فصل ۲

توابع توزیع Joint و شرطی

همانطوریکه در فصل قبل دیدیم دانستیم تابع احتمال $p(x)$ به صورت زیر تعریف شد

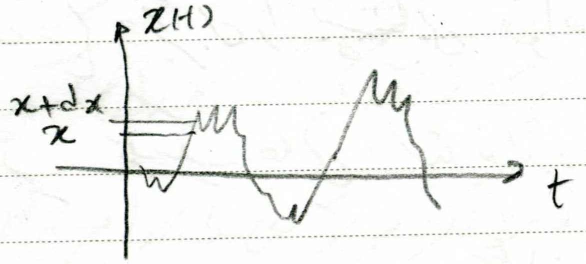
$$P_{rob}\left(x \leqslant x(t) \leqslant x+dx \right) = p(x)\,dx \qquad 2-1$$

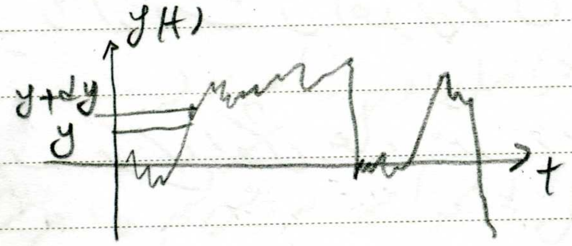
تابع توزیع $P(x)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx \qquad 2-2$$

که در واقع $p(x) = \frac{dP(x)}{dx}$

حال فرض کنید که دو پروسه تصادفی $x(t)$ و $y(t)$ را مطابق شکل زیر داشته باشیم





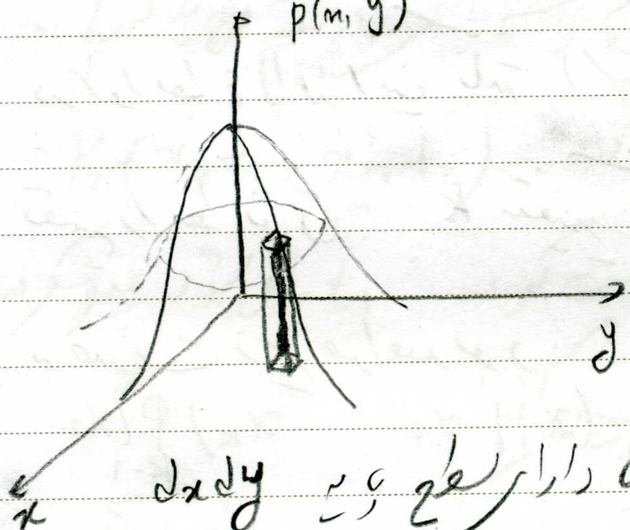
حال این سئوال را میشود مطرح کرد که احتمال اینکه $x(t)$ بین x و $x+dx$ و همزمان $y(t)$ بین y و $y+dy$ چقدر است؟ این احتمال را به صورت زیر نشان میدهیم

$$P_{rob}\left(x \leqslant x(t) \leqslant x+dx \; ; \; y \leqslant y(t) \leqslant y+dy \right)$$

دانسیته احتمال Joint به این صورت تعریف می‌شود

2-3 $\quad Prob\,(x < x(t) < x+dx \;,\; y < y(t) < y+dy) \equiv P(x,y)\,dx\,dy$

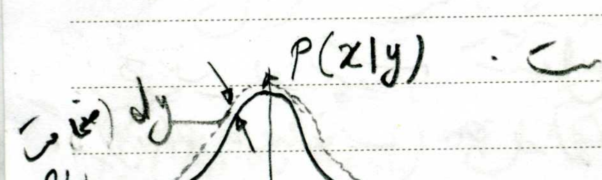
توجه کنید که $y(t)$ می‌تواند مثلاً $x(t+\tau)$ باشد که به نوبه خود کمیت تصادفی خواهد بود. دانسیته احتمال $P(x,y)$ در حالت کلی یک رویه خواهد بود که در شکل مقابل بصورت شماتیک نمایش داده شده است



احتمال (2-3) عبارت خواهد بود از

$$Prob\,(x < x(t) < x+dx \;,\; y < y(t) < y+dy) = \frac{\text{حجم منشور}}{\text{حجم کل زیر رویه}} \qquad \underline{2-4}$$

اگر منشوری که در شکل مقابل نمایش داده شده دارای سطح $dx\,dy$ باشد هر برشی از آن به ازای y ثابت یک توزیع را توصیف می‌کند که شرطی خواهد بود. در حالت کلی برش به ازای y ثابت به شکل مقابل است که تابعی از x خواهد بود.



