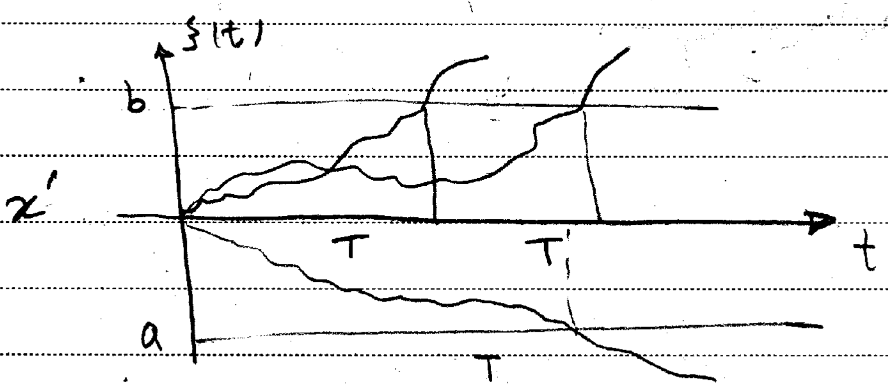
First-Passage-Time فصل ۱۹

فرض کنید که پروسس تصادفی $\xi(t)$ با شرط اولیه $\xi(t=0)=x'$ داده شده باشد. هدف اینست که تابع توزیع زمانی که برای اولین بار پروسس از نواحی $\xi(T)=a$ یا $\xi(T)=b$ عبور می‌کند را بدست آوریم. به این توزیع، توزیع اولین زمان عبور می‌گوئیم. درواقع realization های مختلف $\xi(t)$ در زمانهای مختلف T از این نواحی عبور می‌کنند که در شکل زیر بصورت شماتیک نشان داده شده است.



اینجا سعی می‌کنیم ممان‌ها T، تابع توزیع T، و ممان‌های T را برحسب تابع توزیع شرطی $p(x,t|x',0)$ بدست آوریم.

برای محاسبه این کمیت مثال ساده زیر را درنظر می‌گیریم.

فرض کنید ابتدا مسئله رسیدن به سایت n_p را در یک RW درنظر بگیریم.

بنابراین مشابه عبور از نواحی b,a برای یک RW زمان رسیدن به سایت n_p را حساب کنیم به شرطی که در $t=0$ از سایت n_0 شروع کرده باشد.

trick (کلک) مسئله این است که تابع توزیع $P(n_p,t)=0$ باشد (برای

تمام t) یعنی اگر RW به n_p برسد دیگر ادامه نمی‌دهد. به این شرط مرزی

جاذب می‌گوییم. حال تابع توزیع شرطی $Q_n(t)$ را تعریف می‌کنیم که احتمال

رسیدن به سایت n در زمان t به شرط بودن در n_0 در $t=0$ باشد.

پس $Q_n(t=0)=\delta_{n,n_0}$ و $Q_{n_p}(t)=0$ (شرط مرزی جاذب).

احتمال اینکه RW در زمان t هنوز زنده باشد (به $n=n_p$ نرسیده باشد) عبارت است از

$$P_{n_0}(t)=\sum_{n(\neq n_p)=1}^{M} Q_n(t)$$

حال تعریف می‌کنیم

$$f_{n_0,n_p}(t)=\{\text{احتمال رسیدن به سایت } n_p \text{ در بازه زمانی } t,\ t+dt\}$$

احتمال زنده بودن RW در زمان t برابر است با جمع احتمال اینکه

خواه در بازه t و $t+dt$ بمیرد و یا در زمان $t+dt$ زنده باشد

$$P_{n_0}(t)=f_{n_0,n_p}(t)\,dt+P_{n_0}(t+dt)$$

بسط تیلور $P_{n_0}(t+dt)$ خواهد داد $P_{n_0}(t+dt)=P_{n_0}(t)+\frac{dP_{n_0}(t)}{dt}dt+\dots$

