Year. Month. Date. ( )

فصل ۲۱ (تابع تقیاسی - تعاریف تقیاسی گسسته - FBM , FGN)

رابطه α از DFA در حالت سیگنال FBM , FGN

تابع تقیاسی : تولید نویز FBM از طریق شبیه سازی

فرض کنید تابع $g(t)$ تحت تبدیل تقیاسی $\left\{ \begin{array}{l} t \to bt \\ b>1 \end{array} \right.$ به صورت زیر رفتار کند.

$$g(bt) = k(b)\, g(t)$$

که $k(b)$ یک ضریب عددی که به تقیاس بستگی دارد. برای راحتی نرمالیزاسیون را انتخاب می‌کنیم که $g(1)=1$ باشد. قرار دادن $t=1$ در رابطه بالا خواهد داد:

$$g(b) = k(b)$$

برای همه $b>1$ درست می‌باشد. این رابطه نشان می‌دهد که $k(u)$ و $g(u)$ توابع
یکی می‌باشند پس

$$g(xy) = g(x)\, g(y)$$

حال سعی می‌کنیم این معادله را حل کنیم. با مشتق گیری از طرفین نسبت به y خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial y} g(xy) = x\, g'(xy) = g(x)\, g'(y)$$

که g' مشتق g نسبت به xy می‌باشد. برای $y=1$ خواهیم داشت

$$x\, g'(x) = g(x)\, g'(1)$$

که جواب خواهد داد

$$\ln g(x) = g'(1) \ln x + C$$

که $\tau=-g'(1)$. به این ترتیب تابع همگن به تقارن مقیاسی پیوسته در τ را نمای مقیاسی

بحرانی می‌نامیم. به روش دیگر می‌توان این رفتار مقیاسی را بدست آورد.

تقارن ها نسبت و برای ... تغییر مقیاس ... e^{μ} نشان داد.

پس

$$① \quad g(t) = f(\mu)\, g(e^{\mu} t)$$

که $f(\mu)=k^{(\ln b)^{-1}}$ می‌باشد. به ازای هر μ، $g(t)$ به صورت زیر

$$g(t) = t^{-\tau}$$

که $\tau = \ln f/\mu$ می‌باشد. این را از جایگذاری جواب $g(t)=t^{-\tau}$ در

رابطه $g(t)=f(\mu)\,g(e^{\mu}t)$ بدست آورده‌ایم.

(Discrete Scale Invariance)

(ناوردایی مقیاسی گسسته)

سیستم‌های بسیاری وجود دارند که ناوردایی مقیاسی را که در ترکیب قبل پیوسته

در نظر گرفته شد به ازای مقادیر خاصی از یک تغییر مقیاس سیستم را ناوردا

می‌کند. به این تقارن تقارن گسسته می‌گوییم. به ازای μ های ممکن

این متغیر به صورت $\mu = n\mu_1$ که n یک عدد صحیح (مثبت) و μ_1 یک

عدد ثابت می‌باشد که مقیاس گسسته b_1 به صورت زیر با μ_1 رابطه دارد

$$b_1 = e^{\mu_1}$$

ساده‌ترین مثالی که حالت تغییر گسسته مقیاس برای پدیده‌های فیزیکی که روی ساختارهای شبه فراکتال می‌باشد مثلاً مدل Ising و Potts روی شبکه فراکتال

مثال دیگری که اخیراً توسط Sornette معرفی شده‌اند وجود این فرایند در بازارهای بورس قبل از (Crash) و سیگنال‌های لرزه‌نگارها قبل از زلزله‌های بزرگ می‌باشد.

جواب عمومی معادله (1) با $\mu = n\mu_1$ به دست آید

$$g(t) = t^{-\tau} P\left(\frac{\ln t}{\mu_1}\right)$$

که $P(y)$ تابع دلخواه با پریود $\underline{\underline{1}}$ می‌باشد. با جایگذاری این جواب در رابطه (1) داریم

$$t^{-\tau} P\left(\frac{\ln t}{\mu_1}\right) = t^{-\tau} f(n\mu_1)\, e^{-n\mu_1\tau} P\left(\frac{\ln(e^{n\mu_1} t)}{\mu_1}\right)$$

$$P\left(\frac{\ln t}{\mu_1}\right) = f(\mu)\, e^{-\mu\tau} P\left(n + \frac{\ln t}{\mu_1}\right)$$

پس

$$\tau = -\frac{\ln f(\mu)}{\mu}$$

و

$$P\left(\frac{\ln t}{\mu_1}\right) = P\left(n + \frac{\ln t}{\mu_1}\right)$$

یعنی تابع P یک تابع پریودیک با پریود 1 باشد.

