فصل ۵ چگالی طیف Power-Spectral-Density

در عمل برای محاسبه دانسیته طیف همیشه با تعداد محدودی از داده ها ($T$) سروکار داریم.
انتظار می رود که هر چقدر $T$ به سمت بینهایت میل کند به رفتار فرکانسی سیگنال
به صورت دقیق تری پی ببریم. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه
می کنیم:

فرض کنید که $x(t)$ به صورت $x(t) = a\sin(\omega_0 t + \varphi)$ باشد که $\varphi$ کمیت
تصادفی با احتمال یکنواخت $P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ باشد. $R_x(\tau)$ و $S_x(\omega)$ را محاسبه
می کنیم:

متوسط آنسامبل $R_x(\tau)$ عبارت خواهد بود از:

$$R_x(\tau) = a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, d\varphi\, \sin(\omega_0 t + \varphi)\, \sin[\omega_0 (t+\tau) + \varphi]$$

$$= \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

که $R_x(\tau)$ یک تابع پریودیک با پریود $\frac{2\pi}{\omega_0}$ خواهد بود. برای این مثال
$R_x(\tau)$ کاملاً معین است پس $S_x(\omega)$ را می شود دقیق محاسبه کرد. دقت می کنیم که

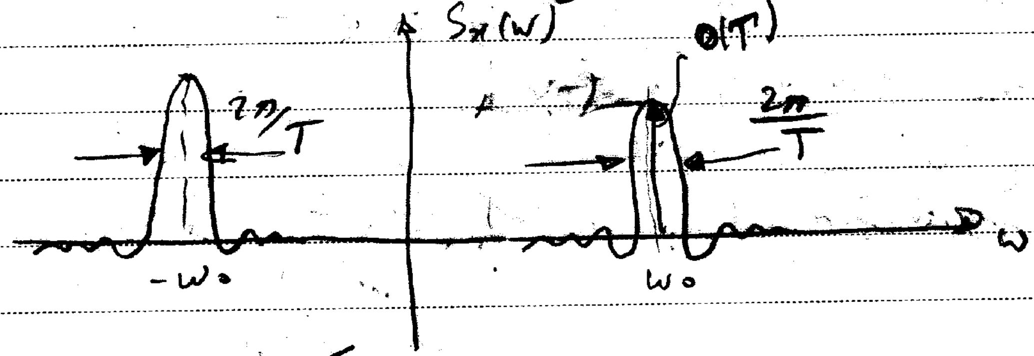
$$S_x(\omega) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

بازه زمانی را ($2T$) فرض کنیم.

$$= \frac{a^2}{4\pi} \int_0^{T} \{ \cos(\omega - \omega_0)\tau + \cos(\omega + \omega_0)\tau \}\, d\tau$$

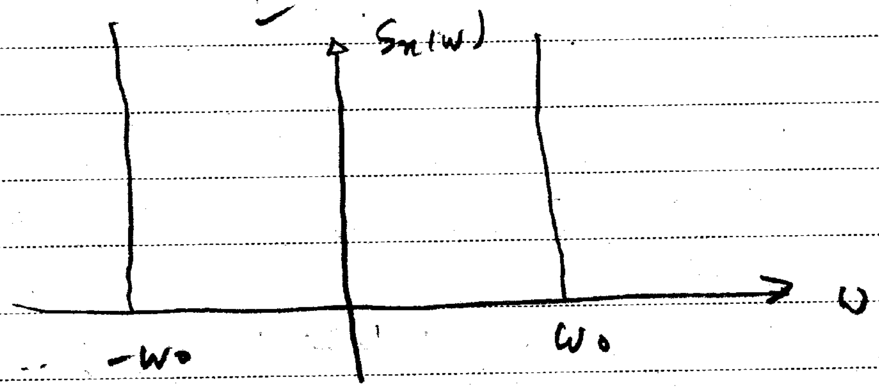
$$= \frac{a^2}{4\pi}\left\{ \frac{\sin(w-w_0)T}{w-w_0} + \frac{\sin(w+w_0)T}{w+w_0} \right\}$$

که شکل $S_x(w)$ به صورت زیر خواهد بود




حال اگر T را به بینهایت میل دهیم به جای این شکل $S_x(w)$ دو تابع دلتای

دیراک که یکی در $w_0$ و $-w_0$ خواهیم داشت.