دانستهٔ احتمال شرطی که شکل ضمیمه مثل عبارت خواهد بود از

$$P(x|y)\,dx = \frac{\text{حجم مشعور}}{\text{حجم داخل نوار}} = \frac{P(x;y)\,dx\,dy}{\left(\int P(x;y)\,dx\right)\,dy} \qquad (2\text{-}5)$$

$$P(x,y) = \frac{P(x;y)\,dx\,dy}{P(y)\,dy} \rightarrow P(x|y) = \frac{P(x;y)}{P(y)} \qquad (2\text{-}6)$$

که این ارتباط بینِ تابع توزیع (دانسته) شرطی و Joint خواهد بود یعنی

$$P(x;y) = P(x|y)\,p(y) \qquad (2\text{-}7)$$

در روابط بالا از این نکته استفاده شده که $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y)\,dx = P(y)$

تعمیم رابطهٔ فوق به k متغیر که k تایی Joint را تعریف می‌کند

به صورت زیر خواهد بود:

$$\underbrace{P_k}_{\text{Joint } k \text{ متغیره}}(x_1, x_2, \dots x_k) = \underbrace{P_{1|k-1}}_{\text{یکی به شرط } k-1 \text{ تا}}(x_1|x_2 \dots x_k)\,\underbrace{P_{k-1}}_{\text{Joint } k-1 \text{ متغیره}}(x_2 \dots x_k)$$

(2-8)

2-9

توابعِ دو پروسه مستقل

اگر $p(x,y)$ با مضروب $p(x)$ در $p(y)$ برابر باشد یعنی $p(x,y) = P(x)\,P(y)$

دو پروسه را مستقل می‌نامیم برای مثال همانطور که در رابطه اشاره شد $y(t)$ را می‌شود

$x(t')$ در نظر گرفت که به صورت زیر می‌توان شرط مستقل بودن

$x(t_1)$ و $x(t_2)$ را به صورت زیر نوشت.

$$P_2(x_1, t_1 ; x_2, t_2) = P_1(x_1, t_1)\, P_1(x_2, t_2) \quad (2\text{-}10)$$

که $P_1(x_1, t_1)$ یعنی دانسیته احتمال تک متغیره پروسه تصادفی $x(t)$

در زمان t_1 مقدار x_1 را داشته باشد و $P_2(x_1, t_1 ; x_2, t_2)$

دانسیته احتمال Joint پروسه $x(t)$ است که در زمان t_1 مقدار x_1 و در زمان t_2

مقدار x_2 را داشته باشد.

واضح است که رابطه 2-10 برای هر پروسه ای درست نمی باشد.

اگر پروسه پایا باشد انتظار می رود که $P_2(x_1, t_1 ; x_2, t_2)$

تابع $t_2 - t_1$ باشد که به این معنی است که t_1 را می شود صفر گرفت

(شیفت زمانی) و $t_2 = t$ تعریف کنیم.

یعنی $P_2(x_1, 0 ; x_2, t)$

حال می توان برای شکل برای پروسه ای که پایا است طول

همبستگی تعریف کرد. زمان T ای که بتوان $P_2(x_1, 0 ; x_2, t)$

را بصورت ضرب $P(x_1, 0)\, P(x_2, t)$ نوشت طول همبستگی پروسه

خواهیم گفت: یعنی

$$P(x_1, 0 ; x_2, T) = P_1(x_1, 0)\, P_1(x_2, T) \quad (2\text{-}11)$$