پس $f_{n_0,n_p}(t)$ خواهد بود:

$$f_{n_0,n_p}(t) = -\frac{dP_{n_0}(t)}{dt}$$

متوسط زمان که RW به سایت n_p برسد (از n_0 شروع کند) خواهد بود:

$$\langle t\rangle = \int_0^\infty dt\, t\, f_{n_0,n_p}(t) = \int_0^\infty dt\, P_{n_0}(t)$$

به این روش را می‌توان برای بررسی شده عبور از a و b به دست $f(t)$ نیز انجام داده. در این حالت تابع توزیع شرطی را فرض می‌کنیم که مسئله فاکر-پلانک را ارضا می‌کند. یعنی:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{1|1}(x,t|x',0)}{\partial t} = L_{FP}\, P_{1|1}(x,t|x',0) & \\ P(x,0|x',0) = \delta(x-x') & \text{برای } a<x<b \\ P(x,t|x',0) = 0 & \text{برای } x=a \text{ و } x=b \end{cases}$$

احتمال اینکه سیستم از x' شروع کرده و تا زمان t مرزها را ملاقات نکند عبارت خواهد بود:

$$W(x',t) = \int_a^b P_{1|1}(x,t|x',0)\, dx$$

شبیه به $f_{n_0, n_p}(t)$ ، $\omega(x', T)$ را می‌توانیم از مشتق گیری نسبت به T بدست آورد:

$$\omega(x', T) = -\frac{dW(x',T)}{dT}$$

$$= -\int_a^b \dot{P}(x, T | x', 0)\, dx$$

و مومنت های T را، $T_n(x')$ می‌نامیم یعنی:

$$T_n(x') = \int_0^{\infty} T^n\, \omega(x', T)\, dT \equiv \int_a^b P_n(x, x')\, dx$$

که

$$P_n(x, x') = -\int_0^{\infty} T^n\, \dot{p}(x, T | x', 0)\, dT$$

واضح است که:

$$P_0(x, x') = -\int_0^{\infty} \dot{p}(x, T | x', 0)\, dT = P(x, 0 | x', 0) = \delta(x - x')$$

با انتگرال جزء به جزء P_n خواهد بود

$$P_n(x, x') = n \int_0^{\infty} T^{n-1}\, P(x, T | x', 0)\, dT \qquad n \geq 1$$

اگر به دو طرف اپراتور L_{FP} را اثر دهیم خواهیم داشت.

Year. 200 Month. Day.

$$L_{FP}^{(x)} P_n(x,x') = -n P_{n-1}(x,x') \qquad n \geq 1$$

که بدین معنی است که

$$L_{FP}(x)\, P_1(x,x') = -\delta(x-x')$$

$$L_{FP}(x)\, P_2(x,x') = -2 P_1(x,x')$$

برای محاسبه $\langle T \rangle$ به P_1 نیاز داریم و خود P_1 از وارون گرفتن L_{FP} بدست می‌آید. به همین نحو از P_1، P_2 و ... بدست می‌آیند که در نهایت $\langle T^2 \rangle$ بدست خواهد آمد.

"محاسبه مومنت‌ها برحسب ضرایب سوق و پخش" $\left(D^{(1)}, D^{(2)}\right)$

(دقت کنید کمی نوتاسیون را اینجا عوض شده)

احتمال اینکه سیستم در زمان t در بازه a,b باشد عبارت است از

$$\int_a^b dx'\, P(x',t|x,0) = G(x,t)$$

اگر T زمان ترک ناحیه (a,b) باشد این معادله را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم که:

$$\mathrm{Prob}(T \geq t) = \int_a^b dx'\, p(x',t|x,0)$$

که به این معناست که $\mathrm{Prob}(T \geq t)$ همان $G(x,t)$ می‌شود. برای پروسه همگن

(همگن) خواهیم داشت $p(x',t|x,0) = p(x',0|x,-t)$

که برای $p(x',0|x,-t)$ از معادله FP (backward) می‌توانیم استفاده کنیم.

$$\partial_t p(x,t|x,0) = A(x)\, \partial_x p(x',t|x,0) + \frac{1}{2} B(x)\, \partial_x^2 p(x',t|x,0)$$

که $A = D^{(1)}$, $B = D^{(2)}$ می‌باشد.

