیم و می نویسیم $f(X, V) = \varepsilon(\vec{v}) \cdot X$. رابطه $\vec{\varepsilon}$ با v را می توان اینگونه استنتاج کرد که هیچ روش هم زمانی معقول فیزیکی نباید جهتی را ممتاز کند؛ و چون تنها جهت ممتاز در اختیار ما جهت v است، پس $\vec{\varepsilon}$ باید موازی \vec{v} باشد. پس $\vec{\varepsilon}$ را موازی $\vec{v} = (v, 0, 0)$ می گیریم:

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon(v), 0, 0) \tag{۲}$$

این انتخاب تبدیل (۱) را به صورت زیر در می آورد

$$\begin{aligned}
 t &= a_0 T + \varepsilon x \\
 x &= b(X - vT) \\
 y &= dY \\
 z &= dZ
 \end{aligned} \tag{۳}$$

تابع $\varepsilon(v)$ به قرارداد هم زمانی بستگی دارد. در صورتی که اگر در (۱) در سمت راست تبدیل t به جای x ، X را انتخاب کرده بودیم آنگاه ε را نمی توانستیم تنها بر مبنای یک قرارداد تعیین کنیم.

پس از آن که ε بر مبنای قرارداد هم زمانی تعیین شد، می توان به وسیله سه تجربه مستقل توابع a, b, d را تعیین کرد. محاسبه ε برای موردی که ساعت ها طبق روش انیشتین هم زمان شوند آسان است. نتیجه می شود

$$\varepsilon_E = -\frac{a \cdot v}{b(1 - v^2)} \tag{۴}$$

محاسبه ε برای روش دیگر هم زمان کردن، از طریق انتقال آهسته ساعت ها، حوصله بیشتری می خواهد. در این مورد نتیجه می شود [۸]

$$\varepsilon_T = \frac{1}{b} \cdot \frac{da}{dv} \tag{۵}$$

واضح است که این دو روش عموماً متفاوتند. هم ارزی این دو روش نه بدیهی است و نه الزام منطقی دارد.

اگر بخواهیم ε_E و ε_T برابر باشند باید داشته باشیم

$$a(v) = (1 - v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

که دقیقاً میزان اتساع زمان نسبیتی است. توجه کنید که این نتیجه مستقل از مقدار b و d به دست آمده است. پس چنانچه می بینیم صرفاً با مقایسه این دو نوع روش هم زمانی، می توان $a(v)$ را تعیین کرد.

حالا می پردازیم به سرعت نور در دستگاه S . با تبدیل مخروط نور $X^2 - T^2 = 0$ به دستگاه S ، سرعت پرتوی نوری را که تحت زاویه θ با محور x منتشر می شود به دست می آوریم

$$c(\theta) = \frac{\varepsilon \cdot b(1 - v^2)\cos\theta - a[\cos^2\theta + b^2 d^2(1 - v^2)\sin^2\theta]}{\cos^2\theta(\varepsilon^2 b - \varepsilon^2 b \cdot v - \frac{a^2}{b} + 2\varepsilon v a) - \sin^2\theta(d^2 b a^2)} \quad (7)$$

برای این که بتوان اثرهایی را که محاسبه می شود با تجربه مقایسه کرد، باید توابع a ، b ، و d را بر حسب توان های v بسط داد

$$\begin{aligned} a(v) &= 1 + \alpha v^2 + \dots \\ b(v) &= 1 + \beta v^2 + \dots \\ d(v) &= 1 + \delta v^2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

اکنون می توان اثرهای گوناگون را محاسبه و تجربه ها را رده بندی کرد.

الف) اثرهای مرتبه اول، ناشی از هم زمان کردن ساعت های دور به روش انتقال است؛ در این مورد تا مرتبه اول v داریم

$$\begin{aligned} a &\simeq b \simeq d \simeq 1 \\ \varepsilon_T &= \frac{a'}{b} = 2\alpha \cdot v \end{aligned}$$

و برای سرعت نور تا مرتبه اول به دست می آوریم

$$c(\theta) = 1 - (1 + 2\alpha)v \cdot \cos\theta \quad (9)$$

پس در این شرایط، سرعت یک طرفه نور یک کمیت اندازه پذیر می شود و اگر $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ باشد این سرعت بستگی به جهت دارد. به کمک دو ساعت اتمی که در یک نقطه فضا هم زمان و سپس جدا می شوند می توان سرعت یک طرفه نور را اندازه گرفت. در واقع در شبکه دقیق جهانی ساعت ها از همین روش هم زمانی استفاده می شود. ساعت هایی که از آنها در UCT (زمان جهانی هماهنگ شده) استفاده می شود به روش اینشتین با ارسال سیگنال های رادیویی هم زمان می شوند و سپس به کمک انتقال ساعت این هم زمانی تحقیق می شود. تا دقت 10^{-8} ثانیه هیچ گونه تأثیر حرکت زمین یا منظومه شمسی روی مقایسه دو نوع هم زمانی دیده نشده است [۱۶]. چون سروکارمان با تاخیرهایی از مرتبه $3 \times 10^{-6} s$ است، پس داریم

$$(1 + 2\alpha)v \leq 3 \times 10^{-6}$$

که در چارچوب تعبیر سنتی متناظر است با سرعتی حد اکثر برابر $10 \frac{km}{s}$ برای حرکت زمین در اتر. اما زمین با سرعتی حدود $30 \frac{km}{s}$ در تابش زمینه کیهانی حرکت می کند. اگر همین سرعت را، نسبت به دستگاه مرجع بگیریم، به دست می آوریم

$$\alpha = -\frac{1}{2} \pm 2 \times 10^{-3}$$

تحلیل تجربه رومر، یعنی تعیین سرعت نور از روی گرفتگی قمرهای مشتری، نشان می دهد که فقدان هرگونه بی نظمی در گرفتگی این قمرها تا دقت $\Delta t = 0/1 s$ به معنی $\alpha = -\frac{1}{2} \pm 2 \times 10^{-3}$ است [۸].

تجربه‌های چرخه‌ای مبتنی بر اثر موسباوئر [۱۷ و ۱۸] و نیز تجربه‌های مبتنی بر تکنیک جدید طیف نگاری دو فوتونه، در واقع انواع جدید همان تجربه رومرند، و دقیق‌ترین آزمون نسبیت خاص به حساب می‌آیند. مثلاً از تجربه آیساک [۱۸] نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\alpha = -\frac{1}{c} \pm 10^{-7}$$

تمام این تجربه‌ها را می‌توان بر حسب کشش اتر، یا با فرض هم‌زمانی انتقالی بر حسب ناهمسانگردی در سرعت یک طرفه نور تعبیر کرد. جدول ۱ خلاصه تجربه‌های گوناگون و دقت آنها بر حسب تعبیرهای مختلف است. (ب) سرعت میانگین (دو طرفه) نور مستقل از ε و برابر است با

$$c(\theta) = \frac{b(1-v^2)}{a[\cos^2\theta + b^2 d^2(1-v^2)\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

اگر هم‌زمانی اینشتین را بپذیریم، همین عبارت را می‌توان از (۷) به دست آورد. می‌بینیم که سرعت نور، در حالت کلی، هم به θ و هم به v بستگی دارد. اثرهایی که در تجربه‌های مایکلسون-مورلی و کندی-تورندایک اندازه گرفته می‌شوند متناسب با $\frac{1}{c}$ پس با استفاده از (۱۰)، $\frac{1}{c}$ را بسط می‌دهیم

$$\frac{1}{c(\theta, v)} = 1 + (\beta + \delta - \frac{1}{c})v^2 \sin^2\theta + (\alpha - \beta + 1)v^2 \quad (11)$$

اگر v را ثابت بگیریم، وردش این کمیت بر حسب θ عبارت است از

$$\delta_{\theta} \frac{1}{c(\theta, v)} = 2(\beta + \delta - \frac{1}{c})v^2 \cos^2\theta$$

در تجربه‌هایی مانند تجربه مایکلسون-مورلی که همسانگردی انتشار نور را تحقیق می‌کنند، دقیقاً این جمله اندازه‌گیری می‌شود. دقیق‌ترین آزمون همسانگردی، متعلق به بریله و هال [۲۰] است که حد بالایی برابر با $2/5 \times 10^{-9}$ برای $\beta + \delta - \frac{1}{c}$ به دست می‌دهد. در جدول ۲ چند تجربه که همسانگردی انتشار نور را تحقیق می‌کنند همراه با دقت آنها بر مبنای تعبیرهای مختلف فهرست شده‌است. در مورد اهمیت تجربه [سن و تعبیرهای دیگر تجربه مایکلسون می‌توانید به مرجع [۱۰] رجوع کنید.

هرگاه انتشار نور را همسانگرد بگیریم، می‌توانیم وردش $\frac{1}{c}$ را بر حسب v حساب کنیم $\delta_v \frac{1}{c(v)} = 2(\alpha - \beta + 1)v\delta v$ برای تحقیق این اثر دو چارچوب مرجع با اختلاف سرعت δv برای مقایسه لازم است. حرکت مداری زمین این تغییر سرعت را مهیا می‌کند. تجربه کندی-تورندایک بر همین مبنا استوار است. بنا بر این تجربه [۱۴] داریم $2 \pm 10^{-5} \frac{km}{s}$ یا $\alpha - \beta + 1 = 10 \pm 2 \times 10^{-2}$ با دقت زیادی تعیین شده‌است. پس این تجربه، β یا انقباض طول را تحقیق می‌کند. بنابراین بر مبنای این تجربه باید گفت که دقت تحقیق انقباض طول بسیار کم است. انجام این تجربه بسیار مشکل است زیرا لازم است پایداری به مدت چندین ماه حفظ شود. خوشبختانه این تجربه به روش نوین بالیزر تکرار شده‌است [۲۶]. نتایج این تجربه که گروهی به سرپرستی جان هال در دفتر ملی استانداردهای آمریکا انجام داده‌اند عبارت است از $[\alpha = -(\frac{1}{c}) \pm 1 \times 10^{-7}]$

$$\begin{aligned} \beta - \alpha - 1 &< 6.6 \times 10^{-5} \\ \beta &= \frac{1}{c} \pm 7 \times 10^{-5} \\ \delta &= 0 \pm 7 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

جدول ۱. تجربه‌های مرتبه‌اول و تعبیرهای گوناگون آن.

تجربه	کشش اثر	$\alpha + \frac{1}{\gamma}$
رومر (۱۶۷۶)	$10 \frac{km}{s}$	2×10^{-2}
UCT	$10 \frac{km}{s}$	2×10^{-2}
جامپانی و همکاران (۱۹۶۳) [۱۷]	$1/6 \pm 2/8 \frac{m}{s}$	10^{-5}
آیساک (۱۹۷۰)	$5 \frac{cm}{s}$	10^{-7}
ریس و همکاران (۱۹۸۸) [۱۹]	$50 \frac{cm}{s}$	10^{-6}

جدول ۲. تجربه‌های مایکلسون-مورلی گونه و تعبیرهای گوناگون آنها.

تجربه	کشش اثر	$\beta + \delta - \frac{1}{\gamma}$
مایکلسون-مورلی (۱۸۸۷)	$10 \frac{km}{s}$	10^{-3}
یوس (۱۹۳۰)	$1 \frac{km}{s}$	3×10^{-5}
اسن (۱۹۵۵)	$4 \frac{km}{s}$	10^{-4}
یاسیا و همکاران (۱۹۶۴)	$1 \frac{km}{s}$	10^{-5}
بریله و هال (۱۹۷۹)	$2 \frac{m}{s}$	$2/5 \times 10^{-9}$

نظریه آزمون روی زمین چرخان

به هنگام تعبیر تجربه‌های زمینی از طریق نظریه آزمون تا کنون از چرخش زمین صرف نظر کردیم. چرخش زمین به معنی نالخت بودن دستگاه مرجع ناظر است. پس این سؤال مطرح می‌شود که نتایج بالا تا چه حد برای دستگاه‌های نالخت تعمیم پذیر است. به لحاظ پیچیدگی دستگاه‌های نالخت، مورد ساده هم‌زمان کردن روی دیسک چرخان مطرح می‌شود. به این ترتیب می‌توان نظریه آزمونی برای تجربه‌های مرتبه اول روی زمین با احتساب چرخش زمین به دست داد. مهم‌ترین سؤالی که ابتدا مطرح می‌شود این است که اگر صحت نسبیت خاص مفروض باشد، آیا باز هم هم‌زمانی انیشتین و هم‌زمانی انتقالی روی یک میز چرخان هم‌ارزند؟ جواب این سؤال مثبت است [۲۴]. سؤال بعدی این است که نظریه‌های رقیب نسبیت خاص در مورد این هم‌ارزی چه می‌گویند؟ این سؤال را می‌توان در چارچوب نظریه آزمون برای دستگاه‌های نالخت بررسی کرد. این بررسی‌ها نیز انجام شده است [۲۴ و ۲۵]. نتایج نشان می‌دهد تحقیق هم‌ارزی این دو نوع هم‌زمانی به کمک آزمون‌های مرتبه اول ممکن است. از جمله برای اختلاف زمان میان این دو نوع هم‌زمان کردن ساعت‌ها مقدار

$$\delta = (1 + 2\alpha)(1 + \frac{v \cdot w}{v^2}) \cdot v \cdot r \Delta\phi$$

به دست می‌آید که در آن v سرعت مرکز زمین نسبت به دستگاه ممتاز فرضی (اثر)، w سرعت چرخش روی سطح زمین، r فاصله از مرکز زمین، و $\Delta\phi$ زاویه‌ای است که ساعت منتقل شده طی می‌کند [۲۴].