اگر تابع P را بسط فوریه دهیم

$$P\left(\frac{\ln t}{\mu_1}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left[2n\pi i (\ln t)/\mu_1\right]$$

و در $g(t)$ جایگذاری کنیم خواهیم داشت.

$$g(t) = t^{-\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left[2\pi n i \,(\ln t)/\mu_1\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, t^{-\tau} \, t^{\frac{2\pi n i}{\mu_1}}$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, t^{-\tau + \frac{2\pi i n}{\mu_1}}$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای سیستمی که تحت تقارن مقیاس گسسته وجود دارد نماهای

مختلط از $n=-\infty, +\infty$ وجود دارد یعنی

$$\tau_n = -\tau + \frac{2\pi i n}{\mu_1}$$

برای $g(t)$ حقیقی $c_n^* = c_{-n}$ خواهد بود. برای سیستمی که در تابع

$g(t)$ حول نقطه t^* رفتار مقیاسی پیدا می‌کند $g(t)$ دارای بسط زیر خواهد بود

$$g(t) = A + B(t_c - t)^{-\tau} + C_1 (t_c - t)^{-\tau} \times \cos\left(\ln(t_c - t)\frac{2\pi}{\mu_1}\right) + \cdots$$

محاسبه تمام ضرایب برای $g(t)$ کار ساده‌ای نیست. کاهش پارامترهای این سری را محقق کرد

و جزئیاتش را با تعریف ضرایب اولیه جبران کرد. یعنی

$$g(t) = A_1 + B_1 (t_c - t)^{\beta} + C_1 (t_c - t)^{\beta}$$
$$\times \cos\left(\omega_1 \ln(t_c - t) - \phi_1\right)$$

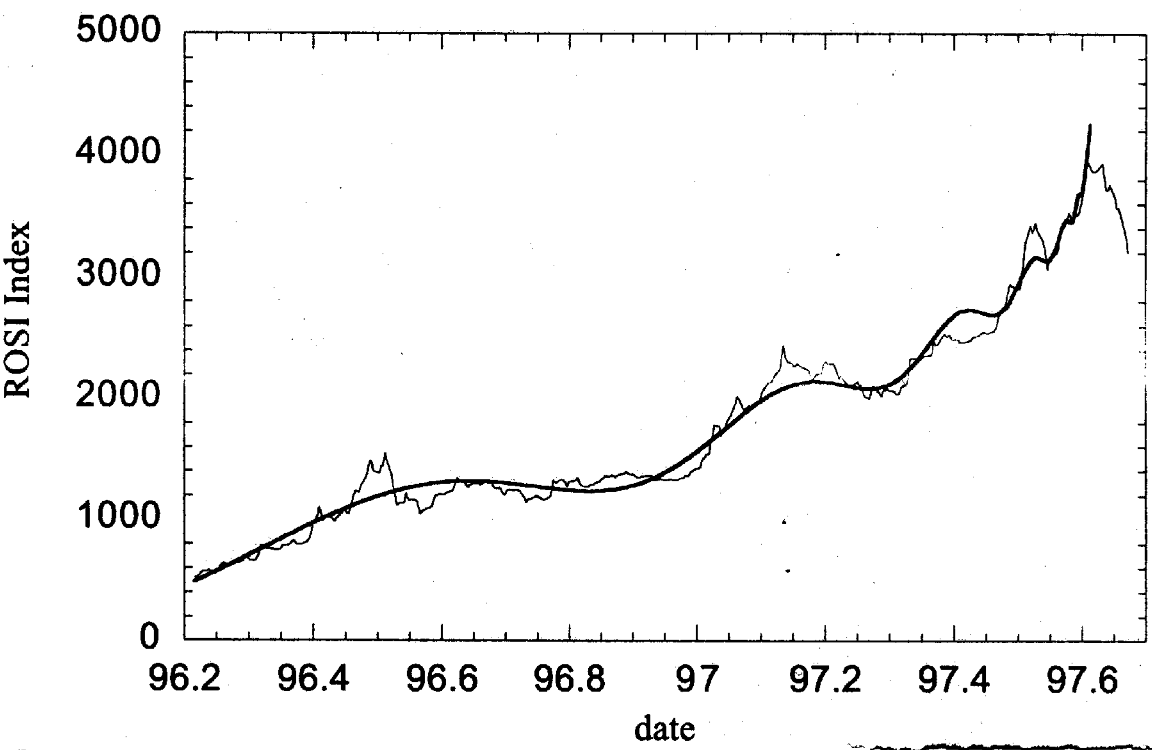
در شکل زیر رفتار افزایش سهام ROSI بر حسب تاریخ نشان داده شده است:

با فرض $g(t) = \ln p(t)$ که $p(t)$ ارزش سهام است و نسبت $\ln p(t)$ به

بالا مقادیر پارامترها به صورت زیر بدست می‌آیند

$A_1 \simeq 4254$, $B_1 \simeq -3166$ $C_1 \simeq 246$ $\beta \simeq 0.4$

$t_c \simeq 97.61$, $\phi_1 = 0.44$, $\omega_1 \simeq 7.7$



(خودتشابهی در سری‌های زمانی و فرآیندهای تصادفی)

فرآیند تصادفی را خودتشابه می‌گوییم اگر فرآیندهای $x(t)$ و $b^{-a}x(bt)$ از نظر آماری نیز قابل تمییز دادن نباشند. b فاکتور مقیاس و a نمای مقیاس نام دارد. بدین معنی که

$$\mathrm{Prob}\left\{x(t) \leqslant x\right\} = \mathrm{Prob}\left\{b^{-a}x(bt) \leqslant x\right\}$$