بنابراین $G(x,t)$ معادله زیر را ارضا می‌کند:

$$\partial_t G(x,t) = A(x)\, \partial_x G(x,t) + \frac{1}{2} B(x)\, \partial_x^2 G(x,t)$$

با شرط اولیه $p(x',0|x,0) = \delta(x-x')$

که برای G خواهیم داشت
$$\begin{cases} G(x,0) = 1 & a \leq x \leq b \\ \quad = 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

و اگر $x=a$ و $x=b$ باشد ذره (پروسه) جذب خواهد شد پس

$$\mathrm{Prob}(T \geq t) = 0 \quad \text{when } x = a \text{ or } b$$

$$G(a,t) = G(b,t) = 0$$

و نیز $T(x) = \langle T \rangle$ عبارت است از

$$T(x) = -\int_0^\infty t\, \partial_t G(x,t)\, dt = \int_0^\infty G(x,t)\, dt$$

و ممنت $\langle T^n \rangle = T_n(x)$ عبارت است از

$$T_n(x) = \int_0^\infty t^{n-1}\, G(x,t)\, dt.$$

حال میتوانیم معادله دیفرانسیل $T(x)$ را بنویسیم:

از معادله زیر از 0 تا ∞ نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم.

$$\partial_t G(x,t) = A(x)\,\partial_x G(x,t) + \frac{1}{2} B(x)\, \partial_x^2 G(x,t)$$

خواهیم داشت: $\int_0^\infty \partial_t G(x,t)\, dt = G(x,\infty) - G(x,0) = -1$

و سمت راست منجر به معادله تحول $T(x)$ خواهد شد.

$$(1) \qquad A(x)\,\partial_x T(x) + \frac{1}{2} B(x)\, \partial_x^2 T(x) = -1$$

با شرط مرزی $T(a) = T(b) = 0$. برای ممنت nام نیز مشابه این خواهیم داشت.

$$-n\, T_{n-1}(x) = A(x)\,\partial_x T_n(x) + \frac{1}{2} B(x)\, \partial_x^2 T_n(x)$$

جواب معادله (1)

$\psi(x)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\psi(x) = \exp\left\{ \int_a^x dx' \left[\frac{2A(x')}{B(x')} \right] \right\}$$

و $T(x)$ بصورت زیر برحسب ψ قابل نوشتن است:

$$T(x) = \frac{2\left[\left(\int_a^x \frac{dy}{\psi(y)}\right)\int_x^b \frac{dy'}{\psi(y')}\int_a^{y'} \frac{dz\,\psi(z)}{B(z)} - U\right]}{\int_a^b \frac{dy}{\psi(y)}}$$

$$U = \left(\int_x^b \frac{dy}{\psi(y)}\right)\int_a^x \frac{dy'}{\psi(y')}\int_a^{y'} \frac{dz\,\psi(z)}{B(z)}$$

حالات خاص: "One Absorbing Barrier"

فرض کنید شرط مرزی a را انعکاسی در نظر بگیریم. بدین معنی که

$$\partial_x G(a,t) = 0$$
$$G(b,t) = 0$$

معادله (1) را با این شرط مرزی می‌توانیم حل کنیم. جواب عبارت است که

$$\begin{cases} a & \text{انعکاسی} \\ b & \text{جاذب} \\ a<b \end{cases}$$ برای $T(x) = 2\int_x^b \frac{dy}{\psi(y)} \int_a^y \frac{\psi(z)}{B(z)}\,dz$

و

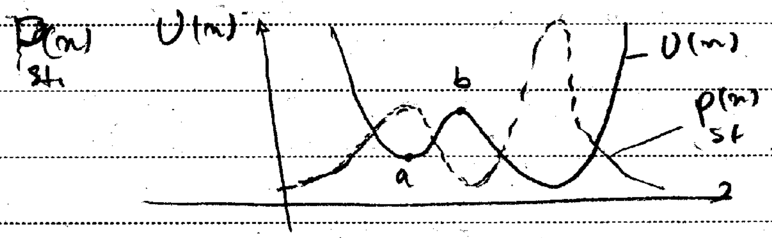
$$\begin{cases} b & \text{انعکاسی} \\ a & \text{جاذب} \\ a<b \end{cases}$$ $T(x) = 2\int_a^x \frac{dy}{\psi(y)} \int_y^b \frac{\psi(z)}{B(z)}\,dz$