این پدیده اصطلاحاً به smear شدن دانسیته طیفی به خاطر محدود

بودن زمان اندازه‌گیری T مربوط می‌شود.

ماشینه‌ای نشان داد که (فصل II کتاب random-Vibr... )

که اثر T محدود دانسیته طیفی را به فرم زیر تبدیل می‌کند.

$$\tilde{S}(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{T-|\tau|}{T} R_x(\tau) e^{-iw\tau} d\tau$$

گاهی $S_x(w)$ را حد تابع شکل در $T\to\infty$ تعریف می‌کنیم.

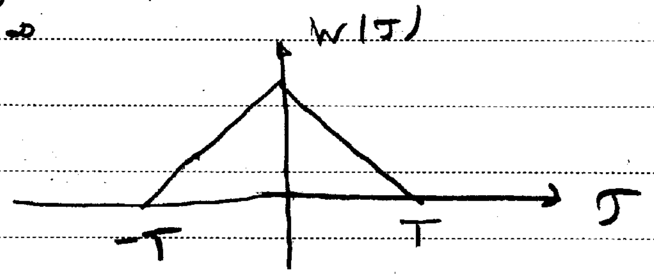
$$S_x(w) = \lim_{T\to\infty} \tilde{S}(w)$$

اثر وجود تابع $\frac{T-|\tau|}{T}$ در انتگرال $\tilde{S}_x(w)$ به میزان پنجره‌ای دانسیته طیفی عمل خواهد کرد. برای ادامه این نکته به این صورت عمل می‌کنیم

$w(\tau)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$w(\tau) = \frac{T-|\tau|}{T}$$

که $w(\tau)=w(-\tau)$ و $w(\tau=0)=1$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}|w(\tau)|d\tau<\infty$ خواهد بود.




حال به زوج تبدیل فوریه $w(\tau)$ را حساب کنیم.

$$W(w) = \frac{1}{2\pi}\int w(\tau)\, e^{-iw\tau}\, d\tau \quad ; \quad w(\tau) = \int W(w)\, e^{iw\tau}\, dw$$

بنابراین

$$\tilde{S}(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} w(\tau) R_x(\tau)\, e^{-iw\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \left\{ \int W(w_1)\, e^{iw_1\tau}\, dw_1 \right\} R_x(\tau)\, e^{-iw\tau}\, d\tau$$

$$= \int \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi}\int R_x(\tau)\, e^{-i(w-w_1)\tau}\, d\tau \right\}}_{\text{دانسیته طیفی واقعی}} W(w_1)\, dw_1$$

$$\tilde{S}_x(\omega) = \int S_x(\omega - \omega_1)\, W(\omega_1)\, d\omega_1$$

$\Omega = \omega - \omega_1$

$$\tilde{S}_x(\omega) = \int W(\omega - \Omega)\, S_x(\Omega)\, d\Omega$$

استفاده می شود که در حقیقت $W(\omega-\Omega)$ تیزتر شود، $\tilde{S}_x(\omega)$

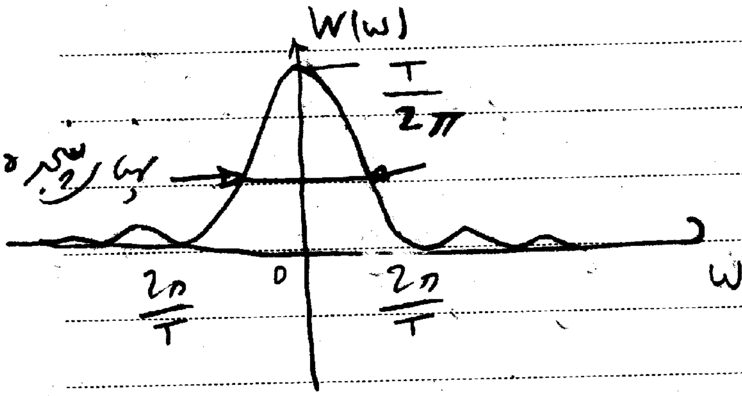
برابر $S_x(\omega)$ شد. حال می توان $W(\omega)$ را حساب کرد.

