

تمرین سری سوم

ترمودینامیک و مکانیک آماری ۱

پاسخ های خود را تا یکشنبه مورخ ۲۵ خرداد ماه ارسال نمایید

سوال (۱)

ظرفی به حجم V شامل N ملکول گاز و در حالت تعادل است.

(آ) احتمال یافت شدن یک ملکول در حجم v ($v < V$) چقدر است؟

(ب) احتمال این که در هر لحظه، n ملکول در حجم v قرار داشته باشد چقدر است؟

(پ) جواب قسمت (ب) در صورتی که $v \ll V$ و $n \ll N$ به چه شکلی در می آید؟ آن را بدست آورید.

(ت) جواب قسمت (پ) در صورتی که $n \gg 1$ و $n - \bar{n} \ll \bar{n}$ به چه شکلی در می آید؟ آن را بدست آورید.

(ث) اگر ظرف شامل دو مول گاز باشد، احتمال این که بیش از $0.02 + 10^{-8}$ مول گاز در حجم $v = V/100$ وجود داشته باشد چقدر است؟

سوال (۲)

معادله‌ی حالت برای جو زمین به شکل زیر داده شده است.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha$$

که α یک ثابت مثبت است. ρ و P چگالی و فشار اند و شاخص صفر مشخص کننده‌ی مقدارهای سطح زمین است. شتاب گرانش نیز از رابطه زیر بدست می آید.

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R+z}\right)^2$$

که Z ارتفاع از سطح زمین و R شعاع زمین است. تعریف می کنیم $X := \frac{P}{P_0}$

(آ) یک معادله‌ی دیفرانسیل برای $X(z)$ بنویسید که در آن فقط X و z و ثابت‌های داده شده وارد شوند.

(ب) $X(z)$ را حساب کنید.

(پ) $X(z)$ را در حد $\alpha \rightarrow 1$ و $R \rightarrow \infty$ ساده کنید.

(ت) تصحیح مرتبه‌ی یک $(1/R)$ و $(1 - \alpha)$ بر رابطه بدست آمده از قسمت (پ) را بدست آورید.

(ث) $(1 - \alpha)$ از چه مرتبه‌ای باشد تا دو تصحیح d از یک مرتبه باشند؟

سوال (۳)

یک ایتوانه با دیواره‌های عایق و سطح مقطع A به وسیله‌ی یک پیستون عایق به جرم m به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. پیستون می‌تواند بدون اصطکاک در طول استوانه حرکت کند. مطابق شکل در ابتدا طول هر قسمت L است و هر طرف شامل یک مول گاز ایده‌آل با $\frac{C_p}{C_v}$ در دمای T_0 است

(آ) اگر پیستون را به صورت بی‌دررو به اندازه‌ی x ($x \ll L$) از وضعیت تعادل جابجا و رها کنیم بسامد نوسانات کوچک پیستون حول مکان تعادل اولیه را بدست آورید.

(ب) اکنون فرض کنید پیستون یک رسانندگی گرمایی دارد، به طوری که آهنگ انتقال گرما $\frac{dQ}{dt} = K\Delta T$ است که $\Delta T = T_2 - T_1$ بسیار کوچک است. آهنگ افزایش آنتروپی را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر x بدست آورید.

(پ) به واسطه‌ی تولید آنتروپی نوسان میرا می‌شود. انرژی متوسط تلف شده در هر بار نوسان پیستون چقدر است؟

سوال (۴)

در یک محدوده‌ی دمایی، دمای نزدیک به دمای مطلق، T ، نیروی کشش، F ، در یک میله‌ی پلاستیکی تحت کشش، به صورت زیر به طول میله، L ، مربوط می‌شود

$$F = aT^2(L - L_0)$$

A یک ثابت مثبت، L_0 طول میله قبل از کشیده شدن و L طول میله در حالت کشیده شده است. هنگامی که $L = L_0$ است ظرفیت گرمایی $C_L(T, L_0) = bT$ است که b ثابت است.

(آ) قانون اول ترمودینامیک را برای فرآیند برگشت پذیری که طی آن میله کشیده می شود بنویسید.
 (ب) اگر $S(T_0, L_0)$ معلوم باشد، آنتروپی $S(T, L)$ را بر حسب $S(T_0, L_0)$ و سایر پارامترهای موجود در مسئله به دست آورید.

(پ) اگر میله را از لحاظ گرمایی عایق بندی کنیم و آن را به طور ایستوار از طول اولیه L_1 در دمای T_1 بکشیم تا طول آن به L_2 ($L_2 > L_1$) برسد، دمای آن در این حالت چه قدر است؟
 (ت) ظرفیت گرمایی میله را در طول L به جای L_0 ، به دست آورید.

(سوال ۵)

انرژی آزاد هلمهولتز یک گاز به صورت

$$F = NkT \left(\ln \left[n_Q(T) \frac{V - Nb}{N} \right] + 1 \right)$$

است که $n_Q(T) = \left(\frac{mkT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$ و b یک ثابت است.

(آ) معادله حالت گاز را به دست آورید.

(ب) آنتروپی گاز را به دست آورید.

(پ) انرژی داخلی گاز را به دست آورید.

(ت) به بازای یک N ثابت، ظرفیت گرمایی در حجم ثابت، ظرفیت گرمایی در فشار ثابت و ضریب انبساط حجمی در فشار ثابت را به دست آورید.

