مبحث: قضیه حد مرکزی - تولید نویز گاوسی: مسئله خاص - نویز [illegible] -

فرض کنید متغیر تعدادی غیرهمبسته x که مقادیر $(x_1, \dots, x_N)$ را می‌گیرد در نظر بگیریم. از متغیر x متغیر Y_N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_N = \frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N} - \langle x\rangle$$

که $\langle x\rangle$ از توزیع $p(x)$ بدست آمده است. حال Y_N را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$Y_N = \frac{x_1-\langle x\rangle}{N} + \frac{x_2-\langle x\rangle}{N} + \dots + \frac{x_N-\langle x\rangle}{N}$$

در نتیجه با تعریف $z_i = \frac{x_i-\langle x\rangle}{N}$، Y_N به فرم زیر قابل نوشتن می‌شود.

$$Y_N = z_1+z_2+\dots+z_N$$

با توجه به غیرهمبسته بودن x ها می‌توان نتیجه گرفت

$$P_N(x_1, \dots, x_N) = p(x_1) \dots p(x_N)$$

از رابطه تبدیل x_i به z_i واضح است که z_i ها نیز مستقل می‌باشند

$$P_N(z_1 \dots z_N) = P(z_1) \dots P(z_N)$$

حال تابع مولد z را حساب می‌کنیم:

$$f(\lambda,N) = \langle e^{i\lambda z} \rangle = \int p(x)dx \; e^{\lambda/N\,(x-\langle x\rangle)}$$

$$= \int p(x)\,dx \left[1 + \frac{\lambda}{N}(x-\langle x\rangle) + \frac{\lambda^2}{2!N^2}(x-\langle x\rangle)^2 + \cdots \right]$$

$$= 1 + 0 + \frac{\lambda^2}{2!N^2}\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\lambda^2}{2!N^2}\sigma_x^2 + O\left(\frac{\lambda^3}{N^3}\right) \cdots$$

اگر ممان‌های x محدود شوند در حد $N\to\infty$ می‌توانیم از بقیه جملات در بسط

بالا صرف نظر کنیم.

حال تابع مولد Y_N را به صورت ترکیب می‌کنیم

$$g(\lambda) = \langle e^{\lambda Y_N}\rangle = \langle e^{\lambda(z_1 + \cdots z_N)}\rangle$$

$$= \langle e^{\lambda z_1}\rangle \langle e^{\lambda z_2}\rangle \cdots \langle e^{\lambda z_N}\rangle$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2!N}\sigma_x^2 + \cdots\right)^N$$

در حد $N\to\infty$ خواهیم داشت

$$g(\lambda) = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\lambda^2}{2!N}\sigma_x^2\right)^N = e^{\lambda^2\sigma_x^2/2N}$$

از $g(\lambda)$ می‌توانیم $P(Y_N)$ را محاسبه کنیم که خواهیم داشت.

$$P(Y_N) = \int e^{-\lambda Y_N} g(\lambda)\, d\lambda = e^{-Y_N/2\sigma_Y^2}$$

که

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

چند نکته ساده ولی مهم در این قضیه وجود دارد. اول اینکه اگر Y_N را از مجموع تعداد از اعداد غیر همبسته تشکیل شده باشد و x ها دارای واریانس محدود باشند در حد $N\to\infty$ مستقل از نوع توزیع x ها، تابع توزیع Y_N ها به گاوسی میل می‌کند.

تولید نویز با همبستگی دلخواه (گاوسی) (روش 1)

فرض کنید که می‌خواهیم نویزی با همبستگی $f(T)$ را تولید کنیم که توزیع گاوسی داشته باشد. بنابراین

$$f(T) = \langle \eta(t)\, \eta(t+T) \rangle$$

که تبدیل فوریه آن دانسیته طیفی را خواهد داد.

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(T)\, e^{-i\omega T}\, dT$$

در حالت گسسته

$$S_\eta(\omega) = \frac{T}{2\pi} S_k$$

است که

$$S_k = \eta_k^* \eta_k$$

فرکانس های ممکن عبارت اند $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ خواهند بود که $T = N.\Delta$ است

از تابع $f(s)$ و S_k ها بدست می آید که در واقع نرم تابع $|\eta_k|^2$ خواهد بود

حال اگر η_k را بر حسب S_k به صورت زیر بنویسیم

$$\eta_k = \sqrt{S_k}\, e^{i\theta_k}$$

که θ_k ها اعداد غیرهمبسته با تابع توزیع یکنواخت بین 0 و 2π باشد می توانیم

به کمک تبدیل فوریه η_k ها $\eta(t)$ را بدست آوریم. دقت کنید که

هر مقدار در عکس تبدیل فوریه اگر η_k ها بیشتر باشد با توجه به

غیر همبسته بودن θ_k ها تابع توزیع $\eta(t)$ ها به گاوسی میل کند.