هم‌زمانی و نظریه‌های هم‌ارز

دیدیم که هر نظریه فیزیکی فضا-زمان را می‌توان با سه پارامتر مشخص کرد. پارامتر چهارم، ϵ را می‌توان با قرارداد برگزید. مثلاً اگر برای a, b و d مقادیر نسبیت خاصی را بگیریم و برای ϵ بنشانیم $\epsilon = 0$ ، به دست می‌آوریم

$$t = \sqrt{1 - v^2} T$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} (X - vT)$$

نظریه فضا-زمان مبتنی بر این تبدیل هم‌ارز است با نسبیت خاص.

مثال غیر بديهی دیگر، نظریه‌ای است با عنوان ناوردایی شکسته لورنتز [۴]. این نظریه، که ظاهراً خواص غریبی دارد، چیزی نیست جز نسبیت خاص با یک قرارداد هم‌زمانی دیگر. تبدیلی که مؤلف در نظر می‌گیرد چنین است

$$\begin{aligned} t &= \Gamma[T - (v - \frac{e}{v})X] \\ x &= \Gamma[X - vT] \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن $e(v)$ تابعی دلخواه از v است و

$$\Gamma(v) = [1 - v^2 + e(v)]^{-\frac{1}{2}}$$

این تبدیل را به صورت (۳) در می‌آوریم تا نقش هر یک از ضریب‌ها مشخص شود

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\Gamma} \cdot T + \frac{e - v^2}{v} \cdot x \\ x &= \Gamma[X - vT] \end{aligned} \quad (13)$$

پس، این تبدیل هم‌ارز است با

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Gamma} , \quad b = \Gamma \\ \varepsilon &= \frac{e - v^2}{v} , \quad d = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

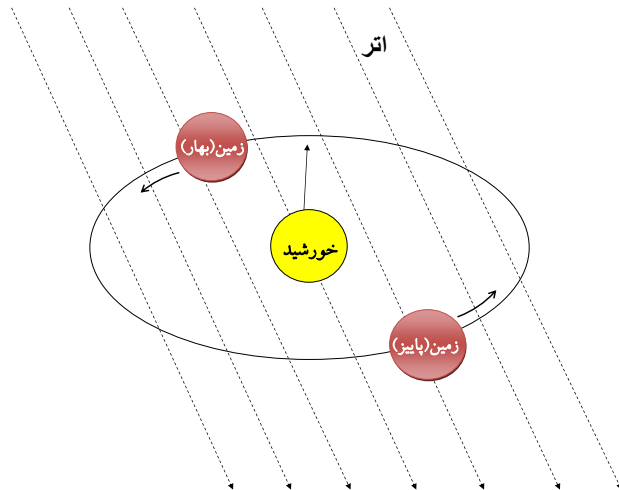
تابع نامشخص $e(v)$ دلخواه بودن قرارداد هم‌زمانی را می‌رساند. اگر هم‌زمانی اینشتین را فرض کنیم، از معادله‌های (۱۳) و (۱۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ \varepsilon &= -v \\ \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned}$$

پس می‌بینیم که این نظریه، تا آنجا که به اثرهای مشاهده پذیر مربوط است، هم‌ارز است با نسبیت خاص. نظریهٔ آزمون چهار پارامتری نسبیت خاص روش قدرتمندی به دست می‌دهد برای تعبیر تجربه‌ها و شناسایی نظریه‌هایی که، صرف نظر از یک قرارداد، هم‌ارزند. تجربه‌های مرتبهٔ اول ناهمسانگردی سرعت یک طرفهٔ نور را با استفاده از هم‌زمانی انتقالی تحقیق می‌کنند. تجربه‌های مرتبهٔ دوم به دو دسته تقسیم می‌شوند: تجربه‌های مایکلسون-مورلی گونه و تجربه‌های کندی-تورندایک گونه. تجربه‌های دستهٔ اول ناهمسانگردی سرعت (متوسط) نور را تحقیق می‌کنند و تجربه‌های دستهٔ دوم استقلال سرعت نور را از دستگاه آزمایشگاه.

۲.۷ مرور آزمون‌های نسبیت خاص

در اینجا می‌خواهیم به طور خلاصه به توضیح آزمایش‌هایی که برای تحقیق در اعتبار نسبیت خاص انجام شده‌اند، بپردازیم. ابتدا یک اشاره! همان طور که در بخش‌های دیگر کتاب هم دیده‌اید، نسبیت خاص کاربردهای متفاوتی دارد. هر جا که از این نظریه استفاده شود آزمونی برای صحت آن انجام شده است. این موضوع خصوصاً در محدودهٔ دینامیک نسبیتی درست است: آزمایش‌های حوزهٔ



شکل ۲۰۷:

ذرات بنیادی به ویژه درشتابگرهای ذرات، مصداق‌های انرژی هسته‌ای شامل انرژی حاصل از فرایندهای شکاف و همجوشی همگی آزمون‌هایی از نسبیت خاص‌اند. با این حال منظور ما این نوع تایید تجربی نیست بلکه آزمون‌هایی است که به طور خاص و به منظور بررسی اعتبار نسبیت طراحی و اجرا شده‌اند.

دیگر این که همه آزمایش‌هایی که به منظور تعیین اعتبار نسبیت انجام می‌شوند در دو گروه قرار می‌گیرند: (۱) آزمایش‌هایی که بر اساس پدیدهٔ اتساع زمان انجام می‌شوند. (۲) آزمایش‌هایی که در آنها ترکیبی از پدیدهٔ اتساع زمان، انقباض طول و احیاناً هم‌زمانی در تعیین نتیجه دخالت دارند.

خوب است به این نکته توجه شود که در هیچ آزمونی، انقباض طول به تنهایی مورد آزمایش قرار نمی‌گیرد. از سوی دیگر نخستین گروه آزمون‌هایی که راجع به آنها صحبت می‌کنیم عمدتاً تا پیش از ارائهٔ نسبیت و برای کشف خواص اتر انجام شده‌اند.

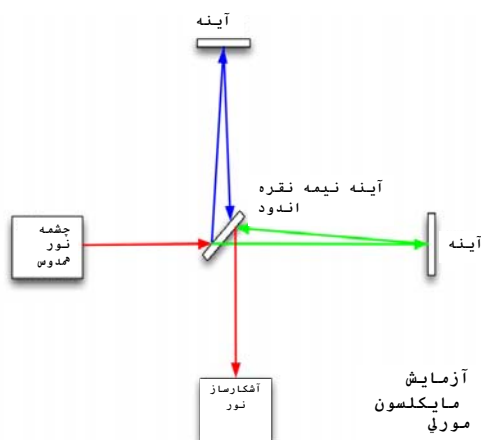
۱.۲.۷ آزمون‌های کشف اتر

با توجه به اینکه پیش از ارائهٔ نسبیت توسط اینشتین فرض وجود اتر به عنوان محیطی مادی برای انتقال امواج الکترومغناطیسی مورد پذیرش فیزیکدانان بوده است آزمایش‌های متعددی برای تعیین خواص آن و از جمله تأثیر حرکت زمین در اتر پیشنهاد شده بود که همگی قبل از ۱۹۰۵/۱۲۸۴ مطرح شده‌اند. ولی به هر حال بی نتیجه بودن این آزمایش‌ها (به معنای عدم توفیق در کشف حرکت نسبت به اتر) به معنای تایید تجربی نسبیت، که وجود چارچوب مرجع ممتاز را نفی می‌کند، به حساب می‌آید.

آزمایش مایکلسون-مورلی

این آزمایش، که در سال ۱۸۸۷/۱۲۶۶ به وسیلهٔ آلبرت مایکلسون و ادوارد مورلی فیزیکدانان آمریکایی انجام گرفت، شاید مشهورترین آزمایش فیزیکی باشد که با شکست مواجه شده است. ابزار مورد استفاده در این آزمایش یک تداخل سنج با دو بازوی عمود بر هم است و طوری طراحی شده است که بتواند اثر حرکت زمین نسبت به اتر را آشکار کند (شکل‌های ۲۰۷ و ۳۰۷). راجع به این آزمایش و نتایج منفی حاصل از آن و همین‌طور این موضوع که آیا اینشتین قبل از ارائهٔ نسبیت خاص از نتیجهٔ آن اطلاع داشته

است یا نه، بحث‌های مفصلی در کتاب‌ها و مقالات متفاوت انجام گرفته است.



شکل ۳.۷:

آزمایش مایکلسون-مورلی بعداً تکرار شده و هر بار نیز نتیجه قبلی اخذ شده است: هیچ گونه اثری از حرکت زمین نسبت به اتر در این آزمایش قابل مشاهده نیست. هر بار آزمایش نسبت به دفعات قبل با دقت بیشتری انجام گرفته و اخیراً با استفاده از منابع نوری دقیق‌تر مانند لیزر تکرار شده است (شکل ۴.۷).

آزمایش تراتون-نوبل و تراتون-رانکین

این آزمایش‌ها نیز بر اساس پیشنهادی از فیتز جرال د فیزیکدان ایرلندی و برای آشکارسازی حرکت زمین نسبت به اتر در سال‌های ۱۹۰۱، ۱۹۰۳ و ۱۹۰۸ انجام گرفته است. در آزمایش تراتون-نوبل اثر حرکت زمین در اتر بر جهت گیری یک خازن باردار که توسط یک رشته باریک آویزان شده است اندازه‌گیری می‌شود و در آزمایش تراتون-رانکین اثر حرکت زمین نسبت به اتر بر روی مقاومت یک سیم. نتیجه این آزمایش‌ها نیز هیچ اثری از اتر را آشکار نکرد.



شکل ۴.۷:

آزمایش هامار

این آزمایش در سال ۱۹۳۵ به وسیله گوستاو ویلهلم هامار انجام شد و در واقع انجام مجدد آزمایش مایکلسون-مورلی است با یک تغییر. تغییر انجام شده این بود که هاماریکی از بازوهای تداخل سنج مایکلسون-مورلی را در مسیری بین دو مکعب بسیار بزرگ از سرب قرار داد تا اثر کشیده شدن باد اتری به همراه زمین را در نظر بگیرد. باز هم نتیجه منفی از آزمایش گرفته شد.

۲.۲.۷ آزمون اثراتساع زمان

آزمون‌های این بخش همگی طوری طراحی شده‌اند که پدیده‌های مشاهده شده در آنها به طور مستقیم نشان دهنده اثراتساع زمان باشند. کلیه آزمایش‌ها سالها بعد از ارائه نسبت خاص طرح و اجرا شده‌اند.

آزمایش کندی-تورندایک

این آزمایش در سال‌های ۱۹۲۹-۳۲ انجام شده و حاصل چند سال تلاش کندی و تورندایک برای آزمایش اتساع زمان است. دستگاه مورد استفاده در این آزمایش همان تداخل سنج مایکلسون-مورلی است که یکی از بازوهای آن بسیار کوتاه‌تر از دیگری است و مدت آزمایش چندین ماه است. نتیجه آزمایش تایید کامل اتساع زمان نسبیتی است.

آزمایش آیوز-استیل ول

در ۱۹۳۸ آیوز و استیل ول خطوط طیفی $H\beta$ سری بالمر مربوط به اتم‌های هیدروژن به شکل باریکه‌هایی با سرعت زیاد را بررسی کردند. مشاهده در دو زاویه 0° و π نسبت به باریکه انجام گرفت و با دقت قابل قبولی فرمول اثر دوپلر نسبیتی را که ناشی از اتساع زمان است تایید کرد. همین آزمایش در سال ۱۹۷۳ و با مشاهده تابش ناشی از گذارهای هسته‌ای Ne^{20} انجام شد و مجدداً رابطه دوپلر نسبیتی تایید شد. بعد از آن نیز تا سال‌های دهه ۱۹۹۰ همین آزمایش با استفاده از طیف سنجی لیزری و میزهای قابل تنظیم چند بار تکرار شده و همان نتیجه به دست آمده است.