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \left\{\frac{T-|\tau|}{T}\right\} e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{T}{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}\right)$$

Spectral window func

شکل $W(\omega)$ عبارت است از




روش های محاسبه $S_x(\omega)$

1) $S_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \tilde{S}_x(\omega)$

2) $S_x(\omega) = \frac{2\pi}{T}\,|X(\omega)|^2$

3) Maximum Entropy spectral analysis

نکته‌ای که در روش ۱ لازم است رعایت شود یک فوریه گسسته از $R_x(\tau)$ است که بصورت

زیر خواهد بود: $$R_r = \frac{1}{N-r}\sum_{s=0}^{N-r-1} x_s\, x_{s+r}$$

سپس $\hat{S}_x(\omega)$ محاسبه شده و برای T های مختلف رفتار $S_x(\omega)$ را در

$T \to \infty$ محاسبه می‌کنیم.

برای روش ۲ نیز به $X(\omega)$ خواهیم داشت. الگوریتم‌های اتوماتیک و سریع

برای محاسبه $X(\omega)$ از روش تبدیل فوریه سریع ... شد.

(FFT) "The Fast Fourier Transformation"

فرض کنید که تعداد داده‌های تحت بررسی به صورت توانی از ۲ باشد یعنی

$N = 2^m$. داده‌هایی که در اختیار داریم نزدیک‌ترین m مربوط را انتخاب کنیم

گاهی مجبوریم تعدادی را کنار بگذاریم تا m چنین برای کار کنیم. مرسوم است

که اگر به m بزرگتری نزدیک باشد تعدادی صفر به آخر آرایه

به تعداد لازم اضافه کنید تا با m بزرگتر کار کنیم. نکته مهم در

FFT این است که تبدیل فوریه تک آرایه یک عضوی با خودش برابر است

یعنی $$X_k = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} x_r\, e^{-i\frac{2\pi k r}{N}}$$

می‌بینیم که اگر $N=1$ باشد: $X_1 = x_1$. هنر کار در این است که

تعداد N داده (سری زمانی) را حداکثر به زیر گروه های تک عضوی تبدیل کنیم واضح است

از نکته اشاره شده که عناصر N/2 برابر با تبدیل فوریه خودشان خواهد بود

بدین صورت بدون محاسبه تبدیل فوریه ! $X_K$ محاسبه می شود.

مجموعه سری زمانی $\{x_r\}$ را به دو سری زمانی $\{y_r\}$ , $\{z_r\}$ تقسیم کنیم.

که r های زوج در $\{y_r\}$ و r های فرد در $\{z_r\}$ قرار می دهیم

$$\{x_0, x_1, x_2, \text{---}\} = \{x_r\}$$

$$\{x_0, x_2, x_4, \text{---}\} = \{y_r\}$$

$$\{x_1, x_3, x_5, \text{---}\} = \{z_r\}$$

پس $X_k$ را خواهیم داشت:

$$X_k = \frac{1}{N}\left\{\sum_{r=0}^{N/2-1} x_{2r}\, e^{-i\frac{2\pi k(2r)}{N}} + \sum x_{2r+1}\, e^{-i\frac{2\pi k}{N}(2r+1)}\right.$$

$$= \frac{1}{N}\times\frac{2}{2}\left\{\sum_{r=0}^{N/2-1} y_r\, e^{-i\frac{2\pi kr}{N/2}} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \sum z_r\, e^{-i\frac{2\pi kr}{N/2}}\right.$$

$$X_k = \frac{1}{2}\left\{Y_k + e^{-i\,2\pi k/N}\, Z_k\right\}$$

که برای $k=0,\dots,\frac{N}{2}-1$ نوشته شده.

دقت می کنیم که در سری زمانی $\{y_r\}$ و $\{z_r\}$ تعداد $\frac{N}{2}$ داده است

و بنابراین k مربوط به اندیس $X_k$ از صفر تا $\frac{N}{2}-1$ تغییر خواهد کرد.