(ارتباط η_k و η_r) $\left(\eta_r = \frac{1}{N}\sum_k \eta_k e^{i\frac{2\pi k r}{N}}\right)$ $(r=1,\dots,N)$

روش II : Fourier-Filtering Method:

فرض کنید یک ارائه از اعداد به طول L و غیر همبسته را در نظر بگیریم که:

$\langle v_i \rangle = 0$ برای همه $\{v_i\}_{i=1,\dots,L}$

تابع همبستگی v_i عبارت است از $\langle v_i v_{i+l}\rangle = \delta_{l,0}$ و فرض کنید که

v_i دارای تابع توزیع گاوسی باشد.

هدف این است که از مجموعه $\{u_i\}$ (غیر همبسته) مجموعه $\{\eta_i\}$ با همبستگی بلند برد

$C(l)$ به صورت زیر را ایجاد کنیم.

$$C(l) = \langle \eta_i \eta_{i+l} \rangle \sim l^{-\gamma} \quad (l \to \infty)$$

که γ نمای همبستگی و بین $0 < \gamma < d$ می‌باشد. $S(\omega)$ در حد $\omega \to 0$

عبارت است از $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega l} C(l)\, dl \sim \omega^{\gamma - 1}$

که تبدیل فوریه $C(l)$ می‌باشد. رابطه بین η_ω و u_ω به صورت زیر خواهد بود.

$$\eta_\omega = [S(\omega)]^{1/2} u_\omega$$

که $\{u_\omega\}$ ها تبدیل فوریه $\{u_i\}$ ها می‌باشد.

پله های الگوریتم به این روش به شرح زیر است.

1- تولید u_i غیر همبسته گاوسی و محاسبه $\{u_\omega\}$ ها

2- محاسبه $S(\omega)$ از همبستگی که هدف مسئله است و محاسبه $\{\eta_\omega\}$ ها

3- تبدیل فوریه $\{\eta_\omega\}$ و محاسبه $\{\eta_i\}$ که $\{\eta_i\}$ که همبسته

بلندبرد خواص آن را خواهند داشت.

روش Box-Muller برای تولید نویز سفید ـ گاوسی

در قسمت قبل با نحوه تولید نویز سفید (غیر همبسته) آشنا شدیم. به نویز گاوسی برای پالس ارسال نیاز داریم. در حالی که random که کامپیوتر تولید می‌کند یک نویز سفید با توزیع یکنواخت معمولاً بین ۰ و ۱ می‌باشد. روش تبدیل نویز سفید کامپیوتر که توزیع یکنواخت به گاوسی غیر همبسته به صورت زیر است.

فرض کنید دنبال سری زمانی $x(t)$ هستیم که سفید و گاوسی باشد. یعنی

$$\langle x(t)\,x(t')\rangle = g\,\delta(t-t') \;,\quad P(x) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-x^2/2}$$

متغیر z و w را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که لزوماً مستقل باشند و z بین ۰ و ۱ با توزیع یکنواخت و w بین ۰ و 2π باشد که با توزیع آنها یکنواخت فرض می‌کنیم. متغیر U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$U = \sqrt{-2\ln(1-z)} \qquad 0<z<1$$

حال x و y را برحسب U و w به صورت زیر می‌نویسیم که

$$x = U\cos w$$
$$y = U\sin w$$

ادعا اینست که x و y دارای توزیع گاوسی خواهند بود. برای اثبات این

با توجه به اینکه z و w مستقل هستند

$$p(z,w)\,dz\,dw = \underset{\frac{1}{1}}{p(z)}\;\underset{\frac{1}{2\pi}}{p(w)}\,dz\,dw$$

تعداد حالاتی که

$z \leq z(t) \leq z+dz$,

$w \leq w(t) \leq w+dw$

$$= 1 \times \frac{1}{2\pi} \times dz\,dw$$

$$= \frac{dw}{2\pi}\,\frac{dz}{du}\,du$$

و $\frac{dz}{du}$ به صورت زیر است

$$z = 1 - e^{-u^2/2}$$

$$\frac{dz}{du} = u e^{-u^2/2}$$

پس

$$p(z)\,p(w)\,dz\,dw = \frac{dw}{2\pi}\,u e^{-u^2/2}\,du$$

با تعریف $x = u\cos w$ ، $y = u\sin w$ خواهیم داشت

$$= dx\,dy\, e^{-x^2/2 - y^2/2}$$

پس

$$p(z,w)\,dw\,dz \cong dx\,dy\;p(x)\;p(y)$$

که $p(x)$ و $p(y)$ گاوسی با واریانس یک خواهند بود.

به این ترتیب می‌بینیم x و y هرکدام توزیع شده با توزیع گاوسی خواهند بود.