زمان واپاشی برای میون‌ها و پیون‌های نسبیتی

در اثر برخورد پرتوهای کیهانی با لایه‌های بالای جو زمین، ذرات ناپایداری به نام میون تشکیل می‌شوند که مسیر خود را به طرف زمین ادامه می‌دهند. نیمه عمر هر ذره یک کمیت ذاتی مربوط به آن است و نشان می‌دهد اگر در یک لحظه تعداد N عدد از این ذره را داشته باشیم، چه مدت طول می‌کشد تا در اثر واپاشی، تعداد آنها به $\frac{N}{2}$ برسد. این کمیت ذاتی در چارچوب سکون هر ذره تعریف می‌شود و در نتیجه از دید ناظرهای دیگر مقدار متفاوتی است. از طرف دیگر احتمال واپاشی در هر ارتفاعی از سطح زمین کمیتی قابل اندازه گیری است و مقدار آن مرتبط است با اتساع زمان برای ناظرهای روی زمین. در ۱۹۴۱ روسی و هال برای میون‌های تولید شده در جو این آزمون را انجام دادند و مستقیماً پدیده اتساع زمان را تایید کردند. همین پدیده در یکی از شتابگرهای سرن (مرکز تحقیقات فیزیک ذرات بنیادی اروپا) با میون‌هایی با سرعت $v = 0.9994c$ بررسی شد و با دقت 0.01% درصد اتساع زمان نسبیتی تایید شد.

آزمایش هافله و کیتینگ

در سال ۱۹۷۱ این آزمایش برای بررسی اثراتساع زمان بر روی ساعت‌هایی که مستقیماً در حرکت بودند انجام گرفت. سه ساعت اتمی مشابه در این آزمایش به کار گرفته شدند. یکی در روی زمین باقی ماند و دو تای دیگر به وسیله هواپیماهایی که یک بار دور

کره زمین چرخیدند حمل شد. یکی از هواپیماها به سمت شرق و دیگری به سمت غرب حرکت کرد. با احتساب اثرهای نسبیت عامی دیده شد ساعتی که به طرف شرق حرکت کرده است نسبت به ساعت روی زمین مقدار $1 \pm 59 \text{ ns}$ عقب مانده و ساعتی که به طرف غرب حرکت کرده $7 \pm 273 \text{ ns}$ جلو افتاده است. نسبیت عقب ماندگی $23 \pm 40 \text{ ns}$ برای ساعت به سمت شرق و جلو افتادگی $21 \pm 275 \text{ ns}$ برای ساعت به سمت غرب پیش گویی می کند.

آزمایش های اخیر

پس از ساخت حلقه انباره یون های سنگین در دهه ۱۹۸۰، فیزیکدانان موفق شدند باریکه هایی از یون های سنگین بسیار سریع با سرعت $v > 0.1c$ تولید کنند. با استفاده از چنین یون هایی توانستند اثرهای نسبیتی را با دقت زیاد اندازه گیری کنند. یکی از پروژه هایی که در این زمینه طراحی و اجرا شد در موسسه ماکس پلانک برای فیزیک هسته ای در هایدلبرگ آلمان بود. نخستین آزمایش از این نوع در فاصله سال های ۹۴-۱۹۹۰ در این موسسه و دومین آزمون در فاصله ۰۵-۲۰۰۰ انجام گرفته است. در این آزمایش ها، مجدداً اثر دوپلر برای گذاریون های نسبیتی به وسیله طیف سنجی لیزری شدند و با دقت بسیار زیاد رابطه نسبیتی که ناشی از اتساع زمان است تایید کردند.

گروه هایی در آزمایشگاه های دیگر ذرات بنیادی به دنبال انجام همین آزمایش روی یون های سنگین با سرعت های به مراتب بالاتر هستند. از سوی دیگر پیشنهاد هایی برای انجام آزمون های اتساع زمان در ماهواره ها وجود دارد. یکی از جالب ترین آنها آزمایش *OPTIS* است که متشکل از سه کاواک برای آزمون های مایکلسون-مورلی و کندی-تورندایک، سه لیزر، و سه ساعت اتمی است. پیش بینی می شود در صورت تکمیل و انجام این آزمایش ها بتوان برای به دست آوردن دقت های بالاتر از ترکیبی از نتایج آزمایش های خارج از زمین و آزمایش های حلقه انباره استفاده کرد.

۳.۷ کاربردها

۱.۳.۷ سیستم مکان یابی جهانی (GPS)

این سیستم به کلیه کاربرانش امکان می دهد تا بتوانند در هر نقطه از زمین مکان، سرعت، و زمان را اندازه گیری کنند. کل این سیستم از سه بخش ساخته شده است: قسمت فضایی، قسمت کنترل، و قسمت کاربر.

قسمت فضایی شامل ۲۴ ماهواره است که هر کدام یک ساعت اتمی حمل می کنند. هر چهار عدد از ماهواره ها در یک صفحه مدار ی قرار دارند که با صفحه استوای زمین زاویه ۵۵ درجه می سازد. این شش صفحه مداری طوری توزیع شده اند که از دید هر ناظر زمینی همیشه بیشتر از چهار عدد از ماهواره ها بالای افق قرار داشته باشند. ساعت های داخل ماهواره ها به طور منظم سیگنال هایی ارسال می کنند. اگر ارسال هر سیگنال را یک رویداد فضازمانی در نظر بگیریم، به همراه سیگنال پیغامی وجود دارد که مختصات فضایی و زمانی ارسال را معین می کند. اطلاعات دیگری هم در سیگنال ها وجود دارد شامل کاتالوگی از محل کلیه ماهواره ها، اطلاعات راجع به سلامت سیستم حرکتی ماهواره، و اطلاعاتی که به وسیله آنها می توان زمان جهانی ثبت شده توسط رصدخانه نیروی دریایی آمریکا را به دست آورد.

قسمت کنترل شامل تعدادی ایستگاه نظارت زمینی است که به طور پیوسته اطلاعات را از ماهواره ها دریافت می کنند. داده ها سپس به ایستگاه اصلی کنترل منتقل شده و پس از انجام محاسبات به ماهواره ها برگردانده می شوند تا مورد استفاده کاربران قرار گیرند. قسمت کاربر هم متشکل از کلیه کاربرانی است که با استفاده از سیگنال های دریافتی از ماهواره ها می توانند مکان و سرعت و زمان را به دست آورند.

مبنای کار *GPS* بر وجود ساعت های سزومی فوق العاده دقیق و پایدار استوار است. برای مثال اگر چنین ساعتی را روشن کنیم پس از گذشت یک روز، مقدار خطای نسبی $10^{-14} \times 5$ ، یا ۴ نانوثانیه خواهد بود. چنین دقتی منجر به اندازه گیری مکان با دقت

سانتی متر می شود.

محاسبه مکان و زمان با استفاده از GPS بر اساس یک روش ساده انجام می پذیرد. فرض کنید چهار ساعت اتمی هم زمان شده، تپ های بسیار دقیقی را از مکان های r_j در زمان های t_j ارسال کنند که $j = 1, 2, 3, 4$. حالا فرض کنید این چهار سیگنال به طور هم زمان در زمان t در مکان r دریافت شوند. با توجه به ثابت بودن سرعت نور می توانیم بنویسیم

$$c^2(t - t_j)^2 = |r - r_j|^2, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (15)$$

با حل این چهار معادله هم زمان می توان مختصات r و t ناظر را به دست آورد. با وجود اینکه سرعت ماهواره ها نسبت به سرعت نور و همچنین میدان گرانشی زمین کوچک است اما به علت دقت بسیار زیاد، نمی توان از اثرات نسبیتی چشم پوشی کرد. برای مثال خطایی از مرتبه نانو ثانیه معادل با خطایی از مرتبه 30° سانتی متر در مکان خواهد بود. اثراتی که در محدوده نسبت قرار دارند عمدتاً شامل انتقال دوپلری مرتبه اول و دوم در بسامد ساعت های اتمی به خاطر حرکت نسبی آنها، انتقال بسامد گرانشی (ناشی از تصحیحات نسبیت عام)، و تصحیح ناشی از چرخش زمین است. در نظر نگرفتن این اثرهای نسبیتی باعث می شود نتایج GPS دقت کافی نداشته باشند.

۲.۳.۷ شتابگر ذرات

شتابگرهای ذرات مجموعه ابزار و دستگاه هایی هستند که برای تولید باریک های ذرات پر انرژی طراحی می شوند. از این ذرات تولید شده در شتابگرها در آزمایش های برخورد یا پراکندگی استفاده می شود تا بتوان ساختار ماده را در ریزترین ابعاد کشف کرد. چالش عمده در این دستگاه ها ایجاد یک نیروی پیوسته برای اعمال به باریک ذرات است تا بتوان آنها را به انرژی دلخواه رساند. شتابگرهای اولیه از میدان های الکتریکی ایستا استفاده می کردند و به خاطر رخ دادن شکست الکتریکی به انرژی های در حدود چند MeV محدود می شدند. در نسل بعدی شتابگرها برای افزایش انرژی قابل دسترس از میدان الکتریکی ناشی از جریان متناوب استفاده شد. دستگاه های این نسل از دو نوع دایره ای (cyclotron) و خطی تشکیل می شوند. سیکلوترون متشکل از دو محفظه نیم دایره ای به شکل حرف D است که با هم فاصله کمی دارند. در این فاصله یک میدان الکتریکی متناوب برقرار است و ذرات حین چرخش در دایره، هر بار هنگام عبور از این فاصله شتاب می گیرند. یک میدان مغناطیسی یکنواخت و بسیار قوی نیز ذرات باریک را در مسیر دایره ای نگه می دارد. در سرعت های کم دوره تناوب حرکت تقریباً ثابت است اما با افزایش سرعت و ظاهر شدن اثرهای نسبیتی دوره تناوب و شعاع چرخش در هر دور تغییر می کند که باعث می شود حرکت ذره از همفازی با میدان الکتریکی خارج شود؛ نتیجه این که شتابگرهای دایره ای را نمی شد برای انرژی های زیاد به کار برد. اما شتابگرهای خطی که ذرات را در یک مسیر خطی شتاب می دادند این مشکل را نداشتند. از سوی دیگر این دستگاه ها مشکلات فنی دیگری مانند نیاز به مسیرهای بسیار طولانی داشتند که نهایتاً باعث عدم دستیابی به انرژی های زیاد برای ذرات می شد.

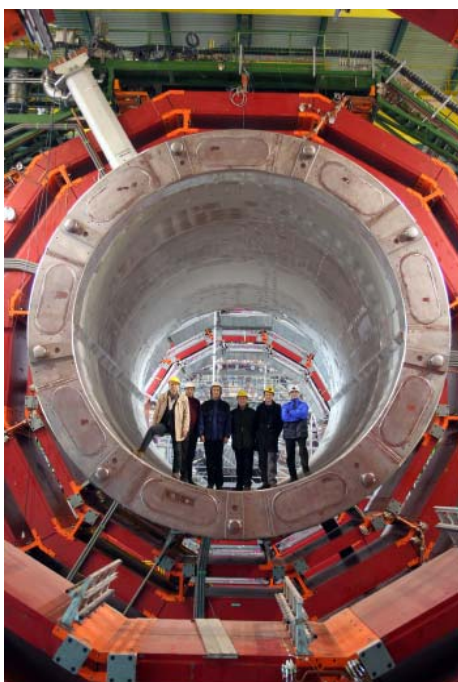
در سال ۱۹۳۹ با اختراع لامپ کلاسترون که یک منبع میکرو موج با توان بسیار زیاد بود، در فناوری ساخت شتابگرها پیشرفت قابل توجهی رخ داد. از آن به بعد به جای استفاده از میدان الکتریکی متناوب، از یک میکرو موج رونده برای شتاب دادن به ذرات استفاده شد. در این طرح جدید میدان الکتریکی میکرو موج همراه با ذرات حرکت می کند و در نتیجه تا زمانی که میکرو موج با ذرات همفاز باقی بماند می تواند نیروی پیوسته بر ذره وارد کند. استفاده از این فناوری باعث ساخته شدن اولین شتابگر خطی به طول ۱ متر در دانشگاه استنفورد در سال ۱۹۴۷ به نام MARK I شد که ذرات را تا ۶ MeV شتاب می داد و طی چند دهه منجر به ساخت شتابگر خطی استنفورد به نام SLAC شد که با طول ۳ km می تواند ذرات را تا ۵۰ GeV شتاب دهد.

در حال حاضر رسیدن به محدوده انرژی TeV در شتابگرها یکی از اهداف مستقیم فیزیکدانان به شمار می رود. برای اینکه در یک شتابگر خطی بتوان الکترون ها را تا این انرژی شتاب داد، با فناوری فعلی نیاز به ساختاری با طول ۴۰-۳۰ km داریم که برق مصرفی آن در حدود ۲۰۰ MW و هزینه ساخت آن بسیار زیاد است. اما برای این منظور می توان از شتابگرهای دایره ای مانند تواترون در دانشگاه شیکاگو یا برخورد دهنده بزرگ هادرون (LHC) در سرن استفاده کرد. مزیت این نوع شتابگرها در این است که

باریکه ذرات می‌تواند در هنگام شتاب گرفتن، صدها یا هزاران بار محفظه شتابگر را دور بزند و در نتیجه فاصله کافی برای شتاب گرفتن در دسترس است. اما نکته دیگری در اینجا اهمیت می‌یابد: ذره باردار که در حرکت دورانی است به علت شتابدار بودن، تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کند که به آن تابش سینکروترون گفته می‌شود. این تابش باعث می‌شود که در هر دور مقداری از انرژی ذره تلف شود. مسئله مهم اینجا است که در حرکت دایره‌ای با افزایش انرژی جنبشی ذره، شتاب آن نیز بیشتر می‌شود که خود باعث اتلاف بیشتر انرژی است.