خود واریانس این فرآیند با مقیاس b به صورت زیر رفتار مقیاسی خواهد داشت:

$$\mathrm{Var}\left\{x(bt)\right\} = b^{2a}\,\mathrm{Var}\left\{x(t)\right\}$$

گاهی تساوی آماری را با $\overset{law}{=}$ نشان می‌دهیم و این مفهوم را خواهد داشت که از نظر آماری $x(t)$ و $b^{-a}x(t)$ هم ارز هستند و می‌توان در توابع همبستگی جایگزین همدیگر شوند. پس

$$x(t) \overset{law}{=} b^{-a}x(bt)$$

Fractional Brownian Motion (FBM) and Fractional Gaussian Noise (FGN)

یکی از معروف ترین فرآیندهایی که خاصیت خودشباهتی دارد FBM می باشد. برای این فرآیند تعاریف مختلفی وجود دارد که یکی از مهم ترین تعاریف آن که توسط (Mandelbrot و Van Ness) ارائه شده است: فرآیند FBM؛ $B_H(t)$ نشان داده می‌شود و تعریف $B_H(t)$ عبارت است از

$$B_H(t) = \left(\int_{-\infty}^{0} \left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) + \int_{0}^{t} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right) \qquad (1)$$

که $dB(s) = dW(s)$ می باشد و $W(s)$ فرآیند وینر است. در ضمن $0<H<1$ می باشد و تابع $\Gamma(\alpha)$ عبارت است از

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x)\, dx$$

خواص فرآیند FBM

1) $B_H(0) = 0$ و $\langle B_H(t) \rangle = 0$ می باشد.

برای اثبات این در تعریف $B_H(t)$ زمان (پارامتر t) را صفر می‌کنیم

$$B_H(0) = \left(\int_{-\infty}^{0} \left[(-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) + \int_{0}^{t=0} (-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right) = 0$$

حال $\langle B_H(t)\rangle$ را

$$\langle B_H(t)\rangle = \left(\int_{-\infty}^{0}\left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}}-(-s)^{H-\frac{1}{2}}\right]\langle dB(s)\rangle - \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}}\langle dB(s)\rangle\right)$$

از فرمول‌های گذشته و نتیجه می‌دانیم $\left\{\begin{array}{l}\langle dW\rangle = 0\\ dt\langle p(t)\rangle = 0\end{array}\right.$ $\langle dB(s)\rangle = 0$ و در نتیجه

$$\langle B_H(t)\rangle = 0$$

2) $H=\frac{1}{2} \longrightarrow B_H(t) = W(t)$

برای $H=\frac{1}{2}$ بررسی FBM همان $W(t)$ یعنی حرکت براونی می‌شود چون

$$B_{H=\frac{1}{2}}(t) = \int_0^t dB(s) = \int_0^t dB(s)$$

$$= \int_0^t dW(s) = W(t) - 0 = W(t)$$

3) $E\left[B_H^2(t)\right] = t^{2H} \qquad t \geq 0$

برای تعیین این $B_H(t)$ در معادله (1) را به توان دو رسانده و از اینکه

$$\langle dB(s)\, dB(s')\rangle = \langle dW(s)\, dW(s')\rangle$$

$$= ds\, ds'\langle p(s)\, p(s')\rangle = ds\, ds'\, \delta(s-s')$$

PAPCO

4) $\langle B_H^{2k+1}(t) \rangle = 0$ و $P(B_H) =$ Gaussian

چون تعداد $(2k+1)$: متوسط $p(s)$ ها تعداد فرد و چون تبدیل از وینر به B_H یک

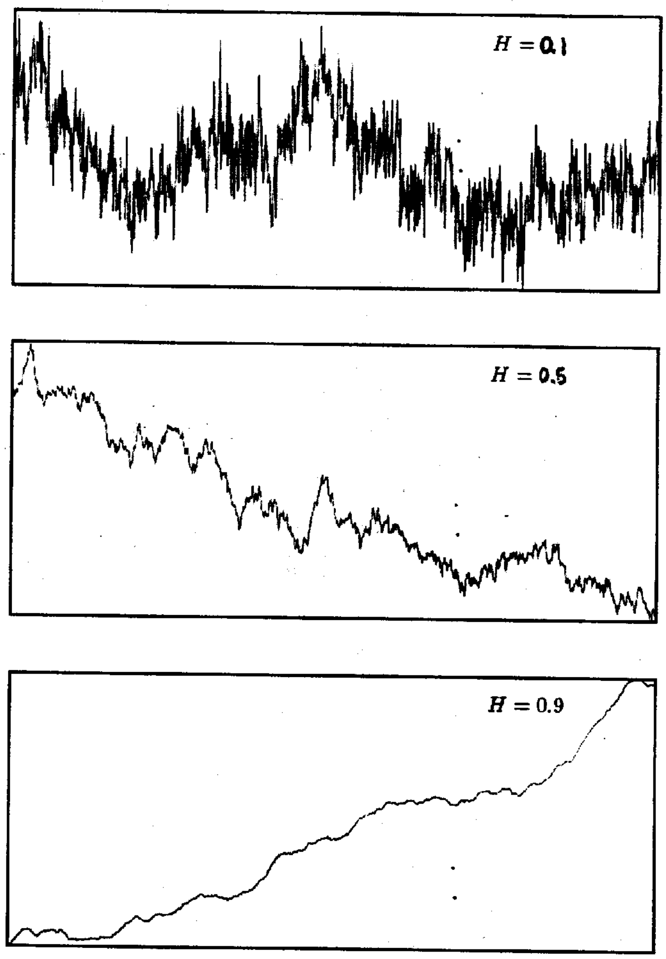
تبدیل خطی (انتگرالی) می‌باشد انتظار داریم صفر شود $p(s)$ و $W(s)$ ها مستقل : $B_H(t)$