(ث) گرمای لازم برای افزایش دمای یک اتاق به حجم V_0 و محتوی این گاز به صورت برگشت پذیر از T_1 تا T_2 را به دست آورید. هوا می تواند از درز در و پنجره ها خارج شود و فشار هوای اتاق همواره برابر P_0 می ماند.

(ج) برای یک اتاق با ابعاد متداول، مقدار عددی گرمای لازم برای رساندن دمای اتاق به مقدار لازم در یک روز زمستان را برآورد کنید. $N_A b = 3 \times 10^{-5} \frac{m^3}{mol}$ که N_A عدد آووگادرو است.

(سوال ۶)

نوعی ماده هست که فشار آن تابع فقط دماست:

$$P = \alpha T^\beta$$

که P فشار و T دما هستند و α و β ثابت هایی مثبت اند که $\beta > 1$

(آ) انرژی آزاد هملهولتز را بر حسب حجم و دما به دست آورید.

(ب) آنترופی را بر حسب حجم و دما به دست آورید.

(پ) انرژی درونی را بر حسب حجم و دما بدست آورید.

(ت) ظرفیت گرمایی در حجم ثابت را بر حسب حجم و دما بدست آورید.

(ث) ظرفیت گرمایی در فشار ثابت را برحسب حجم و دما بدست آورید.

یک ظرف صلب به حجم V در نظر بگیرید که با یک دیواره به دو بخش تقسیم شده این دیواره نفوذناپذیر است، اما آزادانه حرکت می کند و رسانای گرما است در یک ظرف به حجم V_1 یک گاز کامل به مقدار n مول و ظرفیت گرمایی در حجم ثابت \tilde{C}_V است و در ظرف دیگر ماده ای که قبلا معرفی شد قرار دارد.

(ج) این مجموعه در دمای T است V_1 را با این فرض که کوچک تر از V باشد حساب کنید.

(چ) دمایی را بیابید که در آن V_1 با V برابر می شود.

(ح) ظرفیت گرمایی این سیستم را بر حسب دما به دست آورید.

(سوال ۷)

یک ولگرد از مبدا مختصات، O ، بر روی یک شبکه ی دو بعدی به شرح زیر شروع به حرکت می کند.

در هر قدم که بر می دارد ممکن است از نقطه ی P (از شبکه) که در آن واقع بود به یکی از چهار نزدیک ترین همسایه ی P با احتمال های زیر برود.

با احتمال p_u به بالا، با احتمال p_d به پایین، با احتمال p_r به راست و با احتمال p_l به چپ برود.

(آ) احتمال این که پس از N قدم، N_u قدم به بالا، N_d قدم به پایین، N_r قدم به راست و N_l قدم به چپ رفته باشد چقدر است؟

(ب) با چه احتمالی ممکن است پس از N قدم، از مبدا به نقطه ای با مختصات (m, n) برسد؟

پ) به ازای $\frac{1}{4} p_u = p_d = p_r = p_l$ و $N = 10$ و $m = 2$ و $n = 4$ جواب قسمت (ب) را بیابید.

سوال (۸)

n مول گاز ایده‌آل متشکل از ملکول‌های دو اتمی در ظرفی به حجم V در دمای T با معادله‌ی حالت $PV = nRT$ در نظر بگیرید. ملکول‌های این گاز هر یک دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی هستند. در غیاب میدان مغناطیسی خارجی به دلیل این که جهت گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی کاتوره‌ای است مغناطش صفر است. ظرف حاوی گاز را داخل سیم لوله‌ای قرار می‌دهیم که میدان مغناطیسی داخلی آن $\mu_0 H$ است. اکنول مغناطش، M غیر صفر است و طبق قانون کوری با معادله‌ی $M = \frac{nDH}{T}$ با H و T رابطه دارد. R ثابت جهانی گاز‌های است و D یک کمیت ثابت. n نیز در مساله ثابت است انرژی داخلی گاز در حضور میدان مغناطیسی را $U = \frac{5}{2} nRT$ در نظر بگیرید.

آ) ظرفیت گرمایی $C_{V,H}$, $C_{P,M}$, $C_{V,M}$ و $C(P, H)$ را حساب کنید.

ب) در یک تحول بی‌دررو برگشت‌پذیر چه رابطه‌ای بین (P, T, H) برقرار است؟

یک چرخه کارنو در نظر بگیرید که با این گاز ایده‌آل در حضور میدان مغناطیسی به صورت زیر کار می‌کند:

ابتدا سیستم از حالت ۱ با مختصات ترمودینامیکی (V_1, M_1, T_h) به طور هم‌دما به حالت ۲ با مختصات ترمودینامیکی (V_2, M_2, T_h) می‌رود.

سپس به طور بی‌دررو از حالت ۲ به حالت ۳ با مختصات ترمودینامیکی (V_3, M_3, T_c) می‌رود.

در ادامه به طور هم‌دما از حالت ۳ به حالت ۴ با مختصات ترمودینامیکی (V_4, M_4, T_c) می‌رود.

و سرانجام به طور بی‌دررو از حالت ۴ به حالت ۱ می‌رود.

پ) کار و گرمای مبادله شده در هر یک از چهار فرآیند فوق را محاسبه کنید.

ت) بازده چرخه را بدست آورید.