حاشیه: شتابگرها

برخورد دهنده بزرگ هادرون LHC



این ماشین در یک تونل دایره‌ای به محیط ۲۷ کیلومتر در عمق ۵۰ تا ۱۷۵ متر زیر زمین ساخته شده است. نیمی از تونل در خاک سوئیس و نیمی دیگر در خاک فرانسه قرار دارد. LHC برای برخورد دادن دو باریکه از پروتون‌ها و پیون‌های سنگین که در دو جهت مخالف در چرخش دور دایره هستند طراحی شده است. پیش بینی می‌شود که برخورد پروتون-پروتون برای هر باریکه دارای انرژی ۷ TeV باشد. باریکه‌ها توسط آهنرباهای بسیار قوی منحرف می‌شوند تا بتوانند درون تونل دایره‌ای حرکت کنند. آهنرباهای دوقطبی‌های ابرسانایی هستند (در دمای $1/9 K$) که هر یک میدان مغناطیسی $8/4$ تسلا در جریان 11700 آمپر تولید می‌کنند. هر آهنربا $14/3$ متر طول دارد و 1232 عدد از این آهنرباهای در این شتابگر به کار رفته است. داخل محفظه‌ای که باریکه‌ها حرکت می‌کنند باید به طور پیوسته یک خلأ بالا برقرار باشد. فشار در داخل این محفظه 27 کیلومتری برابر با 10^{-10} Torr است (مقایسه کنید با فشار سطح دریا که 760 Torr است). این فشار معادل با حدود 3 میلیون مولکول در هر سانتی متر مکعب است. باریکه‌ها برای ساعت‌ها در

انرژی بالا نگاه داشته می‌شوند و در این مدت برخورد بین ذرات در چهار آزمایش اصلی در LHC انجام می‌شود. یکی از این چهار آزمایش سولنوئید فشرده میوئون (CMS) است. بخش‌هایی از ابزار این آزمایش در ایران ساخته و با موفقیت در LHC نصب شده‌اند. این اولین مشارکت علمی ایران در یک پروژه علمی مهم در سطح بین‌المللی است. انتظار می‌رود اولین نتایج تحقیقاتی این شتابگر همراه با چاپ اول این کتاب به دست آمده باشد.

برخورد دهنده خطی بین‌المللی (ILC)

این ابزار در مرحله طراحی قرار دارد و یک برخورد دهنده الکترون-پوزیترون بزرگ است. این شتابگر متشکل از دو شتاب دهنده خطی است که به صورت سربه سروروبروی هم قرار دارند و عملاً در حدود 10^{10} الکترون را با همین تعداد پوزیترون برخورد می‌دهد. طول شتاب دهنده خطی حدود ۳۵ کیلومتر خواهد بود. انرژی برخورد حدود 500 GeV است و در هر ثانیه 14000 برخورد وجود خواهد داشت. طراحی پایه‌ای که انجام شده است اجازه می‌دهد تا در مرحله دوم طول شتابگر به 50 کیلومتر و انرژی آن به 1 TeV برسد.

از آنجایی که طراحی، تأمین بودجه، و ساخت این شتابگر برنامه بسیار سنگینی است، این پروژه نیاز دارد به یک ساختار جهانی و یک همکاری بین‌المللی. بیش از 60 فیزیکدان و مهندس پروژه طراحی ILC را به پیش می‌برند. همچنین حدود 2000 نفر از بیش از 100 دانشگاه و آزمایشگاه در حدود 25 کشور، شامل فیزیکدانان ارشد تا دانشجویان کارشناسی در ساخت این شتابگر نسل بعد شرکت دارند.

حقیقت دارد؟ کتاب "The God Particle" چاپ سال 2006 داستانی است که نویسنده آن لئون لیدرمن فیزیکدان مشهور آمریکایی است. در اواخر کتاب قهرمان داستان به دوستش در نیویورک تلفن می‌زند. دوستش می‌پرسد

—کجایی؟

—در تهران!

—تهران چکار می‌کنی؟

—مگر نمی‌دانی شتابگر بزرگ خطی دنیا در ایران افتتاح شده است؟

—نه! چرا ایران؟

—آخر ایران کشوری است با امنیت و پایداری سیاسی، با جوانانی با استعداد، و نیروی کار ماهر!

سال 2025 : منتظر باشید!

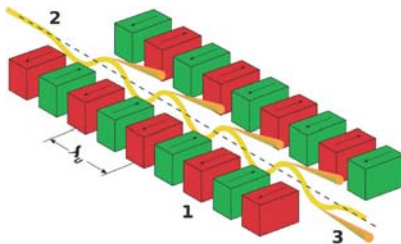
در یک شتاب دهنده دایره‌ای که انرژی ذرات را در مقدار ثابتی نگاه می‌دارد، اتلاف انرژی در هر دور ناشی از تابش سینکروترون از رابطه $U_{drag} = \frac{2}{3} \frac{P}{R}$ به دست می‌آید که در آن R شعاع دایره شتابگر است. برای پروتون‌های با انرژی 14 TeV در حلقه شتابگر LHC به شعاع $4/2 \text{ km}$ اتلاف انرژی در هر دور حدود 60 eV است که در مقایسه با 14 TeV بسیار ناچیز است. اما اگر بخواهیم در همین حلقه الکترون‌هایی با انرژی 1 TeV داشته باشیم انرژی تلف شده در هر دور حدود 20 TeV خواهد شد! حتی اگر شتاب دهنده‌ای بسازیم که قطر آن برابر با قطر کره زمین باشد اتلاف انرژی در هر دور مقدار قابل ملاحظه 13 GeV می‌شود. پس برای شتابگر الکترون با انرژی 1 TeV چاره‌ای جز استفاده از شتابگر خطی نیست. به همین دلیل طرح شتابگر خطی بین‌المللی ILC در دست بررسی است.

با وجود اینکه شتابگر دایره‌ای الکترون کاربرد چندانی برای انرژی‌های بالاتر از 100 GeV ندارند ولی در موارد دیگری می‌توان با توجه به اثرهای نسبیتی از آنها استفاده کرد. تابش سینکروترون در داخل مخروطی گسیل می‌شود که زاویه راس آن با γ نسبت عکس دارد. اگر فرض کنیم انرژی باریکه الکترون چند GeV باشد، مقدار γ از مرتبه بزرگی 10^4 خواهد بود. بنابراین می‌توان از این شتابگر به عنوان چشمه بسیار قوی از تابش پرتوی X شدیداً متمرکز استفاده کرد. از چنین چشمه‌هایی، موسوم به شتابگرهای سینکروترون، در سراسر دنیا به عنوان ابزاری در کشفیات علمی و کاربردهای صنعتی استفاده می‌شود. از جمله کاربردهای علمی سینکروترون‌ها می‌توان از تعیین ساختار پروتئین‌های مختلف در بدن برای بررسی فرایند جهش در مولکول‌های DNA یا ساختار عوامل بیماری‌زا

مانند ویروس‌های مختلف نام برد. در کاربردهای صنعتی نیز به طور نمونه می‌توان از روش‌های فلورسانس پرتو X برای تحلیل آلودگی روی سطوح ویفر سیلیکون نام برد. از سوی دیگر می‌توان با استفاده از این تابش سینکروترون، نوعی تابش همدوس به دست آورد که سیستم تولیدکننده آن به لیزر الکترون آزاد معروف است. چنین ابزارهایی در حال ساخته شدن در شتابگرهای SLAC در استنفورد و DESY در آلمان هستند.

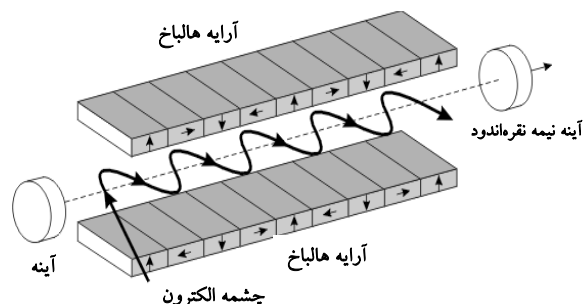
حاشیه: لیزر الکترون آزاد، undulator و wiggler

تحت شرایط خاصی می‌توان تابش سینکروترون را به صورت یک تابش همدوس تولید کرد. ابزاری که چنین تابشی گسیل کند معمولاً لیزر الکترون آزاد نامیده می‌شود و تنها وسیله‌ای است که تا کنون به منظور به دست آوردن تابش در محدوده بسامد THz طراحی شده است. لیزرهای الکترون آزاد به عنوان منبع تابش همدوس پرتو X به طور روزافزون مورد توجه قرار گرفته‌است. در حال حاضر دو مجموعه لیزر الکترون آزاد برای تولید پرتو X در دست طراحی است. یکی در مجموعه شتابگر DESY که به طول ۳۳ کیلومتر در آلمان و در نزدیکی شهر هامبورگ قرار دارد و دیگری در شتابگر خطی استنفورد. این دو سیستم از یک باریکه الکترون به انرژی $2 - 10 \text{ GeV}$ استفاده می‌کنند تا تابش پرتوی X همگن تولید کنند. معمولاً در شتابگرها که یک باریکه الکترون‌های نسبیتی در آن شتاب می‌گیرد قسمتی به نام undulator وجود دارد که از باریکه الکترون استفاده می‌کند تا یک تابش همدوس در ناحیه پرتوهای X ایجاد کند (شکل زیر). این ابزار شامل یک مجموعه آهنرباهای دو قطبی است که پشت سر هم در یک ساختار خطی قرار می‌گیرند. جهت قطب‌های هر آهنربا عکس جهت آهنربای قبلی است؛ در نتیجه ما یک مجموعه‌ای از قطب‌های متناوب N و S هستند در اختیار داریم. باریکه الکترون، که در سرعت‌های نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کند، هنگام عبور از فضای



بین قطب‌ها، تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی متناوب (نسبت به فاصله) با شدت ثابت قرار می‌گیرد. در نتیجه الکترون‌ها در امتداد یک مسیر مارپیچ در undulator نوسان می‌کنند (که از دید چارچوبی که با همان سرعت خطی الکترون حرکت می‌کند شبیه نوسان الکترون‌ها در یک آنتن فرستنده است)، و تابش گسیل می‌کنند. این تابش در محدوده پرتو X سخت (یعنی ناحیه بسامد بالای پرتو X که با پرتوهای گامای کم انرژی همپوشانی دارد) قرار دارد که محدوده آن بسیار باریک و شدت آن بسیار زیاد است. این تابش سپس از طریق روزنه‌هایی که به همین منظور تعبیه شده‌اند، خارج می‌شود و مورد استفاده برای بررسی‌های مختلف پژوهشی از جمله تعیین ساختار داخلی ماده قرار می‌گیرند. پارامتر مهمی که تعیین‌کننده وضعیت خروجی undulator است K نامیده می‌شود:

$$K = \frac{eB\lambda_u}{2\pi mc} \quad (16)$$

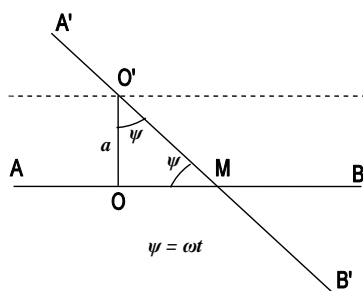


که در آن طول موج ساختار تناوبی قطب‌ها، B شدت میدان مغناطیسی، e بار ذره، و m جرم سکون ذره است. اگر $1 \ll K$ دامنه حرکتی الکترون کوچک است و تابش دارای الگوهای تداخلی خواهد بود که منجر به نوارهای انرژی باریک در آن می‌شود. اگر $1 \gg K$ دامنه نوسان بزرگ‌تر است و تابش‌های مربوط به هر دوره تناوب نوسان الکترون به طور مستقل جمع می‌شوند و یک طیف انرژی با پهنای زیاد ایجاد می‌کنند. در چنین حالتی دیگر این ابزار *undulator* گفته نمی‌شود و آن را *wiggler* می‌نامند (شکل بالا).

۳.۳.۷ حرکت سریع‌تر از نور

تصویری که تا کنون از نسبیت به دست آورده‌ایم نشان می‌دهد که هیچ جسمی نمی‌تواند با سرعت بیش از سرعت نور حرکت کند. اما آیا واقعاً آن طور که اینشتین در مقاله اصلی خود گفته «سرعت‌های بیش از سرعت نور امکان وجود ندارند»؟ وضعیت زیر را در نظر بگیرید.