بشود. حالا سراغ $\langle B_H^4(t) \rangle$ می‌رویم: $\langle p(s_1)p(s_2)p(s_3)p(s_4) \rangle$ داریم که

از قضیه Wick تابع همبستگی برحسب توابع $\delta(s_1-s_2)\,\delta(s_3-s_4) + \dots$

می‌شود. در واقع برحسب حالات زوج $B_H(t)$ تابع همبستگی برحسب مرتبه $\underline{\underline{2}}$

می‌باشد یعنی این ثابت می‌کند که $P(B_H) =$ Gaussian می‌باشد.



سیگنال براونی کسری برای H های مختلف:

$$\begin{cases} H = 0.1 \\ H = 0.5 \\ H = 0.9 \end{cases}$$

نمودار اگر تفاضل دو زمان را در نظر بگیرید (increment) که این است دارای فاز ... توضیح (5)

$$B_H(t) - B_H(s)$$

نیز ... باشد. واریانس این نتیجه را ... این تغییر را از روی واریانس $B_H(t)$ بدست آوریم

داریم $$\langle B_H^2(t) \rangle = t^{2H}$$

پس $t \to \lambda t$

$$\langle B_H^2(\lambda t) \rangle = \lambda^{2H} t^{2H}$$

پس $$B_H(\lambda t) = \lambda^H B_H(t)$$

که H واریانس وزن نشان $B_H(t)$ کمیت می‌شود. پس اگر فرض کنیم باشد

$$\langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle$$

برحسب $|t-s|$ از روی واریانس که واریانس‌ها نیز به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle = |t-s|^{\alpha}$$

تحت t, s به $\lambda s, \lambda t$ و $B_H(\lambda t) = \lambda^H B_H(t)$ داریم.

$$\lambda^{2H} \langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle = \lambda^{\alpha} |t-s|^{\alpha}$$

پس $\alpha = 2H$ خواهد بود. بنابراین

$$\langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle = |t-s|^{2H}$$

این نتیجه را می‌توان نتیجه گرفت که بدست آوردیم تفاضل $B_H(t) - B_H(s)$ از ... (1) ... 21-7

6) $\langle B_H(t)\, B_H(s)\rangle = \frac{1}{2}\left[|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right]$: $\boxed{B_H(t)\ \text{مسئله}}$

اثبات =

$$\langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle =$$

$$= \langle \underset{t\geq 0}{B_H^2(t)} \rangle + \langle \underset{s\geq 0}{B_H^2(s)} \rangle - 2\langle B_H(t)\, B_H(s)\rangle$$

$$= t^{2H} + s^{2H} - 2\langle B_H(t)\, B_H(s)\rangle = |t-s|^{2H}$$

پس

$$\langle B_H(t)\, B_H(s)\rangle = \frac{1}{2}\left[|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right]$$

---

7) محاسبه $\langle X_H(t)\, X_H(s)\rangle$ از $\langle B_H(t)\, B_H(s)\rangle$

که $X_H(t) = \frac{dB_H(t)}{dt}$ می‌باشد. به $X_H(t)$ Fractional Gaussian Noise, (FGN) گویند.

$$\langle X_H(t)\, X_H(s)\rangle = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\langle B_H(t)\, B_H(s)\rangle$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}|t-s|^{2H}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dv} + \frac{d}{du}\right)\left(\frac{d}{dv} - \frac{d}{du}\right)|u|^{2H}$$

که $v = t+s$, $u = t-s$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{du^2}|u|^{2H} = \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(2H\,|u|^{2H-1}\operatorname{sign}(u)\right)$$

PAPCO

$$\langle x_H(t)\, x_H(s)\rangle = 2H\,(2H-1)\,|t-s|^{2H-2} + 2H\,|t-s|^{2H-1}\,\delta(t-s)$$

برای $H=\frac{1}{2}$ جمله اول صفر می‌شود پس

$$\langle x_H(t)\, x_H(s)\rangle\Big|_{H=\frac{1}{2}} = \delta(t-s) \qquad \boxed{\text{برای } H=\tfrac{1}{2}}$$

که مثل یک پروسه نویز سفید خواهد بود. برای $H\neq\frac{1}{2}$ جمله اول $U^{\alpha}\delta(U)$؛

$\alpha=2H-1>0$ صفر خواهد بود. پس

$$\langle X_H(t)\, X_H(s)\rangle = 2H\,(2H-1)\,|t-s|^{2H-2} \qquad \boxed{\text{برای } H\neq\tfrac{1}{2}}$$

(8) Spectral Density

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = C\, 2H(2H-1)\, \omega^{1-2H} \sim \frac{1}{\omega^{\beta}}$$

$H\neq\frac{1}{2}$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{2H-2}\, e^{-iy}\, dy$$ C عبارت است

که $\beta=2H-1$ می‌باشد.