دقت کنید که x ها دارای واریانس واحد می‌باشند. اگر نویز با واریانس σ را بخواهیم تولید کنیم کافیست مثلاً در آرایه x عدد σ را ضرب کرده و حاصل جواب دلخواه خواهد بود.

(III) Makes-Havlin-Schwartz Stanley روش

PRE 53, 5445 (1996)

برای تولید نویز ملبندبرد.

ایرادی که روش دوم دارد اینست که در عمل بعد از تولید نویز اگر دوباره $\langle \eta_i \eta_{i+l} \rangle$ را رسم کنیم می‌بینیم که رفتار متغیری $l^{-\gamma}$ تا 1% سایز سیستم وجود دارد و بعد از این طول از رفتار متغیری جدا می‌شود. یعنی اینکه γ با رفتار متغیری (scaling) که مهم‌ترین طول مشخصه در سیستم نمی‌باشد در این روش یک طول مشخصه القا می‌شود. دلیل این مسئله اینست که $C(l) = l^{-\gamma}$ در $l=0$ تکینی می‌باشد. برای حل این ادعا کافیست که حد و بین $l=1$ را به عنوان cut-off دارد $C(l)$ کنیم یعنی.

$$C(l) = (1+l^2)^{-\gamma/2}$$

حال که $C(l)$ بدین نحو نوشته شود می‌توان $C(l)$ را برای l های

منفی نیز تعریف کرد. به عبارتی $C(l)$ را می‌توان در بازه $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$

تعریف می‌کنیم. که شرط تناوبی بودن $C(l)$ نیز ارضا کند. $C(l)=C(l+L)$

برای داشتن $S(\omega)$ می‌توانیم تبدیل فوریه $C(l)$ را بصورت زیر حساب

کنیم

$$S(\omega) = \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\beta+1)} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\beta} K_\beta(\omega)$$

که $\omega = \frac{2\pi k}{L}$ و $k = -\frac{L}{2}, \dots, \frac{L}{2}$ و $K_\beta(\omega)$ بسل تعمیم یافته

و $\beta = \frac{\gamma-1}{2}$ می‌باشد و Γ تابع گاما است. رفتارهای مجانبی

$K_\beta(\omega)$ عبارتست از

$$K_\beta(\omega) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta)}{2} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\beta} & \omega \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\, e^{-\omega} & \omega \gg 1 \end{cases}$$

در شکل صفحه بعد رفتار $C(l)$ را برای γ های مختلف نشان داده

شده است.

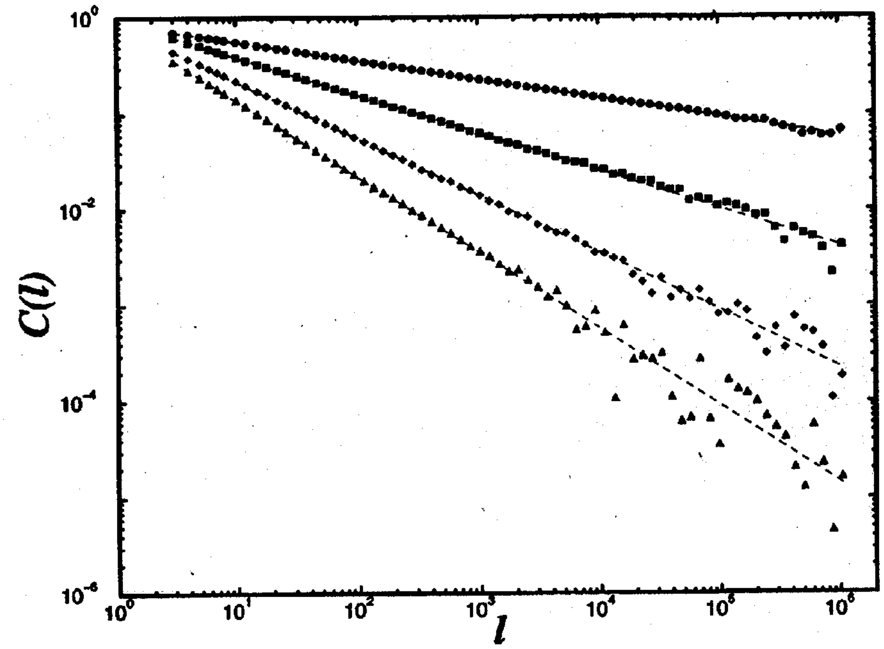

FIG. 1. A log-log plot of the average correlation $C(\ell)$ of 50 correlated samples obtained with the proposed method for $L=2^{21}$. Shown are results for different values of the desired γ = 0.2, 0.4, 0.6, and 0.8 (from top to bottom). The dashed lines represent the best fits which yield the nominal values of γ= 0.19 ± 0.02, 0.39 ± 0.02, 0.60 ± 0.03, and 0.79 ± 0.03. The correlations are calculated until $L/2$ due to the periodic boundary conditions.