صفحه P با دو خط راست متقاطع AB و $A'B'$ تعریف می‌شود. خط AB ثابت است در حالی که خط $A'B'$ به طور یکنواخت در صفحه P با سرعت زاویه‌ای ω حول نقطه O' می‌چرخد که فاصله O' از AB برابر با a است (شکل ۵.۷). در این چرخش زاویه ϕ بین دو خط با زمان تغییر می‌کند. فرض کنید لحظه شروع حرکت زمانی باشد که خط‌ها برهمدیگر عمود باشند یعنی $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$ و در نتیجه در لحظه t خواهیم داشت $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - \omega t$. زاویه ϕ در محدوده $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند و در نتیجه $\omega t < \frac{\pi}{2}$ با گذشت زمان



شکل ۵.۷:

نقطه M که محل تلاقی خطوط است در امتداد AB حرکت می‌کند (درست مانند حرکت نقطه تلاقی در تیغه قیچی زمانی که در حال

کار با آن هستیم).

حال برای یافتن سرعت حرکت M ، فاصله OM را x می‌نامیم. پس $x = a \tan \omega t$ و

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a\omega}{\cos^2 \omega t} \quad (17)$$

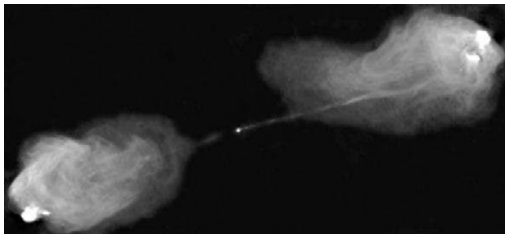
در لحظه مشخص $t_c = \frac{1}{\omega} \arccos \sqrt{\frac{a\omega}{c}}$ نقطه M دارای سرعت لحظه‌ای c می‌شود و بین زمان‌های t_c و $t = \frac{\pi}{\omega}$ سرعت آن بیشتر از نور است. در $t \rightarrow \frac{\pi}{\omega}$ سرعت بی‌نهایت می‌شود و در $t = \frac{\pi}{\omega}$ نقطه M از $x = +\infty$ به $x = -\infty$ می‌پرد.

در این مثال حرکت فوق نور نقطه M با نسبیت خاص در تناقض نیست زیرا نقطه M یک نقطه صرفاً ریاضی است که محتوای فیزیکی ندارد. حتی اگر بتوانیم یک قیچی غول پیکر بسازیم و این مثال را با آن آزمایش کنیم، هیچ یک از ذرات مادی سازنده لبه قیچی به همراه M حرکت نمی‌کند.

شبهه این مورد می‌توان مثال‌های زیادی پیدا کرد که با مراجعه به کتابهای بخش مراجع می‌توانید تعدادی از آنها را ملاحظه کنید. اما مجدداً این سوال را مطرح می‌کنیم که آیا می‌شود از مثال قیچی نتیجه گرفت هیچ حرکتی با سرعت بیش از سرعت نور وجود ندارد؟ پاسخ به این سوال را در زیر بخش بعد می‌بینیم.

حاشیه: سرعت‌های فوق نور در مشاهدات نجومی

در دهه‌های ۸۰ و ۹۰ میلادی و پس از آن در تعدادی از مشاهدات رصدی، پدیده‌هایی دیده شدند که به نظر می‌رسید شاهدهی بر حرکت امواج با بیش از سرعت نور هستند. بعضی کهکشان‌های رادیویی از خود جریان‌های عظیم از ذرات پر انرژی به شکل جت گسیل می‌کنند. این جت‌ها دارای تابش الکترومغناطیسی قوی در ناحیه رادیویی طیف (با بسامد حدود ۱۰-۱ GHz) هستند و در نتیجه در رصدهای رادیویی تصاویر دقیقی از آنها به دست می‌آید. این تصاویر نشان می‌دهند که جت‌های ذرات با گذشت زمان در فضای اطراف کهکشان گسترده می‌شوند.



با توجه به گذشت زمان و حرکت فوران‌ها در فضا، سرعت این بخش‌های جدا شده را می‌توان به دست آورد. به نظر می‌رسد که حرکت بعضی از این فورانها با سرعت فوق نور است. اما در این محاسبه به یک نکته توجه نشده است: صفحه‌ای که شامل مرکز کهکشان و فوران‌های گسترده شده در فضا است بر امتداد خط دید عمود نیست و در نتیجه مقدار واقعی نقل مکان اندازه گیری نمی‌شود. محاسبات نشان می‌دهد که سرعت‌های واقعی خیلی نزدیک به سرعت نور ولی کمتر از آن هستند.

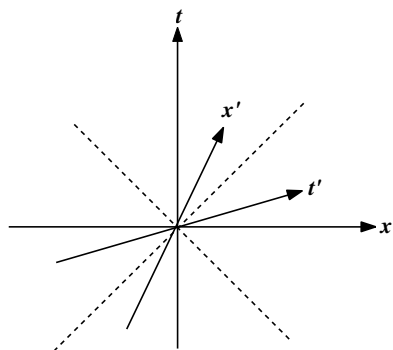
برای مطالعه بیشتر کتاب زیر را ببینید

F.Combes, P.Boisse, A.Mazure, A.Blanchard, "Galaxies and Cosmology", 1995, Springer-verlag

۴.۳.۷. تاقیون‌ها

اجازه دهید پیش از پاسخ به سوال قبلی فرض کنیم ذراتی وجود دارند که با سرعت بیش از سرعت نور حرکت می‌کنند که آنها را تاقیون می‌نامیم. نامی که فیزیکدانان در دهه ۶۰ میلادی برای چنین ذراتی انتخاب کردند و ریشه آن یک کلمه یونانی به معنای سریع است. با توجه به تعریف ضریب $\gamma(v)$ به راحتی دیده می‌شود که برای $v > c$ این ضریب موهومی است. از سوی دیگر رابطه جرم نسبیتی و انرژی را به خاطر بیاوریم؛ چون انرژی یک کمیت قابل اندازه گیری و در نتیجه حقیقی است پس جرم نسبیتی نیز همین طور است. ولی از آنجا که می‌دانیم $m = m_0 \gamma(v)$ ، پس m_0 یعنی جرم سکون یک تاقیون باید موهومی باشد. با همین استدلال می‌توان دید که ویژه طول و ویژه زمان نیز در دنیای تاقیون‌ها کمیت‌های موهومی‌اند. اما این نباید ما را نگران کند؛ برای اینکه یک ناظر با سرعت کمتر از نور بتواند جرم سکون یا ویژه طول یا ویژه زمان را برای تاقیون اندازه بگیرد باید نسبت به آن در حالت سکون باشد یعنی اینکه سرعتش به بیش از سرعت نور افزایش یابد. اما می‌دانیم که این کار ممکن نیست و بنابراین کمیتی مانند جرم سکون تاقیون برای موجوداتی با سرعت کمتر از نور غیر قابل اندازه گیری است.

اثرهای دور از انتظار دیگری نیز در محدوده تاقیون‌ها وجود دارند که می‌توانید آنها را به سادگی از تعاریف نتیجه بگیرید: در رسم نمودارهای فضازمانی اگر برای ذره کندتر از نور محور عمودی را زمان و محور افقی را مکان در نظر بگیریم و بخواهیم نمودار فضازمانی ناظر تاقیونی را در همان صفحه رسم کنیم، نه تنها محورها مایل خواهند بود بلکه جای محورهای مکان و زمان هم عوض می‌شود (شکل ۶.۷). نکته دیگر این است که برای ذره کندتر از نور چارتکانه یک بردار زمان گونه است در حالی که برای تاقیون‌ها این بردار فضاگونه خواهد بود. در مورد برقرار بودن علیت در محدوده تاقیون‌ها بحث‌های زیادی شده است؛ ابهام در این موضوع به خاطر



شکل ۶.۷:

عوض شدن ترتیب زمانی رویدادها با عبور از حد سرعت نور است. اما در واقع براساس اصلی که آنرا اصل باز تعبیر می‌نامند [۴۲]، تاقیونی با انرژی منفی را که در زمان به عقب برمی‌گردد تا علیت را نقض کند، همیشه می‌توان به صورت یک تاقیون با انرژی مثبت که در زمان به جلو حرکت می‌کند در نظر گرفت. بنابراین علیت از این دیدگاه نقض نخواهد شد. به نظر می‌رسد همان طور که فیزیک مربوط به ناحیه زیر سرعت نور دارای سازگاری است فیزیک ناحیه وراى سرعت نور نیز چنین است مشروط بر اینکه سرعت نور مانند سدی تلقی شود که هیچ کدام از ذرات دو طرف آن نمی‌توانند از سد رد شوند.

در سال‌های اخیر در زمینه میدان‌های کوانتومی و شکست خود به خود تقارن جواب‌هایی از معادلات دیده شده است که آنها را نیز تاقیون می‌نامند، اما باید دانست که این جواب‌ها نمی‌توانند براساس تعریف متعارفی که ما از ذرات داریم، به عنوان یک ذره با کمیت‌های قابل اندازه گیری در نظر گرفته شوند.

- Thorne K. S., Lee D. L., and Lightman A. P., 1973, Phys Rev, D7, 3563. (۱)
- Will C. M., 1974, in Proceedings of International School of Physics Enrico Fermi, L V I, Academic Press, New York. (۲)
- Mansouri R., Naturforsch, 1979, 34a, 9233. (۳)
- Everette A. E., 1976, Phys Rev, D13, 785, 795. (۴)
- Mansouri R., 1979, Phys Lett, 71A, 177. (۵)
- Robertson H. P., 1949, Rev Mod Phys, 21, 378. (۶)
- Robertson H. P. and Noonan W. Th., 1968, "Relativity and Cosmology", W B Saunders co., Philadelphia. (۷)
- Mansouri R., Sexl R., 1977, Gen Rel Grav, 8, 497. (۸)
- Mansouri R., Sexl R., 1977, Gen Rel Grav, 8, 515. (۹)
- Mansouri R., Sexl R., 1977, Gen Rel Grav, 8, 809. (۱۰)
- Michelson A. A., E.W.Morley, Am.J.Si., Nov 1887, Vol.34, 333. (۱۱)
- Moller C., 1957, Suppl Nuovo Cimento, 6,381; 1960, Proc Royal Soc, A270, 306. (۱۲)
- Ruderfer M., 1960, 1961, 1960, Phys Rev Lett, 5, 191; 7, 361(erratum), Proc IRE, 48, 1661. (۱۳)
- Kennedy R. J., Thorndike E. M., 1932, Phys Rev, 42, 400. (۱۴)
- Ives H. E., Stillwell G. R., 1938, 1941, J Opt Soc Am, 28, 215; 31, 369. (۱۵)
- Ashby N., Allan D. W., 1984, Phys Rev Lett, 53, 1858. (۱۶)
- Champaney D. C., Isaak G. R., and Kahn A. M., 1963, Phys Lett, 7, 241. (۱۷)
- Isaak G. R., 1970, Phys Bull, 21, 255. (۱۸)
- Riis E., et. al., 1988, Phys Rev Lett, 60, 81. (۱۹)
- Brillet A., Hall J. L., 1979, Phys Rev Lett, 42, 549. (۲۰)
- Joos G., 1930, Phys N Y, 7, 355. (۲۱)
- Essen L., 1955, Nature, 175, 793. (۲۲)
- Jaseja T. S., Javan A., Murray J., Townes C. H., 1964, Phys Rev, 133, A1221. (۲۳)

- (۲۴) Abolghasem G. H., Khajehpour M. R. H., Mansouri R., 1989, J Phys A, 22, 1589.
- (۲۵) Abolghasem G. H., Khajehpour M. R. H., Mansouri R., 1988, Phys Lett A, 132, 310.
- (۲۶) Hils D., Hall J. L., 1990, Phys Rev Lett., 64, 1697.
- (۲۷) رضا منصوری، نظریهٔ آزمون نسبیت خاص چیست و چه لزومی دارد؟، مجله فیزیک، ۱۳۶۹، ۸، ۲۵-۲۹.
- (۲۸) رضا منصوری، قرارداد دیگری در نسبیت خاص، مجله فیزیک، ۱۳۷۰، ۹، ۹۱-۹۶.
- (۲۹) H.R. Brown, "The origins of length contraction. I: The Fitzgerald-Lorentz deformation hypothesis", Am. J. Phys. , Vol 69, No.10, (Oct 2001), P.1044
- (۳۰) انحراف از نسبیت خاص در ورای نظریهٔ میدان مؤثر arxiv:hep-th/0601023
- (۳۱) قید روی نقض لورنتز از طریق رصد انفجارهای تابش گاما arxiv:astro-ph/0601219 و arxiv:astro-ph/0510172
- (۳۲) ORBO51221A و آزمون تقارن لورنتز arxiv:astro-ph/0501556
- (۳۳) مسئلهٔ سفر با موشک به کهکشان‌های دور در یک عالم با انبساط شتابدار arxiv:astro-ph/0509268
- (۳۴) معمای ضریب لورنتز بالا (حدود ۱۰۰) در بلازارها arxiv:astro-ph/0511610
- (۳۵) تندترین جتهای نسبیتی arxiv:astro-ph/0511664
- (۳۶) Neil Ashby, "Relativity in the global positioning system", relativity.livingreview.org/Articles/Irr-2003-1
- (۳۷) مروری راجع به نسبیت و آزمون‌های آن arxiv:gr-qc/0504085
- (۳۸) طرح یک آزمون نسبیت در فضا
- H. Dittus, et. al, "OPTIS- A satellite test of special and general relativity", advances in space research 39(2007)230-235.
- (۳۹) بررسی آزمون نسبیت در فضا arxiv:hep-ph/0608083
- (۴۰) نوعی آزمایش مایکلسون-مورلی arxiv:0706.2031
- (۴۱) نظریه‌های با سرعت نور متغیر astro-ph/0210042
- (۴۲) Feinberg G., "Possibility of faster than light particles", Phys Rev 159(1967), 1085-1105.