$1-2H$

برای $H<\frac{1}{2}$ تابع همبستگی $X_H(t)$ منفی می‌شود که گویای گسسته می‌باشند.

" $H=\frac{1}{2}$ نویز سفید

" $1>H>\frac{1}{2}$ تابع همبستگی مثبت و همبستگی بلند برد خواهد داشت.

Year. Month. Date. ( )

در حقیقت از رابطه $\langle B_H^2(t)\rangle = t^{2H}$ برای $H=\frac{1}{2}$ همان حرکت براونی

و نیز خواهد بود که $\langle B_{\frac{1}{2}}^2(t)\rangle \sim t$. برای $H>\frac{1}{2}$ تغییرات را ابر نفوذی

Super-Diffusive و برای $H<\frac{1}{2}$ Sub-Diffusive می‌گوییم.

به همین ترتیب می‌شود نشان داد که بدست می‌آید $X_H(t)$ از بدست آوردن

بدست می‌آید که نشان می‌دهد که $P(X_H)$ گاوسی می‌باشد.

$B_H(t)$ را FBM و $X_H(t)$ را FGN می‌گوییم.

۹

خواص آماری $X_H(t)$:

a) $\langle X_H(t)\rangle = 0$

چون

$$\langle X_H(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle B_H(t)\rangle = \frac{d}{dt}(0) = 0$$

که می‌دانیم $\langle B_H(t)\rangle = 0$.

b) تعریف $X_H(t)$ برحسب یک سری نویز:

$$X_H(t) = \frac{dB_H(t)}{dt} = \left(\int_{-\infty}^{0}\left(H-\frac{1}{2}\right)(t-s)^{H-3/2}\,dB(s) + \int_{0}^{t}\left(H-\frac{1}{2}\right)(t-s)^{H-3/2}\,dB(s)\right)$$

(استنباط و ارتباط DFA و هارست H ، Hurst ، FBM و FGN α)

در این بخش سعی می‌کنیم نشان دهیم که بین نمای DFA ، α و هارست H برای سیگنال‌های FBM و FGN روابط زیر برقرار می‌باشد.

اگر برای داده‌های ترانسمیشن نمای DFA ، α را تعیین کنیم بسته به مقدار α پردازش را طبقه‌بندی می‌کنیم. اگر $0<\alpha<1$ باشد پردازش FGN و اگر $1<\alpha<2$ باشد پردازش FBM خواهد بود که اولی ایستا و دومی غیر ایستا است.

اگر FBM باشد ارتباط α ، H عبارت است از $\alpha=H+1$ و برای FGN $\alpha=H$ می‌باشد. طیف توانی نیز داریم طیف عبارت است از $\beta=2H+1$ برای FBM ، $\beta=2\alpha-1=2H-1$ برای FGN . معمولاً

برای FBM نمای H از روش SWV (scaled windowed variance) بهتر تخمین زده می‌شود و برای FGN روش Dispersional Analysis که در زیر توضیح داده شده بهتر جواب می‌دهد. روش Disp_A به این صورت است که کمیت $\bar{\mu}(m)^2$ را مطابق زیر محاسبه می‌کنیم

$$\bar{\mu}(m)^2 = \frac{1}{\left[\frac{N}{m}\right]-1} \sum_{i=1}^{\text{تعداد پنجره‌ها}} \underbrace{(\mu_i-\bar{\mu})^2}_{\text{متوسط کل پنجره‌ها}} \sim m^{2H-2}$$

که $\mu_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} x_j$ تعریف می‌شود.

$$\tilde{\mu}(m) \sim m^{H-1}$$

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

حال سعی می‌کنیم رابطهٔ بین $h(2)$ در DFA1 و نمای H یک سیگنال

FBM را محاسبه کنیم. نشان دادیم که برای چنین پروسس غیر ایستا تابع

افت و خیز زیر ($\frac{1}{q}$)

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} \left[F^2(s,\nu) \right]^{q/2} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

برای $q=2$ ثابت: $s^{h(q)}$ که $h(q=2) = H+1$ می‌شود.

فرض کنید $x(k)$ یک پروسس FBM باشد پس تابع

$$Y(i) = \sum_{k=1}^{i} \{ x(k) - \langle x \rangle \}$$

جمع یک سیگنال FBM خواهد بود. در DFA1

$$F^2(s) = \left\langle \frac{1}{s} \sum (Y_t - y_\nu)^2 \right\rangle$$

که $y_\nu = a_\nu + b_\nu i$ (تابع فیت) می‌باشد. ضرایب a_ν, b_ν از

$Y(i)$ به صورت زیر بدست آمده که در s های بزرگ تقریب زده

شده‌اند

$$b_\nu = \frac{\sum_{i=1}^{s} Y(i)\, i - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} Y(i) \sum_{i=1}^{s} i}{\sum_{i=1}^{s} i^2 - \frac{1}{s} \left[\sum_{i=1}^{s} i \right]^2}$$

$$\simeq \frac{\sum_{i=1}^{s} Y(i)\, i - \frac{s}{2} \sum_{i=1}^{s} Y(i)}{s^3/12}$$

$$a_v = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} Y(i) - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} i \approx \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} Y(i) - \frac{s}{2}$$ و

