بنام خدا

الکترومغناطیس ۲ – نیمسال اول۰۰ — ۹۹

تمرین سری ۵

* هر سوال دارای ۱۰ نمره است.

*سوال ٦ اختیاری است و نمره اضافه برای آن در نظر گرفته خواهد شد.

(۱) سوال ۱۹.۹ فصل ۹ از مرجع اصلی درس.

(۲) سوال ۲۰.۹ فصل ۹ از مرجع اصلی درس.

(۳) سوال ۲۳.۹ فصل ۹ از مرجع اصلی درس.

(٤) سوال ۲۵.۹ فصل ۹ از مرجع اصلی درس.

(٥) در اوایل قرن بیستم درود(Drude) مدلی را برای ویژگی‌های ترابردی فلزات با اعمال نظریه جنبشی بر «گاز» الکترون‌های رسانش مطَرح کرد. برای پاسخ دادن به سوالات، فرض‌های این مدل را در نظر بگیرید:

❋بین برخوردها، الکترون‌های رسانش با سایر الکترون‌ها و یون‌ها برخورد نمی‌کند.

❋ در اثر برخورد الکترون‌های رسانش با یون‌ها (یا پراکندگی از آنها) یک تغییر ناگهانی در سرعت الکترون پدید می‌آید.

❋ این پراکندگی‌ها با احتمال در واحد زمان τ_c^{-1} رخ می‌دهند، که τ_c فاصله زمانی میانگین بین برخوردها است.

الف) فرض کنید میدان الکتریکی مستقل از زمان به فلز اعمال می‌شود. با استفاده از قانون اهم و معاله کلاسیکی حرکت نشان دهید رسانندگی به صورت زیر است:

$$\sigma = \frac{n_e e^۲ \tau_c}{m_e}$$

که در آن n_e چگالی الکترون‌های رسانش، m_e و e و به ترتیب جرم و بار الکترون است.

ب) وابستگی رسانندگی به فرکانس: حال تصور کنید یک موج الکترومغناطیسی به فلز اعمال می‌شود و فرض کنید تغییرات فضایی میدان الکتریکی در مقایسه با طول پویش آزاد الکترون (فاصله بین دو برخورد) قابل اغماض باشد (یعنی می‌توانید میدان را اینگونه در نظر بگیرید: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\circ e^{-i\omega t}$). حال فرض کنید یک نیروی میرا کننده به صورت $-m_e\gamma\bar{\boldsymbol{v}}$ نیز به الکترون وارد می‌شود ($\bar{\boldsymbol{v}}$ سرعت میانگین و γ یک ثابت پدیدارشناختی است). در این وضعیت نشان دهید رسانندگی به صورت زیر است:

$$\sigma(\omega) = \frac{n_e e^۲}{m_e(\gamma - i\omega)}$$

ج) نشان دهید:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma}{۱ - i\omega\tau_c}$$

د) بر اساس این اطلاعات τ_c و γ را برای مس با ویژگی‌های زیر بدست آورید:

$$\sigma = ۶/۵ \times ۱۰^۷ Sm^{-۱} \quad ; \quad \rho = ۸/۹۴ gcm^{-۳} \quad ; \quad \text{atomic mass} = ۶۳/۵ gmol^{-۱}$$

(٦) یک موجبر(wave guide) توخالی را با سطح مقطع تخت اما دلخواه در نظر بگیرید. فرض کنید دیواره‌های این موجبر از یک رسانای ایده‌ال ساخته شده باشد. محیط دربر گرفته شده توسط این موجبر را خلا در نظر بگیرید با ثابت‌های $\epsilon_\circ$ و $\mu_\circ$. محور z را در راستای محور موجبر در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی درون دیواره‌های موجبر صفر هستند ودر نتیجه شرط مرزی زیر را برای دیواره درونی موجبر بدست آورید:

$$E^{\parallel} = ۰ \quad ; \quad B^{\perp} = ۰$$

ب) فرض کنید ما به چنین موج‌های الکترومغناطیسی علاقه‌مند باشیم:

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(x,y,z,t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_{۰}(x,y)e^{i(\pm kz-\omega t)} \quad ; \quad \tilde{\boldsymbol{B}}(x,y,z,t) = \tilde{\boldsymbol{B}}_{۰}(x,y)e^{i(\pm kz-\omega t)}$$

با نوشتن $\tilde{\boldsymbol{E}}_{۰}(x,y)$ و $\tilde{\boldsymbol{B}}_{۰}(x,y)$ به صورت زیر نشان دهید:

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_{۰}(x,y) = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} \quad ; \quad \tilde{\boldsymbol{B}}_{۰}(x,y) = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

$$\left[\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲} + \gamma^۲\right]\psi = ۰$$

که در آن $\gamma^۲ = \omega^۲/c^۲ - k^۲$ و ψ هر یک از E_z و B_z را نمایش می‌دهد.
ج) با استفاده از معادلات کرل ماکسول نشان دهید سایر مولفه‌ها برای موج جلو رونده $(+k)$از معادلات زیر پیروی می‌کنند(برای موج عقب رونده کافی است k را به $-k$ تبدیل کنید):

$$E_x = \frac{i}{\gamma^۲}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)$$
$$E_y = \frac{i}{\gamma^۲}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$
$$B_x = \frac{i}{\gamma^۲}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^۲}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$
$$B_y = \frac{i}{\gamma^۲}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^۲}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

د) نشان دهید می‌توان معادلات قسمت ج را به صورت زیر که به مختصات وابسته نیست، نوشت:

$$\boldsymbol{E}^{\perp} = \frac{i}{\gamma^۲}\left(k\boldsymbol{\nabla}_{\perp}E^{\parallel} - \omega\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\nabla}_{\perp}B^{\parallel}\right)$$
$$\boldsymbol{B}^{\perp} = \frac{i}{\gamma^۲}\left(k\boldsymbol{\nabla}_{\perp}B^{\parallel} + \frac{\omega}{c^۲}\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\nabla}_{\perp}E^{\parallel}\right)$$

که در آن نمادهای $\parallel$ و $\perp$ به ترتیب جهت‌های موازی و عمود بر محور موجبر را نشان می‌دهند؛ برای مثال در اینجا که مختصات دکارتی را انتخاب کردیم $\parallel$: $\hat{z}$ و $\perp$: $\hat{x},\hat{y}$ یا $\boldsymbol{\nabla}_{\perp} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}$.
ه) نشان دهید نمی‌توان در موجبر موجی داشت که در آن هم $E_z = ۰$ و هم $B_z = ۰$ (یعنی اینکه نمی‌توانیم موجی کاملا عرضی داشته باشیم و حتما یکی از مولفه‌ها در راستا انتشار غیر صفر است)