پیوست A

نمونه سؤالات امتحان نسبیت خاص

صنعتی شریف، پایان ترم، نیمسال اول ۷۸-۷۹

۱) در یک دستگاه لخت، دو ذره هم‌زمان در دو جهت عمود بر هم از یک نقطه با سرعت مساوی v شلیک می‌شوند. سرعت هر ذره را نسبت به دیگری بیابید.

پاسخ:

$$v\sqrt{2 - \frac{v^2}{c^2}}$$

۲) تقدیم توماس با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\omega_T = -\frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

که نمادهای به کار رفته تعریف‌های متداول را دارند.
الف) رابطه بالا را توضیح دهید، یعنی تقدیم توماس را تعریف کنید.
ب) برای یک حرکت دایره‌ای یکنواخت دوره تناوب تقدیم توماس را حساب کنید.

۳) تبدیل پوانکاره با نماد (a, L) تعریف می‌شود. ضرب در این تبدیل به این صورت است:

$$(a', L')(a, L) = (a' + L'a, L'L)$$

الف) درستی این ضرب را تحقیق کنید.
ب) نشان دهید تبدیل پوانکاره با این ضرب یک گروه می‌سازد.

(۴) جهان خط یک ناظر در راستای چاربردار u^μ است. نشان دهید دو رویداد x^μ و y^μ تنها هنگامی هم‌زمانند (برای این ناظر) که

$$u(x - y) = 0$$

(۵) در یک برخورد دو ذره با تکانه‌های q_1 و q_2 قبل از برخورد و p_1 و p_2 بعد از برخورد می‌توان دو کمیت ناورد را تعریف کرد:

$$s = (q_1 + q_2)^2$$

$$t = (q_1 - p_1)^2$$

معنای هر کدام را در دستگاه آزمایشگاه $q_1^\mu = m_0 = 0$ و نیز در دستگاه مرکز جرم $q_1 + q_2 = 0$ بیان کنید.

(۶) میدان الکترومغناطیسی $E(\vec{x})$ و $B(\vec{x})$ را در یک نقطه فضا-زمان در نظر بگیرید. نشان دهید
 الف) اگر $I_2 = 0$ و $I_1 \neq 0$ باشد، بسته به علامت I_1 می‌توان به دستگاهی رفت که در آن یا $\vec{B} = 0$ یا $\vec{E} = 0$.
 ب) اگر $I_2 \neq 0$ ولی $I_1 = 0$ باشد، می‌توان به دستگاهی رفت که در آن $\vec{E} \propto \vec{B}$.

پاسخ:

$$I_1 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (E^2 - B^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{4} * F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \vec{B}$$

صنعتی شریف، میان ترم، نیمسال اول ۷۹-۱۳۷۸ (کتاب باز)

(۱) نشان دهید که برای تبدیل لورنتز

$$t' = \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{x}) - \gamma \vec{v} t$$

متریک ناورد است. اگر در اثبات سه بعدی مشکل دارید آن را برای یک بعد فضا اثبات کنید.

(۲) می‌خواهیم طول یک خط‌کش را، که نسبت به دستگاه آزمایش I در حال حرکت است، اندازه بگیریم. برای این کاریک مجموعه فلش هم‌زمان روشن می‌شود و سایه‌ای که خط‌کش می‌اندازد روی یک صفحه عکاسی ضبط می‌شود. نشان دهید که از دید دستگاه همراه خط‌کش، فلش‌ها هم‌زمان روشن نمی‌شوند و همین توجیه انقباض طول است.

(۳) ذره‌ای با چاربتکانه p^μ توسط ناظری که با چارسرعت u^μ حرکت می‌کند مشاهده می‌شود. نشان دهید که انرژی ذره نسبت به این ناظر برابر است با $u_\mu p^\mu$.

(۴) الکترون سریعی به جرم سکون m در یک برخورد با یک هسته سنگین کند می‌شود و تابش ترمزی گسیل می‌کند. نشان دهید که انرژی فوتون تا مقدار $(\gamma - 1)mc^2$ را می‌تواند اختیار کند. گسیل این حداکثر انرژی چه معنی دارد؟

(۵) چارسرعت ناظری برابر w^μ و چارشتاب ذره‌ای برابر a^μ است. هرگاه $a \cdot u = 0$ باشد، چه نتیجه‌ای برای سرعت ذره نسبت به ناظر می‌گیرید؟

(۶) تانسور $T^{\mu\nu}$ در دستگاه لخت I' که با سرعت w^μ نسبت به I حرکت می‌کند تنها یک مؤلفه $\rho = T^{\circ\circ}$ دارد. مؤلفه‌های این تانسور را در دستگاه I حساب کنید.

(۷) آینه تختی در راستای عمود بر خودش با سرعت ثابت v نسبت به دستگاه لخت I حرکت می‌کند. پرتو نور با بسامد ν_1 با زاویه θ به آینه برخورد می‌کند و با بسامد ν_2 تحت زاویه ϕ منعکس می‌شود. نشان دهید:

$$\frac{\tan \frac{1}{2}\theta}{\tan \frac{1}{2}\phi} = \frac{c+v}{c-v}$$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{c \cos\theta + v}{c \cos\phi - v} = \frac{c + v \cos\theta}{c - v \cos\phi}$$

صنعتی شریف، پایان ترم، نیمسال اول ۱۳۸۳-۸۴

(۱) ناوردایی $s^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$ را تحت تبدیل خاص لورنتز (خیز در راستای محور x) نشان دهید. به ازای دو رویداد هم‌زمان معنای s^2 چیست؟

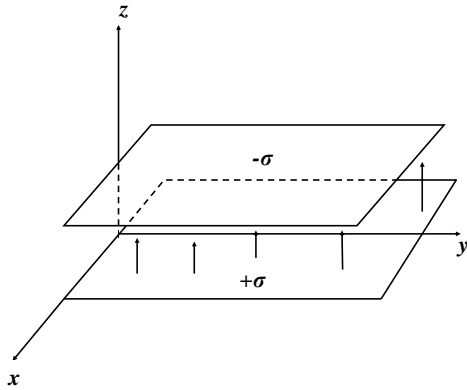
(۲) دو دستگاه لخت S و S' محورهای هم‌راستا دارند. S' با سرعت $v = \alpha c$ ، $0 < \alpha < 1$ ، در راستای x نسبت به S حرکت می‌کند. میله‌ای در S' ساکن است و با محور x' زاویه 30° درجه می‌سازد. این میله در دستگاه S نسبت به محور x با زاویه 45° درجه دیده می‌شود. α را حساب کنید.

(۳) با چه سرعتی به سمت چراغ راهنمای رانندگی حرکت کنیم که قرمز را سبز ببینیم؟ ($\lambda_{green} = 500 \text{ nm}$ و $\lambda_{red} = 700 \text{ nm}$)

(۴) اتمی به جرم سکون m_0 از سکون فوتونی می‌تاباند. در این واکنش به مقدار e از انرژی سکون اتم کاسته می‌شود. نشان دهید بسامد فوتون تابیده برابر است با

$$\nu = \frac{e}{h} \left(1 - \frac{e}{2m_0 c^2} \right)$$

۵) خازنی را در نظر بگیرید که از دو صفحه تخت موازی بزرگ با چگالی بار سطحی $+\sigma$ و $-\sigma$ تشکیل شده است. ناظر ساکن نسبت به خازن میدان الکتریکی $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_z$ را اندازه می‌گیرد که در آن \vec{n} بردار یکه موازی محور z است. محورهای مختصات



ناظر S' موازی محورهای ناظر S است و با سرعت v نسبت به راستای محور x حرکت می‌کند. این ناظر چه میدان الکتریکی یا مغناطیسی را اندازه می‌گیرد؟
الف) مقدار میدان \vec{E}, \vec{B} را از روی تبدیل لورنتز به دست آورید.
ب) همین مقادیر را با شهود نسبیتی و با استفاده از اثرهای نسبیتی مانند انقباض طول به دست آورید.

صنعتی شریف، میان ترم، نیمسال اول ۱۳۸۳-۸۴ (کتاب باز، مشورت ممنوع!)

- ۱) نیمه عمر ذره بنیادی میون را در دستگاه خودش τ بنامید. فرض کنید یک میون در پرواز (از ذره‌ای متحرک) آفریده می‌شود. تکانه آن را $p \gg mc$ بنامید که در آن m جرم سکون میون است. نیمه عمر میون را برای ناظر ساکن در اولین تقریب نسبیتی به دست آورید.
- ۲) فوتونی به یک هسته به جرم M برخورد می‌کند. هسته می‌ماند، فوتون نابود می‌شود و یک زوج الکترون-پوزیترون تولید می‌شود. حداقل انرژی فوتون برای این فرایند باید چقدر باشد؟
- ۳) موشکی با شتاب g (در دستگاه سکون موشک) از زمین دور می‌شود.
الف) اندازه زاویه‌ای زمین را از دید موشک به عنوان تابعی از ویژه زمان موشک حساب کنید.
ب) این اندازه زاویه‌ای با افزایش ویژه زمان به یک حد میل می‌کند، این حد را حساب کنید.

صنعتی شریف، نمونه سؤال‌های امتحانی پایان ترم

۱) ماتریس دوران بینهایت کوچک را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Omega = \vec{\alpha} \cdot \vec{\Lambda}$$

که در آن ماتریس‌های Λ مولدهای دوران هستند. می‌دانیم

$$\Lambda_{ijk} = -\epsilon_{ijk}$$

الف) صریحاً نشان دهید

$$[\Lambda_i, \Lambda_k] = \epsilon_{ijk} \Lambda_j$$

ب) نشان دهید برای ماتریس $\vec{n} \cdot \vec{\Lambda}$ رابطه زیر صادق است:

$$(n\Lambda)^2 = nn^T - 1$$

$$(n\Lambda)^3 = -n\Lambda$$

توجه کنید که $\vec{n} = \frac{\vec{\alpha}}{|\alpha|}$. سپس نشان دهید

$$R(\alpha) = e^{\vec{\alpha} \cdot \vec{\Lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha\Lambda)^k$$

۲) نشان دهید که عملگر مکان \vec{X} با تعریف

$$(X\Phi)(x) = x\Phi(x)$$

و عملگر تکانه با تعریف

$$(P\Phi)(x) = \frac{1}{i} \nabla \Phi(x)$$

یا با تعریف

$$(e^{-i\vec{a} \cdot \vec{P}}\Phi)(x) = \Phi(\vec{x} - \vec{a})$$

عملگرهای برداری هستند.

۳) حرکت ذره باردار از معادله‌های زیر پیروی می‌کند:

$$f^\mu = m \frac{du^\mu}{ds} = m \frac{dp^\mu}{ds}$$

$$f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

گیریم $F^{\mu\nu}$ یک میدان ثابت باشد. انتگرال حرکت از معادله‌های بالا می‌شود

$$u(s) = \exp\left(\frac{q}{m} \cdot F s\right) u(0)$$

نشان دهید که $\exp\left(\frac{q}{m} \cdot F s\right)$ ماتریس یک تبدیل لورنتز است. m جرم ذره و q بار آن است.

۴) نشان دهید که کنش

$$S = \int dx^4 \cdot \frac{1}{4} (\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - m^2 \phi^2)$$

به معادله کلاین گوردون منجر می‌شود.