نیز برابر

$$\langle F^2(s,v)\rangle = \left\langle \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left(Y(i)-a-bi\right)^2\right\rangle$$

$$\approx \left\langle \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} Y^2(i)\right\rangle + \langle a^2\rangle + \frac{s^2}{3}\langle b^2\rangle$$

$$-2\left\langle \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{s} Y(i)\right\rangle - 2\left\langle \frac{b}{s}\sum_{i=1}^{s} i\,Y(i)\right\rangle + s\langle ab\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} Y^2(i)\right\rangle - \frac{4}{s^2}\left\langle \left[\sum_{i=1}^{s} Y(i)\right]^2\right\rangle$$

$$-\frac{12}{s^4}\left\langle \left[\sum_{i=1}^{s} i\,Y(i)\right]^2\right\rangle + \frac{12}{s^3}\left\langle \sum_{i=1}^{s} i\,Y(i)\sum_{i=1}^{s} Y(i)\right\rangle$$

$$= A/s - \frac{4}{s^2}B - \frac{12}{s^4}D + \frac{12}{s^3}C$$

حال A ، B ، C ، D را برای سری FBM , FGN را بررسی کنیم

تفاضل $Y(i)$ ها را با $x(i)$ عبارت کنند

$$x(i) = Y(i) - Y(i-1)$$

$$U(i) = x(i) - x(i-1)$$

که اولی FBM و دومی FGN می باشد. برای هر مثال $Y(i)$ ، $x(i)$ عبارت کنند

$$\langle x(i)\,x(j)\rangle = \frac{\sigma^2}{2}\left[i^{2H} + j^{2H} - |i-j|^{2H}\right]$$

$$\langle Y(i)\,Y(j)\rangle = \frac{\sigma^2}{(H+1)^2}\,(ij)^{H+1}$$

که $\sigma^2 = \langle U^2(i)\rangle$ می‌باشد. با استفاده از این معادلات برای توابع همبستگی

بدست می‌آوریم که

$$\langle [F^2(s,\nu)]\rangle_\nu = C_H\, S^{2(H+1)}$$

که C_H عبارت است از

$$C_H = \frac{\sigma^2}{(2H+3)(H+1)^2} - \frac{4\sigma^2}{[(H+1)(H+2)]^2}$$

$$- \frac{12\sigma^2}{[(H+1)(H+3)]^2} + \frac{12\sigma^2}{(H+1)^2(H+2)(H+3)}$$

پس

$$h(q=2) = H+1$$

می‌باشد. ضرایب A ، B ، C ، D نیز عبارتند از

$$A = \frac{S^{2H+2}}{2H+1} \qquad B = \frac{S^{2H+3}}{2H+2} \qquad C = \frac{S^{2H+4}}{4}\left(\frac{2}{H+1} - \frac{1}{2H+1}\right)$$

$$D = \frac{S^{2H+5}}{4(H+1)}\left(1 - \frac{1}{(H+2)(2H+1)}\right)$$

برای FGN $\underline{h(q=2) = H}$ بدست می‌آید.

7. B. B. Mandelbrot, "Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **31**, 271–285 (1975).
8. B. B. Mandelbrot and M. S. Taqqu, "Robust R/S analysis of long-run serial correlation," in *Proceedings of the 42nd Session of the International Statistical Institute*, Manila, 1979. Bulletin of the International Statistical Institute. Vol. 48, Book 2, pp. 69–104.
9. B. B. Mandelbrot and J. R. Wallis, "Computer experiments with fractional Gaussian noises," Parts 1, 2 and 3, *Water Resources Research* **5**, 228–267 (1969).
10. R. McGill, J. W. Tukey and W. A. Larsen, "Variation of box plots," *The American Statistician* **32**, 12–16 (1978).
11. C. K. Peng, S. V. Buldyrev, M. Simons, H. E. Stanley and A. L. Goldberger, "Mosaic organization of DNA nucleotides," *Physical Review* **E49**, 1685–1689 (1994).
12. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, "Linear models with long-range dependence and finite or infinite variance," in *New Directions in Time Series Analysis*, Part 2, eds. D. Brillinger, P. Caines, J. Geweke, E. Parzen, M. Rosenblatt and M. S. Taqqu (New York, 1992), pp. 325–340. IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 46, Springer-Verlag.
13. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes: Stochastic Models with Infinite Variance* (Chapman & Hall, New York, London, 1994).
14. V. Teverovsky and M. S. Taqqu, "Testing for long-range dependence in the presence of shifting means or a slowly declinng trend using a variance-type estimator," preprint.

APPENDIX

We provide here a theoretical justification to the "Residuals of Regression" method described in Sec. 3.5. For simplicity, we suppose that the time series is fractional Gaussian noise with unit variance (the proof for fractional ARIMA is essentially the same).