برای kهای بین ($\frac{N}{2} \to N-1$) باید از فرض پریودیک بودن $Y_k$ و $Z_k$
استفاده کنیم:

$$\begin{cases} Y_{k-\frac{N}{2}} = Y_k \\ Z_{k-\frac{N}{2}} = Z_k \end{cases} \quad \text{برای} \quad \frac{N}{2} \leqslant k \leqslant N-1$$

یعنی

$$\begin{cases} X_k = \frac{1}{2}\left\{Y_k + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} Z_k\right\}; & k=0,\dots,\frac{N}{2}-1 \\ X_k = \frac{1}{2}\left\{Y_{k-\frac{N}{2}} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} Z_{k-\frac{N}{2}}\right\}; & k=\frac{N}{2},\dots,N-1 \end{cases}$$

با شیفت اندیس می‌توان محدوده k را یکی کرد.

$$\begin{cases} X_k = \frac{1}{2}\left\{Y_k + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} Z_k\right\} & k=0,\dots,\frac{N}{2}-1 \\ X_{k+\frac{N}{2}} = \frac{1}{2}\left\{Y_k + e^{-i\left(\frac{2\pi(k+\frac{N}{2})}{N}\right)} Z_k\right\} \end{cases}$$

و چون

$$\begin{cases} X_k = \frac{1}{2}\left\{Y_k + e^{-i\left(\frac{2\pi k}{N}\right)} Z_k\right\} & k=0,\dots,\frac{N}{2}-1 \\ X_{k+\frac{N}{2}} = \frac{1}{2}\left\{Y_k - e^{-i\frac{2\pi k}{N}} Z_k\right\} \end{cases}$$

با تعریف $W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ داریم.

$$X_k = \frac{1}{2}\left\{Y_k + W^k Z_k\right\} \qquad k=0,\dots,\frac{N}{2}-1$$

$$X_{k+\frac{N}{2}} = \frac{1}{2}\left\{Y_k - W^k Z_k\right\}$$

مثال: تبدیل فوریه سری‌ای که دارای ۴ عضو است را با FFT محاسبه کنید.

مرحله صفر: $\{x_r\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ , $k = 0, 1, 2, 3$

مرحله ۱: $\{y_r\} = \{x_0, x_2\}$ $\qquad \{z_r\} = \{x_1, x_3\}$ $k=0,1$

مرحله ۲: $\{t_r\} = x_0 , \quad \{u_r\} = x_2 \qquad \{v_r\} = x_1 , \quad \{w_r\} = x_3$

آرایه تک عضوی مؤلفه صفر خودشان تبدیل فوریه خواهند بود.

$\{T_k\} = x_0 \qquad \{U_k\} = x_2 \qquad \{V_k\} = x_1 \qquad \{W_k\} = x_3$

$\{Y_k\} \qquad \{Z_k\}$

$\{X_k\}$

$$Y_k = \frac{1}{2}\{T_k + W^k U_k\} \quad \begin{cases} Y_0 = \frac{1}{2}\{t_0 + W^0 U_0\} \\ Y_1 = \frac{1}{2}\{t_0 - W^0 U_0\} \end{cases}$$ که

که $W = e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)} = e^{-i\pi} = -1$ ($N = 2$)

$\{T_k\} = 0 \quad , \{U_k\} = x_2 , \quad \{V_k\} = x_1 , \quad \{W_k\} = x_3$

$$\begin{cases} Y_0 = \frac{1}{2}\{x_0 + x_2\} , \\ Y_1 = \frac{1}{2}\{x_0 - x_2\} , \end{cases} \qquad \begin{cases} Z_0 = \frac{1}{2}\{x_1 + x_3\} \\ Z_1 = \frac{1}{2}\{x_1 - x_3\} \end{cases}$$

در این مرحله $W = e^{-i\frac{2\pi}{4}} = -i$ پس

$$X_0 = \frac{1}{2}\{Y_0 + W^0 Z_0\} = \frac{1}{4}\{x_0 + x_2 + x_1 + x_3\}$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\{Y_1 + W^1 Z_1\} = \frac{1}{4}\{x_0 - x_2 - i(x_1 - x_3)\}$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\{Y_0 - W^0 Z_0\} = \frac{1}{4}\{x_0 + x_2 - (x_1 + x_3)\}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\{Y_1 - W^1 Z_1\} = \frac{1}{4}\{x_0 - x_2 + i(x_1 - x_3)\}$$

دقت کنید که اگر $x_r$ را بخواهیم از تعریف کلی تبدیل فوریه کمک بگیریم

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\frac{2\pi kr}{N}} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

که در هر سری به ازای هر $k$، $N$ عمل جمع زده می‌شود بنابراین

برای تمام $k$ ها $N^2$ عملیات لازم است. این در حالیست که

در FFT به تعداد $m$ که $N = 2^m$ مرتبه تقسیم به آرایه‌های دوتایی کنیم که

خروجی تبدیل فوریه خودش خواهد بود پس $(\log_2 N = m)$

تقسیم کنیم $m = \log_2 N$ که داده‌ها به زوج شده‌اند حال باید یک سری عملیات

ضرب و جمع انجام دهیم. تعداد عملیات جمع و ضرب از مرتبه $N$

از مرتبه $N \log_2 N$ خواهد بود (که در کل از مرتبه $O(N\log_2 N)$)

عملیات خواهیم داشت برای مثال برای $N \simeq 10^6$ $\quad \frac{N^2}{N\log_2 N} \simeq 35000$

خواهد بود. به این خاطر به این روش تبدیل فوریه سریع می‌گوییم.