کاربرد: (فرار از سد پتانسیل)

فرض کنید که تابع توزیع یک ذره $P(x,t)$ معادله FP زیر را ارضا کند

$$\partial_t P(x,t) = \partial_x \left[U'(x) p(x,t) \right] + D \, \partial_x^2 P(x,t)$$

که $U(x)$ دارای Min و Max مثلاً به صورت زیر باشد



جواب حالت پایای مسئله عبارت است از

$$P_{st}(x) = N e^{-\frac{U}{D}}$$

در واقع محتمل‌ترین حالت چپ و راست b می‌باشد. حال می‌خواهیم متوسط زمانی که ذره از سمت چپ فرار می‌کند. در واقع زمان متوسط عبور از a به x که $x \simeq b$ می‌باشد را باید حساب کنیم. حالت مسئله در جواب

$$T(x) = 2\int_x^b \frac{dy}{\psi(y)} \int_a^y \frac{\psi(z)}{B(z)} dz \qquad \begin{cases} a & \text{انعکاسی} \\ b & \text{جذب} \\ a < b & \end{cases}$$

با جاگذاری $b \to x_0$ ، $a \to -\infty$ و $x \to a$ خواهیم داشت

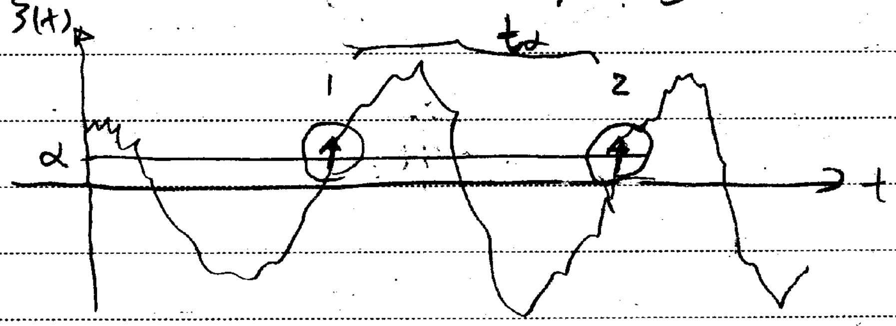
$$T(a\to x_0) = \frac{1}{D}\int_a^{x_0} dy\ \exp\left(\frac{U(y)}{D}\right)\int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{U(z)}{D}\right) dz$$

"level crossing"

فرض کنید برای یک فرآیند تا این سوال را مطرح کنیم که به طور متوسط این فرآیند تعداد

متقاطع $\xi(t)=\alpha$ را با شیب مثبت در بازه ملاقات کند چه زمانی خواهد بود. در شکل

زیر محل تلاقی $\xi(t)=\alpha$ با شیب مثبت نشان داده شده است.



در این شکل t_α زمان عبور از همان تراز $(\xi(t)=\alpha)$ و هدف ما محاسبه t_α

می‌باشد. برای محاسبه فرض کنید که فرآیند تصادفی $\xi(t)$ به ازای یک پیکربندی

(realization) به طول T دارای n_α^+ تراز عبور با شیب مثبت داشته

باشد. می‌توان متوسط آن مثل n_α^+ را با N_α^+ نشان داد که

$$N_\alpha^+ = E[n_\alpha^+]$$

برای فرآیند ما انتظار داریم که اگر بازه T به $2T$ افزایش یابد $N_\alpha^+(2T)$

با $2N_\alpha^+(T)$ برابر باشد: یعنی

$$N_\alpha^+(2T) = 2N_\alpha^+(T)$$

از جواب $N_\alpha^+(T) \sim T^\beta$ به طور کلی هم این رابطه β را برابر واحد خواهد داد یعنی

$$N_\alpha^+(T) \sim T$$

و ضریب تناسب را : ν_α^+ تعریف میکنیم که فرکانس وقوع خواهد بود.