تربیت معلم، پایان ترم، نیمسال دوم ۸۶-۱۳۸۵

- (۱) جسمی به جرم سکون $M_0 = 2 \text{ kg}$ از حالت سکون در چارچوب S شروع به حرکت می‌کند و در این چارچوب تحت نیروی ثابت $F = 10 \text{ N}$ در امتداد محور x قرار می‌گیرد. چه مدت طول می‌کشد تا جسم به سرعت $0.9c$ برسد؟ مقدار نیرو در چارچوب سکون جسم وقتی که سرعت آن به u_x رسیده باشد چقدر است؟
- (۲) دو ذره با جرم سکون M_0 و انرژی یکسان (برابر با $\gamma m_0 c^2$) با زاویه قائمه با هم برخورد می‌کنند. مثلاً ذره اول در امتداد محور x و ذره دوم در امتداد محور y حرکت می‌کنند. پس از برخورد علاوه بر دو ذره اولیه، دو ذره هر یک با جرم سکون $5M_0$ ایجاد می‌شوند. انرژی آستانه این واکنش را بیابید.
- (۳) رابطه اثر کامپتون را به روش چاربرداری به دست آورید.
- (۴) یک منجم طیف منبعی را که عمود بر خط دید حرکت می‌کند ثبت می‌نماید. منبع در چارچوب سکون خود یک خط طیفی با طول موج $\lambda = 6562 \text{ \AA}$ گسیل می‌کند. طول موج مشاهده شده توسط منجم چقدر است؟ فرض کنید اندازه سرعت نسبی $\frac{v}{c}$ باشد.
- (۵) طول موج نور قرمز 650 nm و نور زرد 570 nm است. فرض کنید راننده‌ای از چراغ قرمز عبور می‌کند و زمانی که پلیس او را متوقف می‌کند مدعی می‌شود که به خاطر اثر دوپلر فکر کرده که چراغ هنوز زرد است. آیا پلیس حرف او را قبول می‌کند؟
- (۶) یک موج تخت الکترومغناطیسی که در جهت $+x$ حرکت می‌کند با رابطه زیر در چارچوب S توصیف می‌شود

$$E(x, t) \propto \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda_0} - f_0 t\right)\right]$$

- الف) تبدیل لورنتز را بر روی شناسه سینوس اثر دهید تا توصیف همان موج را در چارچوب S' را که در جهت $+x$ با سرعت v حرکت می‌کند به دست آورید. مخصوصاً بسامد f موج را که ناظر S' اندازه می‌گیرد به دست آورید (مستقیماً از رابطه دوپلر استفاده نکنید).
- ب) با فرض $\frac{v}{c} = \frac{4}{5}$ و $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$ ، طول موج λ اندازه‌گیری شده توسط S' را به دست آورید.

تربیت معلم، میان ترم، نیمسال دوم ۸۶-۱۳۸۵

- (۱) چارچوب S' با سرعت v در امتداد محور x نسبت به چارچوب S در حال حرکت است. در S' یک فرستنده در $x' = y' = z' = 0$ و یک گیرنده در $x' = y' = 0, z' = L$ قرار دارند. در $t' = 0$ فرستنده یک تپ نور گسیل می‌کند که گیرنده آن را در $t' = \frac{L}{c}$ دریافت می‌کند.
- الف) از دید S مختصات گسیل و دریافت تپ را حساب کنید.
- ب) از دید S مؤلفه‌های سرعت تپ و مقدار آن را به دست آورید.
- (۲) یک ذره p به دو ذره مزون π و پایشیده می‌شود. در چارچوب سکون p یک ذره π در جهت $+z$ و دیگری در جهت $-z$ هر یک با سرعت $0.7c$ حرکت می‌کنند.
- الف) اگر قطریکی از ذره‌های π در چارچوب سکونش در امتداد z برابر با $10^{15} \text{ m} \times \frac{1}{6}$ باشد، قطر این ذره در امتداد z در

چارچوب سکون مزون π دیگر چقدر است؟

(ب) فرض کنید یک واپاشی در چارچوب آزمایشگاه مشاهده کنیم که در آن ذره ρ اولیه دارای سرعت $c/8$ در امتداد x باشد. توضیح دهید چرا ناظر آزمایشگاه می‌بیند که هر دو مزون π با سرعت یکسان حرکت می‌کنند و این سرعت را حساب کنید.

(۳) فرض کنید سه لامپ فلاش C و B و A در چارچوب S ساکن بوده و در امتداد محور x در نقاط $x_A = 0 \text{ km}$ ، $x_B = -9 \text{ km}$ و $x_C = -9 \text{ km}$ قرار داشته باشند. سه رویداد را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

E_1 : لامپ A در $t = 0$ یک درخش گسیل می‌کند، E_2 : لامپ B در $t = 10 \mu\text{s}$ یک درخش گسیل می‌کند، E_3 : لامپ C در $t = 30 \mu\text{s}$ یک درخش گسیل می‌کند.

آیا چارچوب مرجعی وجود دارد که در آن E_1 و E_2 هم‌زمان باشند؟ اگر اینطور است، سرعت آن نسبت به S چقدر است؟
آیا چارچوب مرجعی وجود دارد که در آن E_1 و E_3 در یک مکان رخ دهند؟ اگر اینطور است، سرعت آن نسبت به S چقدر است؟

آیا چارچوب مرجعی وجود دارد که در آن E_2 و E_3 هم‌زمان باشند؟ اگر اینطور است، سرعت آن نسبت به S چقدر است؟
آیا چارچوب مرجعی وجود دارد که در آن E_1 و E_3 در یک مکان رخ دهند؟ اگر اینطور است، سرعت آن نسبت به S چقدر است؟

(۴) رابطه جمع سرعت‌های نسبی را با استفاده از روش چارچوب‌داری به دست آورید.

تربیت معلم، پایان ترم، نیمسال اول ۸۶-۱۳۸۵ (حل در خانه)

(۱) فرض کنید در مرکز یک پوسته کروی به شعاع 3×10^8 متر نشسته‌اید. سطح داخلی کره طوری است که اگر نور به آن بتابد، بازتاب را در جهات مختلف پخش می‌کند. یک منبع نور در مرکز کره تب نوری را در همه جهات با شدت یکسان گسیل می‌کند. توضیح دهید تحت شرایط زیر در فاصله سه ثانیه‌ای بعد از گسیل تب چه چیزی مشاهده می‌کنید:

الف) یک باد اتری یکنواخت با سرعت $100 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ داخل کره می‌وزد.

ب) اتری وجود ندارد و اصل نسبیت ثابت بودن سرعت نور برقرار است.

توضیح دهید این آزمایش ذهنی چه رابطه‌ای با آزمایش مایکلسون مورلی دارد.

(۲) چارچوب S' با سرعت ثابت v نسبت به چارچوب S در چپتی با زاویه θ نسبت به محور x در حال حرکت است. تبدیلات لورنتز بین S و S' را به دست آورید.

(۳) سفینه‌ای که در جهت مثبت محور x با سرعت v ، سیگنال نوری از یک ستاره در صفحه xy دریافت می‌کند. در چارچوب سکون ستاره، شعاع نور با امتداد سرعت سفینه زاویه θ می‌سازد. زاویه θ' بین شعاع نور و محور x در چارچوب سکون سفینه را به دست آورید و آن را بر حسب θ بیان کنید.

(۴) یک فرایند برخورد و پراکندگی بین ذرات ۱ تا ۴ به شکل زیر است:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

الف) نشان دهید تمام حاصلضرب‌های به شکل $p_i \cdot p_j$ را می‌توان بر حسب متغیرهای s, t, u و جرم‌های m_i بیان کرد که:

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2$$

$$t \equiv (p_1 - p_3)^2$$

$$u \equiv (p_1 - p_4)^2$$

و p_i چارتکانه ذره i ام و m_i جرم سکون آن است.
 ب) نشان دهید s, t, u با رابطه زیر به هم مرتبط می‌شوند

$$s + t + u = \sum_{i=1, \dots, 4} m_i^2 c^4$$

پ) نشان دهید اگر جرم‌ها برابر باشند آنگاه $s \geq 4m^2$ و $t, u \leq 0$.

(۵) در مورد سؤال‌های زیر از چاربردارها توضیح دهید:

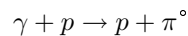
الف) آیا سرعت نور می‌تواند یک بردار زمان‌گونه و به سمت گذشته باشد؟

ب) آیا تکانه باید همواره زمان‌گونه و آینده‌سو باشد؟

پ) آیا صفر شدن بردار سه‌بعدی نیرو و بردار چهاربعدی نیرو با یکدیگر معادلند؟

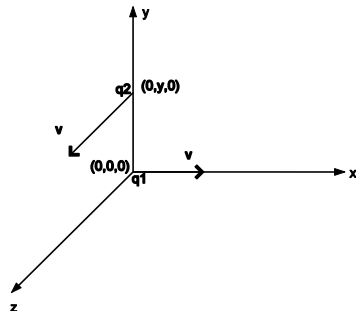
تربیت معلم، پایان ترم، نیمسال دوم ۸۵-۱۳۸۴

(۱) پروتونی که دارای مشخصات $\gamma = 100$ و $\beta = 1 - (5 \times 10^{-5})$ است با زاویه 45° با یک فوتون برخورد می‌کند (واکنش زیر):



در این واکنش یک پیون با جرم سکون $m_\pi = \frac{m_p}{4}$ تولید می‌شود. انرژی آستانه فوتون برای انجام واکنش را حساب کنید ($m_p \simeq 1000 \text{ MeV}$).

(۲) در یک لحظه مشخص یک بار چشمه q_1 از مبدأ چارچوب S با سرعت v در امتداد محور x عبور می‌کند. در همین زمان یک بار آزمون q_2 که موازی با محور z حرکت می‌کند از نقطه $(x, y, z) = (0, y, 0)$ با سرعت v می‌گذرد. با به کار بردن قانون کولن در یک چارچوب مناسب S' و سپس برگرداندن به چارچوب S ، نیروی وارد بر q_2 را حساب کنید.



(۳) با استفاده از تبدیل مناسب بین دو چارچوب S و S' ، نیروی وارد بین دو بار الکتریکی q که روی دو خط موازی با سرعت v و هر دو در یک جهت حرکت می‌کنند را حساب کنید و راجع به وضعیت نیروی مغناطیسی و الکتریکی از دیدگاه نسبیت توضیح دهید.

تربیت معلم، میان ترم، نیمسال دوم ۸۵-۱۳۸۴

(۱) میله‌ای که در امتداد محور x' از چارچوب S' ساکن است، نسبت به چارچوب S با سرعت $\beta = \frac{4}{5}$ (در امتداد محور x) حرکت می‌کند. دو فلاش نوری که به عنوان علامت از دو انتهای میله گسیل می‌شوند در S هم‌زمان می‌شوند. فاصله مکانی بین رویدادهای فلاش در S یک متر است.

الف) با استفاده از تبدیل لورنتز طول سکون میله را حساب کنید.

ب) کدامیک از دو فلاش در S' زودتر دیده می‌شوند.

(۲) چارچوب S' نسبت به چارچوب S با سرعت v در امتداد x حرکت می‌کند. در S' یک فرستنده در $x' = y' = z' = 0$ و یک گیرنده در $x' = y' = 0, z' = L$ قرار دارند. در $t' = 0$ فرستنده تپ نوری می‌فرستد که گیرنده در $t' = \frac{L}{c}$ آن را دریافت می‌کند. الف) در S مختصات مکانی و زمانی گسیل و ارسال را پیدا کنید.

ب) از دید ناظرهای S مؤلفه‌های سرعت تپ و سرعت کل آن چقدر است؟

(۳) یک مزون ρ به دو پیون واپاشیده می‌شود. در چارچوب سکون ρ پیون‌ها به صورت پشت به پشت هم با سرعت $0.7c$ گسیل می‌شوند.

الف) فرض کنید پدیده در چارچوب آزمایشگاهی رخ دهد که ρ پیش از واپاشی دارای سرعت $0.9c$ در آن بوده است. در چارچوب آزمایشگاه بیشترین سرعتی که یکی از پیون‌ها می‌تواند داشته باشد چقدر است؟
ب) سرعت یک پیون نسبت به دیگری چقدر است؟

(۴) با استفاده از نمودار مینکوفسکی برای چارچوب‌های S و S' ، پدیده‌ی اتساع زمان را نشان دهید و تحقیق کنید که این پدیده برای دو ناظر متقابل است (رسم تقریبی نمودار کافی است).

تربیت معلم، پایان ترم، نیمسال اول ۸۵-۱۳۸۴

(۱) یک شعاع نور در چارچوب S' با زاویه $\theta' = 60^\circ$ نسبت به محور x' حرکت می‌کند. سرعت S' نسبت به S برابر است با $v = \frac{3}{5}c$ است.

الف) مؤلفه‌های سرعت نور را در S بیابید.

ب) زاویه θ شعاع نور با محور x در چارچوب S چیست؟

(۲) دو ساعت A و B از حالت سکون در چارچوب S شروع به کار می‌کنند. ساعت A به حالت سکون در S باقی می‌ماند اما ساعت B یک سفر با حرکت شتابدار انجام می‌دهد. سرعت آن به عنوان تابعی از زمان به شکل

$$v(t) = c \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

است که T کل مدت سفر اندازه گیری شده توسط A در چارچوب S می‌باشد. زمان سپری شده برای ساعت B در پایان سفر را حساب کنید.

(۳) فرض کنید که چشمه‌ای در حال ارسال خط طیفی طول موج λ روی دایره‌ای با سرعت ثابت $0.1c$ در چرخش است. اگر این چشمه دچار تغییر طول موج ناشی از اثر دوپلر شود آن را حساب کنید.