مثال $N = 16$ فرض $a_r = \frac{x_r}{N}$ می‌شود

مرحله ۰: $a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \; a_7 \; a_8 \; a_9 \; a_{10} \; a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; a_{14} \; a_{15} \; a_{16}$

مرحله ۱: $a_1 \; a_3 \; a_5 \; a_7 \; a_9 \; a_{11} \; a_{13} \; a_{15} \; a_2 \; a_4 \; a_6 \; a_8 \; a_{10} \; a_{12} \; a_{14} \; a_{16}$

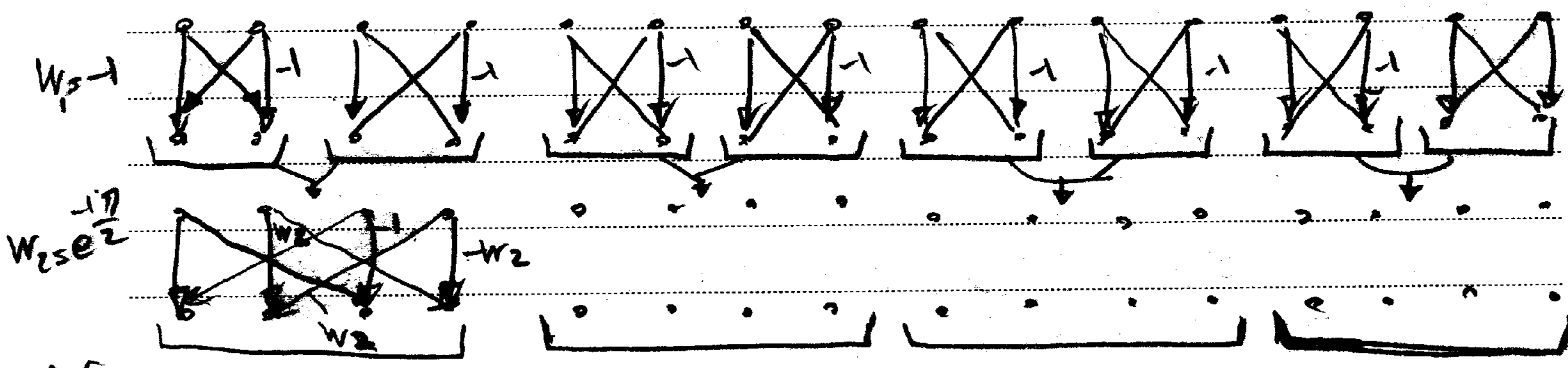
مرحله ۲: $a_1 \; a_5 \; a_9 \; a_{13} \; a_3 \; a_7 \; a_{11} \; a_{15} \; a_2 \; a_6 \; a_{10} \; a_{14} \; a_4 \; a_8 \; a_{12} \; a_{16}$

مرحله ۳: $a_1 \; a_9 \; a_5 \; a_{13} \; a_3 \; a_{11} \; a_7 \; a_{15} \; a_2 \; a_{10} \; a_6 \; a_{14} \; a_4 \; a_{12} \; a_8 \; a_{16}$

مرحله ۴: $a_1 \; a_9 \; a_5 \; a_{13} \; a_3 \; a_{11} \; a_7 \; a_{15} \; a_2 \; a_{10} \; a_6 \; a_{14} \; a_4 \; a_{12} \; a_8 \; a_{16}$

تمام مرحله به زوج که به تعداد $\log_2 N = 4$ می‌باشد.

حال هر مرحله مربوط به تبدیل فوریه است.




اگر بخواهیم از $\{x_k\}$ را به دست آوریم $\{x_r\}$ را کل اینکه کافیست در الگوریتم $W \to W^{-1}$ تبدیل شود.