

ترمودینامیک و مکانیک آماری ۲

تمرین سری اول

- مهلت ارسال تا شنبه ۲۶ مهر ماه، ساعت ۲۳:۵۹ است.
- زمان تحویل به هیچ عنوان تمدید نمی شود.
- تمرینات خود را در سامانه CW آپلود کنید.

۱. معادله حالت گاز کامل

الف) ظرف گازی با ابعاد نشان داده شده در شکل در نظر بگیرید. یک ذره با سرعت v_x به طور متوسط چه نیرویی به دیواره عمود بر محور ایکس وارد میکند؟ (فعلا از برخورد بین ذرات صرف نظر کنید) هم چنین در نظر بگیرید:

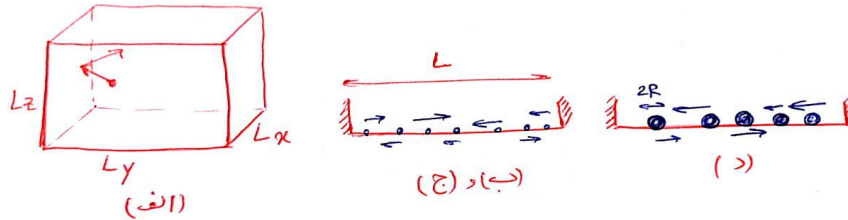
$$\frac{m \langle v_x^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_y^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_z^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$

برای یک گاز با N ذره ثابت کنید: $PV = NkT$

ب) از این جا به بعد در نظر بگیرید که ذرات با یکدیگر برخورد کشسان می کنند. گاز را یک بعدی فرض کنید به این معنا که همه ذره ها فقط میتوانند روی یک خط حرکت کنند مانند شکل. نشان دهید در ابتدا هر توزیعی روی سرعت ها باشد با زمان تغییر نمی کند.

ج) با فرض اینکه $m \langle v^2 \rangle = kT$ است نشان دهید: $FL = NkT$ (برای یک گاز سه بعدی نیرو بر مساحت داریم و حجم. برای دو بعدی میشود نیرو بر طول و مساحت. برای گاز یک بعدی باید از نیرو و طول استفاده کنیم.)

د) حال میخواهیم اثر ابعاد ذرات را بررسی کنیم. هر ذره را کره ای سخت به شعاع R در نظر بگیرید و نشان دهید معادله حالت برای یک گاز N ذره ای می شود: $F(L - 2NR) = NkT$



ه) مشکل ما در سه بعد این است که برخوردها سر به سر نیست. اگر ایده ای برای این قضیه دارید بیان کنید. (خود من بلد نیستم)

۲. قانون دوم ترمودینامیک

الف) نشان دهید بیان های کلوین و کلاسیوس برای قانون دوم ترمودینامیک معادلند.
 ب) نشان دهید بازده هر چرخه برگشت پذیری که بین دو منبع T_C و T_H (که به اندازه کافی بزرگ هستند) کار می کند با بازده کارنو برابر است.
 ج) نشان دهید بازده هر چرخه برگشت ناپذیر که بین دو منبع T_C و T_H کار میکند از بازده کارنو کمتر یا مساوی آن است.
 د) برای یک گاز (لزوماً گاز ایده آل نیست) ثابت کنید از هر نقطه در صفحه $P - V$ فقط یک منحنی بی دررو می گذرد.
 ه) ثابت کنید برای یک گاز (لزوماً ایده آل نیست) که U فقط تابع T است، هیچ منحنی همدمای بی دررویی در دو نقطه یکدیگر را قطع نمی کنند.

۳. توزیع ماکسول بولتزمن

در این مسأله قصد داریم تابع توزیع سرعت های یک گاز را به روشی دیگر بدست آوریم.
 * فرض کنید گاز همسانگرد است به این معنا که هیچ جهتی نسبت به دیگری ارجحیت ندارد.
 * احتمال اینکه سرعت یک ذره گاز در جهت x بین v_x و $v_x + dv_x$ باشد را $f(v_x)dv_x$ در نظر بگیرید.

الف) احتمال اینکه سرعت ذره بین $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ و $\vec{v} + d\vec{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$ باشد را بر حسب تابع f بنویسید.
 ب) استدلال کنید که می توان این احتمال را به شکل $g(v^2)dv_x dv_y dv_z$ نوشت.

ج) $\frac{\partial g}{\partial v_x}$ را محاسبه کرده و به کمک آن $\frac{1}{g} \frac{dg}{dv^2}$ را محاسبه کنید. (بر حسب f و مشتقات آن)
 د) نشان دهید $f(v_x^2) = Ae^{-\alpha v_x^2}$ است. برای یافتن α و A از شرط بهنجارش و اینکه انرژی هر ذره گاز $\frac{3}{2}kT$ است استفاده کنید.

انتگرال کاربردی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

۴. $S = k \ln \Omega$
 برای هر سیستم ترمودینامیکی فرض کنید $S = f(\Omega)$ است. با استفاده از خاصیت جمع پذیری S و خصلت ضرب پذیری Ω نشان دهید که تابعیت آنتروپی از تعداد حالات به شکل یک ثابت در $\ln \Omega$ است.^۱ (از لینک در پاورقی کمک بگیرید)

^۱<https://math.stackexchange.com/questions/98673/examples-of-functions-where-fab-fafb>