

## ترمودینامیک و مکانیک آماری ۲

### تمرین سری دوم

- مهلت ارسال تا سه شنبه ۲۰ آبان، ساعت ۲۳:۵۹ میباشد.
- زمان تحویل به هیچ عنوان تمدید نمی شود.
- تمرینات خود را در سامانه CW آپلود کنید.

### ۱. احتمال و برگشت ناپذیری

یک ذره را در یک ظرف گاز در نظر بگیرید. احتمال در سمت راست ظرف بودن را اینگونه تعیین میکنیم که برای مدت زمان زیاد این ذره را دنبال میکنیم و میبینیم که در چه کسری از زمان در سمت راست بوده است.

الف) استدلال کنید که با این روش، احتمال بدست آمده  $\frac{1}{2}$  خواهد بود.

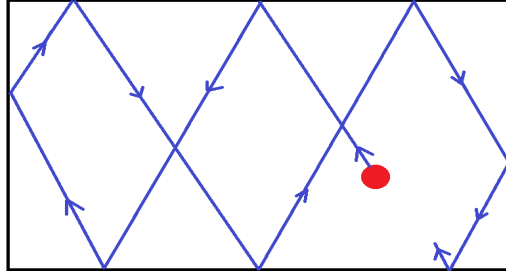
ب) حال یک ظرف گاز با  $N$  ذره بدون برهم کنش را در نظر بگیرید. احتمال اینکه  $n_1$  ذره در سمت راست ظرف باشد را بیابید.

ج) حال با استفاده از تقریب زیر برای  $N \gg 1$  توزیع قسمت ب را پیوسته کنید. هم چنین در نظر بگیرید  $n_1, N - n_1 \gg 1$

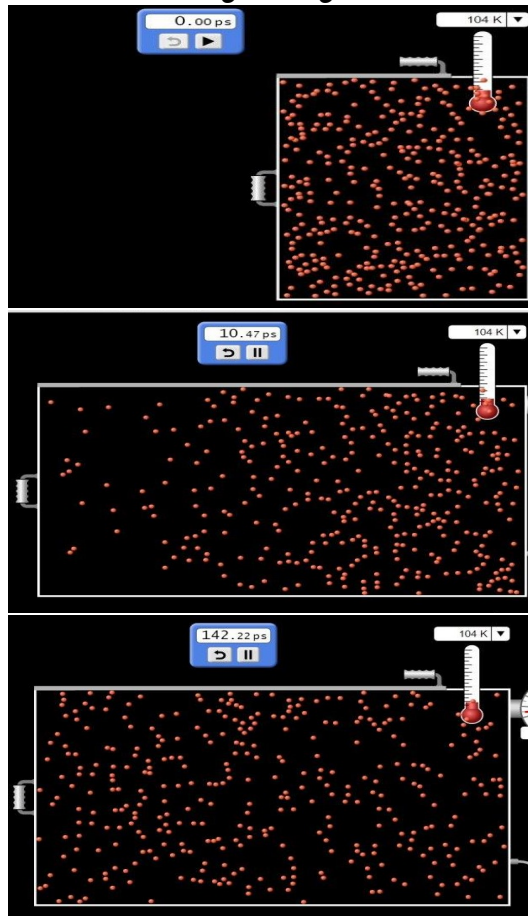
$$N \gg 1, \ln N! = N \ln N - N$$

د) نشان دهید بیشینه احتمال زمانی رخ میدهد که نصف ذرات در سمت راست ظرف باشند. (برای راحتی بهتر است از  $\ln p$  مشتق بگیرید.)

ه) حال میدانیم که اگر ذرات گاز در یک طرف ظرف باشند و رها شوند در نهایت به طور یکنواخت در ظرف پخش می شوند. توضیحی کیفی در مورد شباهت این پدیده و مثال ۱۲.۱ کتاب بلاندل ارائه دهید.



شکل ۱: شکل الف



شکل ۲: انبساط آزاد

## آنسامبل میکروکانونیکی

گازی با  $N$  ذره و حجم  $V$  در نظر بگیرید. برای همیلتونی این سیستم داریم:

$$H = \frac{p_{1x}^2}{2m} + \frac{p_{1y}^2}{2m} + \frac{p_{1z}^2}{2m} + \dots + \frac{p_{Nx}^2}{2m} + \frac{p_{Ny}^2}{2m} + \frac{p_{Nz}^2}{2m}$$

برای شمارش تعداد میکروحالاتها فضای فاز را با مکعب های  $6N$  بعدی شبکه بندی کرده ایم و حجم هر کدام  $h^{3N}$  است و هر کدام از این مکعبها یک میکرو حالت سیستم را نشان میدهد. الف) حجم فضای فاز بین دو رویه با انرژی  $E$  و  $E + dE$  باید از روابط زیر استفاده کرد:

$$\int \int \dots \int dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z} \dots dp_{Nx} dp_{Ny} dp_{Nz} dx_1 dy_1 dz_1 \dots dx_N dy_N dz_N$$