(۴) چگونه می‌توان با فرض هموردایی معادلات ماکسول، تبدیلات مؤلفه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به دست آورد؟ به انتخات خود معادلات تبدیل را برای یک مؤلفه از این روش به دست آورید.

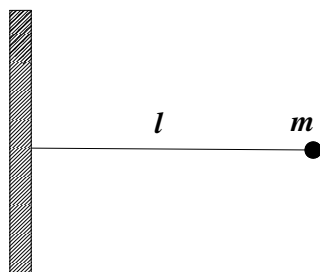
تربیت معلم، میان ترم، نیمسال اول ۸۵-۱۳۸۴ (حل در خانه)

(۱) دو فضایی‌های مشابه در فضا غوطه‌ور بوده و نسبت به هم ساکن هستند. این دو به وسیله یک ریسمان محکم به یکدیگر بسته شده‌اند. ریسمان محکم است ولی نمی‌تواند هر مقدار کشش را تحمل کند. در یک لحظه هر دو فضایی‌ها در امتداد خط واصل بین خود با شتاب یکسان در یک جهت شروع به شتاب گرفتن می‌نمایند. آیا ریسمان نهایتاً پاره خواهد شد؟ مسئله را از طریق رسم نمودار مینکوفسکی حل کنید.

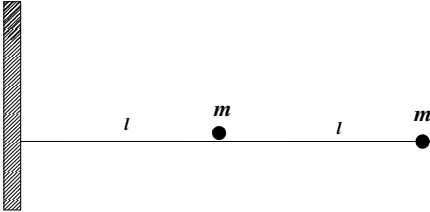


(۲) سطل نسبیتی:

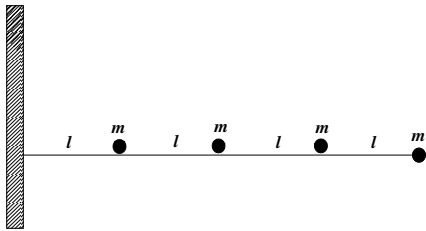
الف) یک جرم m به ابتدای یک کش بدون جرم با کشش ثابت T (یعنی مستقل از طول) بسته شده و انتهای کش به یک دیوار متصل شده است. طول اولیه کش l است. جرم رها می‌شود. چقدر طول می‌کشد تا به دیوار برسد؟



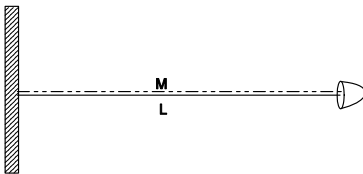
ب) اکنون فرض کنید طول کش $2l$ باشد و جرم m به ابتدای آن بسته شده باشد. یک جرم m دیگر در فاصله l از جرم اول، در مجاورت کش قرار دارد ولی با آن در تماس نیست. جرم سمت راست رها می‌شود و به طرف دیوار حرکت می‌کند (جرم دوم ساکن است). سپس جرم اول به دومی برخورد می‌کند و به آن چسبیده و یک گلوله بزرگ تشکیل می‌دهد. جرم بزرگ حرکت به سوی دیوار را ادامه می‌دهد. مدت زمان رسیدن تا دیوار چقدر است؟



پ) حال فرض کنید N جرم و کشی به طول Nl داریم. مدت زمان رسیدن به دیوار چقدر است؟



ت) نهایتاً فرض کنید یک سطل بدون جرم به انتهای کش به طول L بسته شده و زمانی که رها می‌شود به سوی دیوار حرکت کرده و به طور پیوسته شن‌های مجاور کش (به جرم کل M) را جمع می‌کند. مدت زمان رسیدن به دیوار چقدر است و جرم سطل درست قبل از برخورد به دیوار چه مقدار است؟



تربیت معلم، میان ترم، نیمسال دوم ۸۴-۱۳۸۳ (حل در خانه)

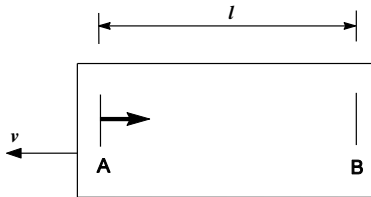
۱) یک پتانسیل کپلری به شکل $V(r) = \frac{-\alpha}{r}$ را در نظر بگیرید. مسئله حرکت ذره‌ای به جرم m در این پتانسیل را به طور کامل با استفاده از دینامیک نسبیتی مورد بحث قرار دهید.

موارد زیر را حتماً به دست آورید:

معادله حرکت، معادله مسیر دو بعدی در مختصات قطبی، مکان ذره به عنوان تابعی از زمان همچنین کمیت‌های مختلف دینامیکی از جمله انرژی کل، تکانه، تکانه زاویه‌ای را مورد بررسی قرار دهید. سعی کنید در هر مورد مسئله را با حالت کلاسیک مقایسه کنید.

تربیت معلم، میان ترم، نیمسال اول ۸۴-۱۳۸۳ (حل در خانه)

۱) فرض کنید اتر وجود داشته باشد. در زمان $t = 0$ ناظر A یک سیگنال به ناظر B که در فاصله l قرار دارد ارسال می‌کند. B زمان ورود سیگنال را ثبت می‌کند. فرض کنید سیستم با سرعت v نسبت اتر در جهت نشان داده شده حرکت می‌کند. اکنون فرض کنید که آزمایشگاه نسبت به سرعت v درجه دوران کند طوری که جای A و B عوض شود.



در زمان $t = T$ سیگنال دومی به B ارسال می‌کند.

الف) نشان دهید اگر بازه بین دو سیگنال از نظر B برابر با $T + \Delta T$ باشد آنگاه تا مرتبه $(\frac{v}{c})^3$ داریم:

$$\Delta T = \frac{2lv}{c^2}$$

ب) فرض کنید که آزمایش بین یک ساعت روی زمین و ساعتی در ماهواره در مدار زمین انجام می‌گیرد. برای مداری با دوره تناوب ۲۴ ساعت، داریم $l = \frac{4}{3}R_e$ که R_e شعاع زمین است. ساعت‌های اتمی فعلی به دقت ۱ در 10^{14} رسیده‌اند. کمترین مقدار v که در این آزمایش با چنین ساعتی قابل آشکارسازی است چقدر است؟

۲) الف) نشان دهید M ، جرم خورشید، با رابطه زیر به زاویه انحرافی α مربوط می‌شود

$$M = \frac{\alpha^2 c^2 R}{G}$$

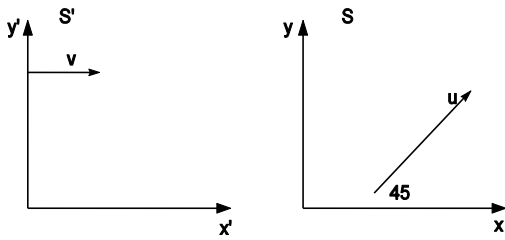
که در آن R شعاع زمین است.

ب) مقدار عددی جرم خورشید را با این رابطه برآورد کنید.

تربیت معلم، پایان ترم، نیمسال اول ۸۳-۱۳۸۲

(۱) میله‌ای در امتداد محور x' از دستگاه مختصات S' ساکن است نسبت به دستگاه مختصات S با سرعت $\beta = \frac{4}{5}$ (در امتداد محور x) حرکت می‌کند. دو فلاش نوری که علامت دو انتهای میله هستند در دستگاه S هم‌زمان دیده می‌شوند. فاصله زمانی بین رویدادهای فلاش در S برابر با m است.
 الف) با استفاده از تبدیل لورنتز طول سکون میله را حساب کنید.
 ب) کدامیک از دو فلاش در S' ابتدا دیده می‌شوند.

(۲) ذره‌ای در دستگاه S دارای سرعت u است. این ذره با زاویه 45° درجه نسبت به محور x حرکت می‌کند.
 الف) سرعت چارچوب S' را طوری پیدا کنید که ذره فقط در جهت y' حرکت کند.
 ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) سرعت u' ذره در چارچوب S' را فقط برحسب متغیر u پیدا کنید.



(۳) با استفاده از نمودار مینکوفسکی برای چارچوب‌های S و S' ، اتساع زمان و متقابل بودن آن نسبت به دو چارچوب را نشان دهید.

پیوست B

یکاهای و ثابتهای فیزیکی

یکاهای هندسی

همانطور که دیدید از بخش ۲.۴.۲ به بعد از مجموعه یکاهای هندسی استفاده شده است. در این یکاهای داریم

$$\begin{aligned}c &= 1 \\ \frac{G}{c^2} &= 1 \\ \frac{2GM}{c^2} &= 2M\end{aligned}$$

که در آن c سرعت نور، G ثابت گرانش نیوتون، و $2GM/c^2$ شعاع شوارتزشیلد است.

ثابتها

برخی از کمیتهای ثابت فیزیکی در مجموعه واحدهای SI که در متون مربوط به نسبت استفاده می شوند:

• سرعت نور: $c = 2/997930 \times 10^8 m/s$

• ثابت گرانش: $G = 6/67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$

• جرم زمین: $M_{\oplus} = 5/977 \times 10^{24} kg$

• جرم خورشید: $M_{\odot} = 1/989 \times 10^{30} kg$

• جرم الکترون: $m_e = 9/1 \times 10^{-31} kg$

• جرم پروتون: $m_p = 1/6725 \times 10^{-27} kg$

• بار الکترون: $e = 1/602 \times 10^{-19} C$

• سال نوری: $lyr = 9/5 \times 10^{15} m$

• پارسیک: $parsec = 3/1 \times 10^{16} m$

پیوست C

پیشوند واحدهای متریک و حروف الفبای یونانی

حروف پر کاربرد الفبای یونانی و تلفظ آنها

حرف کوچک	حرف بزرگ	تلفظ
α		آلفا
β		بتا
γ	Γ	گاما
δ	Δ	دلتا
ϵ		ایپسیلون
ζ		زتا
η		یتا
θ	Θ	تتا
κ		کاپا
λ	Λ	لامبدا
μ		میو
ν		نیو
ξ	Ξ	کسی
π	Π	پی
ρ		رو
σ	Σ	سیگما
τ		تائو
υ	Υ	یوپسیلون
ϕ	Φ	فی
χ		خی
ψ	Ψ	پسی
ω	Ω	اُمیگا

بعضی پیشوندهای واحدهای متریک

نماد	مقدار	پیشوند
f	10^{-15}	فیمتو
p	10^{-12}	پیکو
n	10^{-9}	نانو
μ	10^{-6}	میکرو
m	10^{-3}	میلی
k	10^3	کیلو
M	10^6	مگا
G	10^9	گیگا
T	10^{12}	ترا

پیوست D

مراجع

کتاب نامه

- (۱) “Basic Relativity”, Richard A. Mould, Springer, 1994
- (۲) “Special Relativity”, Ulrich E. Schroder, World Scientific, 1990
- (۳) “Relativity, Groups, Particles”, R.U. Sexl and H. Urbantke, Springer, 2000
- (۴) “Space-Time Physics”, E.F. Taylor, J.A. Wheeler, Freeman and Co., 1992
- (۵) “Introduction to Special Relativity”, W. Rindler, Oxford University Press, 1982
- (۶) “Special Relativity and motions faster than light”, Moses Fayngold, Wiley-VCH, 2002
- (۷) “Lectures on Special Relativity”, M.G. Bowler, Pergamon Press, 1986
- (۸) “Special Relativity”, A.P. French, Nelson Publishers, 1968
- (۹) “Special Relativity: Will it Survive the Next 101 years?”, J. Ehlers, C. Lammerzahn, Springer, 2006
- (۱۰) “Relativity, Special, General, and Cosmological”, W. Rindler, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 2006

وب گاهها

- (۱) یک وب گاه آموزشی: casa.colorado.edu/~ajsh/sr/sr.html
- (۲) شامل زندگی نامه بعضی فیزیکدانان:
www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopic/Special_relativity.html

- (۳) یک خود آموز نسبیت: www.btinternet.com/j.doyle/Sr/sr1.html
- (۴) مبانی تجربی نسبیت: math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/experiments.html
- (۵) تصاویری از دید ناظرهای متحرک نسبیتی: www.tat.physik.uni-tuebingen.de/weiskopf/sr/
- (۶) آزمایشگاه فضازمان: www.cco.caltec.edu/physl/java/physl/Einstein.html
- (۷) منابع تاریخی مختلف و فایل‌های صوتی و تصویری از اینشتین: www.aip.org/history/einstein/ein-info.htm
- (۸) برنامه شبیه سازی حرکت در سرعت‌های بالا و اثرات آن: www.anu.edu.au/physics/savage/TEE
- (۹) عکس‌های جالب از اقامت اینشتین در پرینستون: www.princetonhistory.org
- (۱۰) باز هم شبیه ساز نسبیتی: www.adamauton.com/warp
- (۱۱) آرشیوی از مقالات و نوشته‌های اینشتین: www.alberteinstein.info