$$N_\alpha^+ = \nu_\alpha^+ T$$

عکس ν_α^+ یعنی T_α^+ زمان متوسط عبور از تراز α خواهد بود. حال سعی میکنیم ν_α^+ را از تابع توزیع $P(\xi, \dot\xi)$ محاسبه کنیم. شرط آنکه پروسه در زمان dt از تراز α عبور کند عبارت است از

شرط:

1) $\xi(t) < \alpha$ در زمان شروع

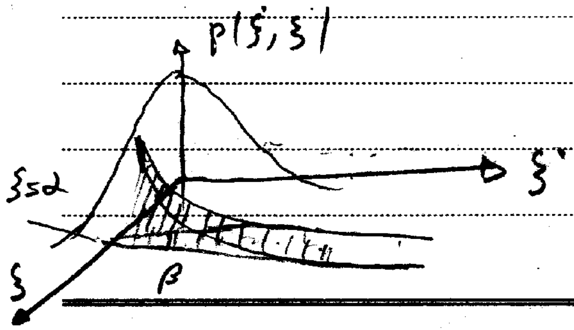
2) $\dot\xi > \dfrac{\alpha - \xi(t)}{dt}$ (یعنی $\xi(t+dt) > \alpha$)

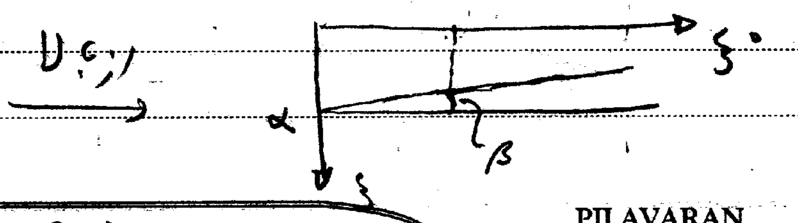
دلیل وجود شرط دوم است که باید پروسه در $\xi(t+dt)$ از α بزرگتر باشد تا بتوان گفت در مدت dt از تراز α رد شده.

که بدین معناست که $\xi(t+dt) > \alpha \Rightarrow \xi(t) + dt\,\dot\xi(t) > \alpha$

$$\Rightarrow \xi(t) > \alpha - dt\,\dot\xi(t) \quad \text{یا} \quad \dot\xi > \frac{\alpha - \xi(t)}{dt}$$

تعداد این حالتها که شرط 1 و 2 را ارضا میکند را می‌توان از تابع توزیع Joint $P(\dot\xi, \xi)$ شمارش کرد.





برای هر $\dot{\xi}$ ای ξ از $\alpha-\dot{\xi}\,tg\beta$ تا α تغییر می‌کند. به تقریب مرتبه اول

$tg\beta = dt$ خواهد بود. پس یکبار حالات زیر تعیین ها کار زده عبارت است از

$$N_\alpha^+ = \int_0^\infty d\dot{\xi} \int_{\alpha-\dot{\xi}\,tg\beta}^{\alpha} d\xi\; P(\xi,\dot{\xi})$$

در حد $dt \to 0$ ناحیه انتگرال‌گیری برای ξ بسیار محدود خواهد بود و می‌توانیم

$P(\xi,\dot{\xi})$ را در $\xi=\alpha$ محاسبه کنیم یعنی $P(\xi,\dot{\xi}) \simeq P(\alpha,\dot{\xi})$.

در $dt \to 0$ این اختلاف در $\dot{\xi}$ های کوچک بسیار کم بوده و در $\dot{\xi}$ های بزرگ

که ناحیه انتگرال‌گیری $(\alpha, \alpha-\dot{\xi}\,tg\beta)$ بزرگ می‌شود، خود تابع توزیع Joint