چون مختصات ذرات در همیلتونی حضور ندارند میتوان این انتگرال حجم روی مکان ها و تکانه هارا جدا محاسبه کرد و در هم ضرب کرد. الف) حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \int \dots \int dx_1 dy_1 dz_1 \dots dx_N dy_N dz_N$$

الف) رویه انرژی ثابت در فضای تکانه ها یک کره  $3N$  بعدی خواهد بود. اگر حجم کره  $\alpha$  بعدی از رابطه زیر بدست آید ، حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int \int \dots \int dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z} \dots dp_{Nx} dp_{Ny} dp_{Nz}$$

حجم کره  $\alpha$  بعدی با شعاع  $R$  :

$$V_\alpha = \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)} R^\alpha$$

ب)  $\Omega(E, \Delta E, N, V)$  را بیابید.

ج) آنتروپی این سیستم در انرژی  $E$  را بیابید.

د) از روی آنتروپی روابط زیر را برای  $N$  های بزرگ نشان دهید:  $E = \frac{3}{2} NkT, PV = NkT$

ه) آیا آنتروپی بدست آمده در قسمت ج فزونور است؟ چگونه می توان آن را اصلاح کرد؟

### ۳. اصول مکانیک آماری

اصل اساسی مکانیک آماری به ما میگوید که احتمال وقوع میکرو حالت‌های با انرژی یکسان با هم برابر است.

\* آنروپی یک سیستم با رابطه  $S = \sum p_i \ln p_i$  داده میشود.  $p_i$  احتمال بودن سیستم در حالت  $i$  است.

الف) فرض کنید ما میدانیم که سیستم دقیقاً انرژی  $E_i$  دارد. (جلوتر دلیل اندیس مشخص میشود) در حالت  $E_i$ ، سیستم ما  $\gamma$  میکرو حالت دارد که میتواند در هر یک از آنها قرار بگیرد. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، آنروپی این سیستم را بیشینه کرده و نشان دهید همه میکرو حالت‌ها هم احتمالند و این احتمال را بیابید.

ب) نشان دهید در این حالت  $S = \ln \gamma$  است.

ج) حال فرض کنید ما نمیدانیم سیستم دقیقاً در کدام یک از حالت‌های  $[E_i]_{i=1}^{\alpha}$  اما میدانیم انرژی میانگین سیستم  $E^*$  است. (این معادل این است که دمای سیستم را میدانیم) و در حالت  $E_i$ ، سیستم  $\gamma_i$  میکرو حالت دارد.

$P_{ij}$ : احتمال بودن سیستم در انرژی  $E_i$  و میکرو حالت  $j$  ام است.

$$S = \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\gamma_i} P_{ij} \ln P_{ij}$$

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ نشان دهید:  $P_{ij} = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$  است.

د) احتمال داشتن انرژی  $E_i$  چقدر است؟

ه) فرض کنید متوجه میشویم که برای توصیف این سیستم باید از کمیت دیگری مانند  $A$  استفاده میکردیم. و در نظر بگیرید که سیستم ما هر یک از حالت‌های  $[A_{\phi}]$  را می تواند داشته باشد. مانند قبل

نشان دهید میکرو حالت‌هایی که در آن سیستم انرژی  $E_i$  و کمیت  $A_{\phi}$  را دارد هم احتمالند.

و) اگر به جای مقدار دقیق  $A$ ، میانگین آن را بدانیم ثابت کنید که احتمال بودن در  $A_{\phi}$  با  $e^{cA_{\phi}}$

متناسب است.

#### ۴. طول پویش آزاد

در یک ظرف گازی  $n$  مولکول در واحد حجم داریم. اگر مولکولهای این گاز کره های سختی به شعاع  $a$  باشد:

(الف) احتمال اینکه مولکول در بازه زمانی  $dt$  با مولکولی دیگر برخورد کند را بیابید.  
(ب) لحظه  $t = 0$  را بعد از برخورد اول در نظر بگیرید. احتمال اینکه مولکول تا لحظه  $t$  برخورد نکند را بیابید.

(ج) احتمال اینکه اولین برخورد مولکول در  $t$  و  $t + dt$  رخ دهد چقدر است؟  
(د) به طور میانگین چه قدر طول میکشد تا مولکول به یک مولکول دیگر برخورد کند؟  
(ه) به طور میانگین مولکول چه مسافتی را طی میکند تا اولین برخورد خود را انجام دهد؟  
(فصل ۸ کتاب بلاندل)