Recall that, to apply this method, one divides the time series into blocks of size m. Within each block one computes the partial sums $\{Y_t,\ t = 1, \ldots, m\}$, fits a regression $a+bt$ to these partial sums, and then computes the sample variance. The claim is that the expectation of the sample variance is asymptotically proportional to m^{2H}.

Theorem

$$E\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}(Y_t - a - bt)^2 \sim C_H m^{2H} \quad \text{as } m \to \infty,$$

where

$$C_H = \left(\frac{2}{2H+1} + \frac{1}{H+2} - \frac{2}{H+1}\right). \tag{5.1}$$

Proof. Since the data is supposed to be fractional Gaussian noise, the partial sums Y_i's are fractional Brownian motion, and thus their covariance is given by Eq. (2.1). Moreover, the slope b and intercept a of a least-squares line on Y_t from 0 to m are given by:

$$b = \frac{\sum_{t=1}^{m} Y_t t - \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} Y_t \sum_{t=1}^{m} t}{\sum_{t=1}^{m} t^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{t=1}^{m} t\right)^2} \simeq \frac{\sum_{t=1}^{m} Y_t t - \frac{m}{2}\sum_{t=1}^{m} Y_t}{m^3/12}, \tag{5.2}$$

$$a = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} Y_t - \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} bt \simeq \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} Y_t - \frac{mb}{2}. \tag{5.3}$$

21-18

In the equation below, all of the sums are from $t = 1$ to $t = m$.

$$
\begin{aligned}
&E \sum (Y_t - a - bt)^2 \\
&= E\left(\sum Y_t^2 + \sum a^2 + \sum (bt)^2 - 2\sum aY_t - 2\sum btY_t + 2\sum abt\right) \\
&\simeq E\left(\sum Y_t^2\right) + mE(a^2) + \frac{m^3}{3}E(b^2) - 2E\left(a\sum Y_t\right) - 2E\left(b\sum tY_t\right) + m^2E(ab) \\
&= E\left(\sum Y_t^2\right) + mE\left(\frac{1}{m}\sum Y_t - \frac{mb}{2}\right)^2 + \frac{m^3}{3}E(b^2) - 2E\left(b\sum tY_t\right) \\
&\quad - 2E\left(\frac{1}{m}\left(\sum Y_t\right)^2 - \frac{m}{2}b\sum Y_t\right) + m^2E\left(\frac{1}{m}b\sum Y_t - \frac{mb^2}{2}\right) \\
&= E\left(\sum Y_t^2\right) + \frac{1}{m}E\left(\sum Y_t\right)^2 - mE\left(b\sum Y_t\right) + \frac{m^3}{4}E(b^2) + \frac{m^3}{3}E(b^2) \\
&\quad - \frac{2}{m}E\left(\sum Y_t\right)^2 + mE\left(b\sum Y_t\right) - 2E\left(b\sum tY_t\right) + mE\left(b\sum Y_t\right) - \frac{m^3}{2}E(b^2) \\
&= E\left(\sum Y_t^2\right) + \frac{m^3}{12}E(b^2) + mE\left(b\sum Y_t\right) - \frac{1}{m}E\left(\sum Y_t\right)^2 - 2E\left(b\sum tY_t\right) \\
&= E\left(\sum Y_t^2\right) + \frac{m^3}{12}\left[\left(\frac{12}{m^3}\right)^2 E\left(\sum tY_t - \frac{m}{2}\sum Y_t\right)^2\right] \\
&\quad + m\frac{12}{m^3}E\left(\sum tY_t\sum Y_t - \frac{m}{2}\left(\sum Y_t\right)^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{m}E\left(\sum Y_t\right)^2 - 2\frac{12}{m^3}E\left(\left(\sum tY_t\right)^2 - \frac{m}{2}\sum tY_t\sum Y_t\right) \\
&= E\left(\sum Y_t^2\right) + \frac{12}{m^3}E\left(\sum tY_t\right)^2 - \frac{12}{m^2}E\left(\sum tY_t\sum Y_t\right) + \frac{3}{m}E\left(\sum Y_t\right)^2 \\
&\quad + \frac{12}{m^2}E\left(\sum tY_t\sum Y_t\right) - \frac{6}{m}E\left(\sum Y_t\right)^2 - \frac{1}{m}E\left(\sum Y_t\right)^2 - \frac{24}{m^3}E\left(\sum tY_t\right)^2 \\
&\quad + \frac{12}{m^2}E\left(\sum tY_t\sum Y_t\right) \\
&= E\left(\sum Y_t^2\right) - \frac{4}{m}E\left(\sum Y_t\right)^2 - \frac{12}{m^3}E\left(\sum tY_t\right)^2 + \frac{12}{m^2}E\left(\sum tY_t\sum Y_t\right) \\
&= A - \frac{4}{m}B - \frac{12}{m^3}D + \frac{12}{m^2}C.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

In this equation we have represented several terms by A, B, C, and D respectively, and we will calculate them below.

$$A := E\left(\sum_{t=1}^{m} Y_t^2\right) = \sum_{t=1}^{m} t^{2H} \simeq \frac{m^{2H+1}}{2H+1}.$$