به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین

$$N_\alpha^+ = \int_0^\infty d\dot{\xi} \int_{\alpha-\dot{\xi}\,tg\beta}^{\alpha} d\xi\; P(\alpha,\dot{\xi}) = tg\beta \int_0^\infty d\dot{\xi}\; \dot{\xi}\; P(\alpha,\dot{\xi})$$

$$N_\alpha^+ = dt \int_0^\infty d\dot{\xi}\; \dot{\xi}\; P(\alpha,\dot{\xi})$$ ؛

که ν_α^+ عبارت خواهد بود از:

$$\nu_\alpha^+ = \int_0^\infty P(\alpha,\dot{\xi})\; \dot{\xi}\; d\dot{\xi}$$

و $\frac{1}{\nu_\alpha^+} = T_\alpha^+$ می‌باشد. اثبات برای $\xi(t)$ گسسته را می‌توانید در مقاله زیر ببینید

level crossing Analysis of Stock Markets, Jafari, etal.
J. Stat. Mech. (2006) P06008.

روش دیگر برای ν_α^+

فرض کنید پیوسته $x(t)$ در لحظه t_i مقدار x_i را دارد بنابراین ν_α^+ عبارت خواهد بود از

$$\nu_\alpha^+ = P(x_i > \alpha \ و \ x_{i-1} < \alpha)$$

تابع توزیع تجمعی P را می‌توان برحسب Joint به صورت زیر نوشت

$$\nu_\alpha^+ = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} P(x_i, x_{i-1})\, dx_i\, dx_{i-1}$$

خود Joint را می‌توان به شرطی تبدیل کرد.

$$\nu_\alpha^+ = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} P_{1|1}(x_i, t_i \mid x_{i-1}, t_{i-1})\, P(x_{i-1})\, dx_i \times dx_{i-1}$$

حال اگر برای پیوسته ای توانسته‌ایم $D^{(1)}$ و $D^{(2)}$ مربوطه را حساب کنیم

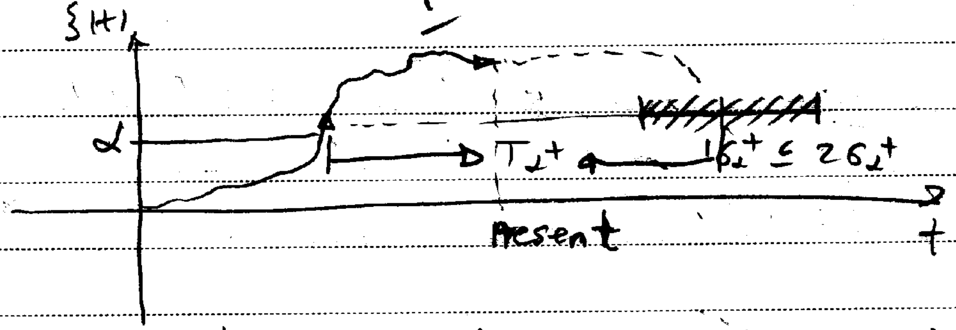
پس $P_{1|1}(x_i|x_{i-1})$ و $P_1(x_{i-1})$ نیز خواهیم داشت. برای $t_i = t_{i-1}+1$ داریم

$$P(x_i, t_i \mid x_{i-1}, t_{i-1}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^{(2)}(x_{i-1})}} \times$$

$$\exp\left[-\frac{\left(x_i - x_{i-1} - D^{(1)}(x_{i-1})\right)^2}{4 D^{(2)}(x_{i-1})}\right]$$

$$P(x_{i+1}) = P(x) = \frac{N}{D^{(2)}(x)} \exp\left[\int^{x} \frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')}\, dx'\right]$$ و

پس در واقع با داشتن $D^{(1)}$ و $D^{(2)}$، ν_α^+ و T_α^+ قابل محاسبه
است. نکته مهم در آنالیز تقاطع تراز (level crossing) است که زمانی
T_α^+ و خطای مربوط σ_α^+ محاسبه شود می‌توان انتظار داشت که
پروسه به طور متوسط T_α^+ از تراز α عبور می‌کند و اگر در بازه $1\sigma_\alpha^+$ تا
$2\sigma_\alpha^+$ مسئله را بررسی کنیم بازه‌ای که پروسه با احتمال 68% و
95%) این تراز را رد می‌کند را می‌دانیم.



یعنی پروسه در ناحیه هاشور خورده این تراز را دوباره رد می‌کند.