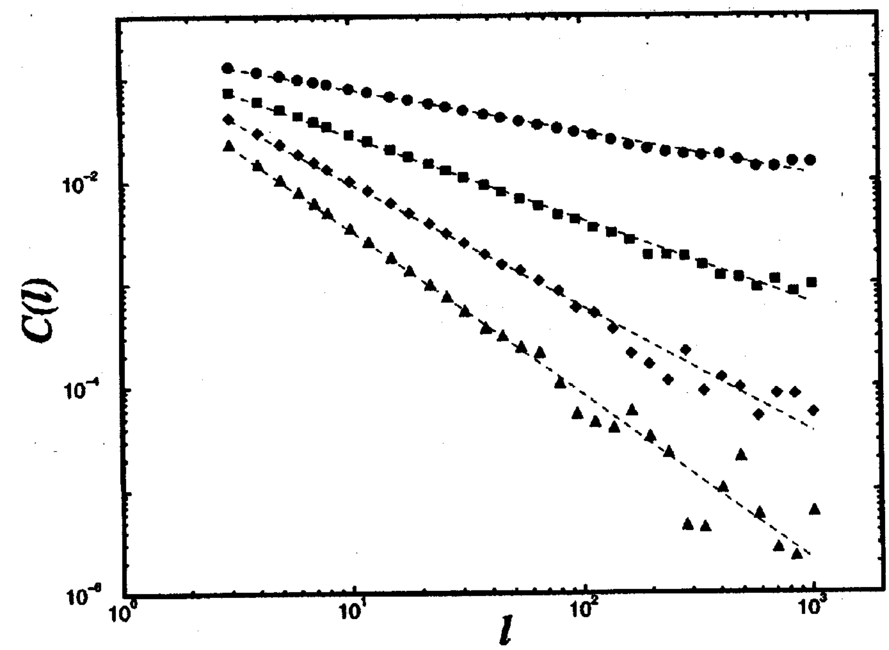

FIG. 3. Log-log plot of the correlations along the diagonal direction in a square lattice of $2^{11}\times2^{11}$. Shown are results for different values of γ=0.4, 0.8, 1.2, and 1.6 (from top to bottom), and we take averages over 50 samples. The fits yield nominal values of $\gamma=0.41\pm0.02$, 0.81 ± 0.03, 1.20 ± 0.03, and 1.59 ± 0.04.

(تولید نویز بلند برد در بعد d)

برای تولید نویز ایزوتروپ (نویزی که همبستگی $C(\vec{l})$ به بعد $|\vec{l}|$ داشته است) می‌توان حجم L^d را در نظر گرفت که $C(\vec{l})$ به فرم زیر باشد

$$C(\vec{l}) = \left(1+\sum_{i=1}^{d} l_i^2\right)^{-\gamma/2}$$

که شرایط مرزی $C(\vec{l}) = C(\vec{l}+\vec{L})$. دانسیته طیفی این عبارت است

$$S(\vec{q}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\beta_d+1)}\left(\frac{q}{2}\right)^{\beta_d} K_{\beta_d}(q)$$

که $q = |\vec{q}|$ ، $q_i = \frac{2\pi m_i}{L}$ ، $-\frac{L}{2} \leq m_i \leq \frac{L}{2}$ ،

$i = 1, \ldots, d$ و $\beta_d = \frac{(\gamma-d)}{2}$ است. برای مثال در شکل زیر سطح تصادفی تولید شده این روش برای γ های مختلف در دو بعد نمایش داده شده است.

(تولید نویز غیر همگن)

در بسیاری از موارد نیاز به داشتن نویزی با رفتارهای مختلف در جهت های مختلف داشته باشیم. مثلاً برای دو بعد فرض کنیم که $C(r,\varphi)$ عبارت باشد از

$$c(r,\varphi) = r^{-\gamma_x}\cos^2\varphi + r^{-\gamma_y}\sin^2\varphi$$

که r و φ مختصات قطبی هستند. دانسیته طیفی عبارت است از

$$S(q,\varphi_q) = \frac{\pi^{3/2}\,\Gamma(1+\beta_x/2)}{2^{1-\beta_x}\,\Gamma(2-\frac{\beta_x}{2})}\,\frac{\cos^2\varphi_q}{q^{\beta_x}} + \frac{\pi^{3/2}\,\Gamma(1+\beta_y/2)}{2^{1-\beta_y}\,\Gamma(2-\frac{\beta_y}{2})}\,\frac{\sin^2\varphi_q}{q^{\beta_y}}$$

که $\beta_x = 2-\gamma_x$, $\beta_y = 2-\gamma_y$.