21 – 19

$$B := E\left(\sum_{t=1}^{m} Y_t\right)^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} E(Y_jY_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}(j^{2H}+k^{2H}-|j-k|^{2H})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(j^{2H}+k^{2H}) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k<j}(j-k)^{2H}$$

$$\simeq \frac{m^{2H+2}}{2H+1} - \sum_{j=1}^{m} j^{2H+1}\int_0^1 (1-x)^{2H}dx$$

$$\simeq m^{2H+2}\left(\frac{1}{2H+1} - \frac{1}{(2H+2)(2H+1)}\right) = \frac{m^{2H+2}}{2H+2}.$$

$$C := E\left(\sum_{t=1}^{m} Y_t \sum_{t=1}^{m} tY_t\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}(j^{2H+1}+k^{2H}j-j|j-k|^{2H})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(j^{2H+1}+jk^{2H}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k<j} j(j-k)^{2H} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k>j} j(j-k)^{2H}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(\frac{m^{2H+3}}{2H+2} + \frac{m^{2H+3}}{2(2H+1)}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} j^{2H+2}\left(\int_0^1 (1-x)^{2H}dx - \int_0^1 x(1-x)^{2H}dx\right)$$

$$\simeq \frac{m^{2H+3}}{4}\left(\frac{1}{H+1} + \frac{1}{2H+1}\right) - \frac{m^{2H+3}}{2(2H+3)}\left(\frac{1}{2H+1} - \frac{1}{(2H+2)(2H+1)}\right)$$

$$= \frac{m^{2H+3}}{4}\left(\frac{2}{H+1} - \frac{1}{2H+1}\right).$$

Next

$$D := E\left(\sum_{t=1}^{m} tY_t\right)^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}(j^{2H+1}k + jk^{2H+1} - jk|j-k|^{2H})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(j^{2H+1}k + jk^{2H+1}) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k<j} jk(j-k)^{2H}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(\frac{m^{2H+4}}{2H+2}\right) - \sum_{j=1}^{m} j^{2H+3}\int_0^1 x(1-x)^{2H}dx$$

$$\simeq \frac{m^{2H+4}}{4(H+1)} - \frac{m^{2H+4}}{2H+4}\left(\frac{1}{2H+1} - \frac{1}{2H+2}\right)$$

$$= \frac{m^{2H+4}}{4(H+1)}\left(1 - \frac{1}{(H+2)(2H+1)}\right).$$

Therefore, going back to Eq. (5.4):

$$E\sum_{t=1}^{m}(Y-a-bt)^2 = A - \frac{4}{m}B + \frac{12}{m^2}C - \frac{12}{m^3}D = C_H m^{2H+1},$$

where C_H is given in Eq. (5.1). Dividing the terms in this last expression by m yields the result.

21-20

(تولید FBM از طریق بهینه سازی "optimization problem")

فرض کنید سیگنالی را می‌خواهیم تولید کنیم که دارای تابع همبستگی

$$C(r) = C_1 r^{2H'}$$

باشد. تابع فاصله (انرژی) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E = \sum_r \left| \ln C(r) - 2H' \ln r - \ln C_1 \right|$$

هدف پیدا کردن آرایه‌ای مثلاً یک سری $(x_1 \ldots x_N)$ است که دارای تابع همبستگی $C(r)$ باشد.

1) ابتدا یک نویز سفید را تولید کرده و به جای x_iها قرار می‌دهیم و $C(r)$ را حساب کرده و E_0 را محاسبه می‌کنیم

2) مقادیر r را $r = 1, m, m^2, m^3, \ldots, \frac{N}{2}$ را انتخاب می‌کنیم که زمان اجرا را کم کنیم

3) دمای T_0 را برابر E_0 تعریف می‌کنیم که مثل روش مونت کارلو (متروپلیس) بتوانیم جواب را همگرا کنیم.

④ داده سایت‌ها را مطابق زیر با احتمال یکسان می‌توانیم از چپ یا راست
به‌روز کنیم؛ یعنی

$$\begin{cases} x_{new}(i) = x(i+1) + R \\ x_{new}(i) = x(i-1) + R \end{cases} \quad \text{با احتمال} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

دلیل اینکه راست که تقارن چپ و راست وجود داشته باشد که انتظار
داریم در سیستم‌های واقعی وجود داشته باشد. R را یک نویز سفید
با واریانس 1 انتخاب می‌کنیم.

با هر Update کردن ΔE را حساب می‌کنیم اگر منفی بود بازتوزیع را
تبدیل می‌کنیم و اگر مثبت بود از الگوریتم متروپولیس استفاده می‌کنیم.
به این صورت با احتمال $e^{-\Delta E/T}$ این به‌روز شدن را نیز تبدیل می‌کنیم.

⑤ دما را به صورت $T = 0.99\,T_0$ کاهش می‌دهیم و همین کار را تکرار
می‌کنیم.

⑥ اگر $C_1 = 2H(2H-1)$ باشد و $2H' = 2H - 2$
باشد، $x(i)$ ها به FGN تبدیل می‌شوند و انتگرال این‌ها
FBM تولید خواهد کرد.

این سوال قابل تعمیم به هر بعدی است. H. Hamzehpour & M. Sahimi, PRE 73 056121 (2006)