

ترمودینامیک و مکانیک آماری ۲

تمرین سری سوم

- مهلت ارسال تا پنجشنبه ۱۳ آذر، ساعت ۲۳:۰۰ می باشد.
- زمان تحویل به هیچ عنوان و تحت هیچ شرایطی تمدید نمی گردد .
- تمرینات خود را در سامانه CW آپلود کنید.
- تمرینات خود را برای روز آخر نگذارید .
- مورد دوم را جدی بگیرید.

۱ میکروکانونیک

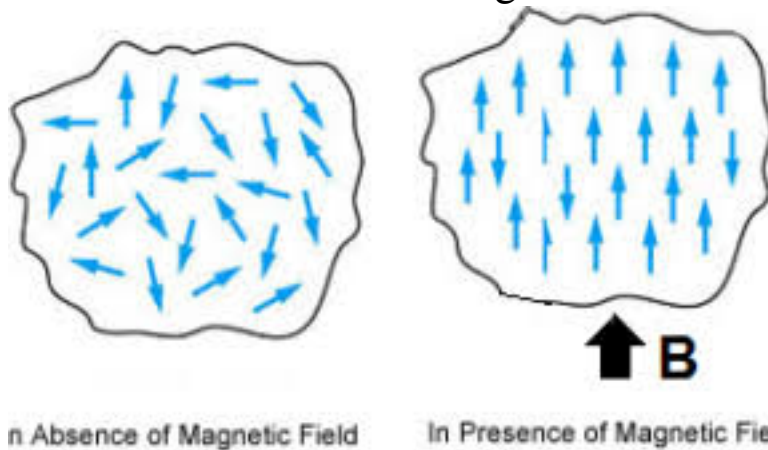
۱.۱ میخ و آهنربا

(شما می توانید بدون خواندن این صفحه حل سوال بپردازید) سوالی که به وسیله آن میتوان اهمیت مواد پارامغناطیسی را متوجه شد:
از الکترومغناطیس می دانیم که دو جسم که دو قطبی مغناطیسی دارند به هم نیرو وارد میکنند.
(آهنربا همان دو قطبی مغناطیسی است)
حال میپرسیم:

۱. چرا یک میخ آهنی جذب آهنربا می شود؟
۲. اگر میخ آهنی یک دو قطبی مغناطیسی دارد، پس چرا دو میخ آهنی به یکدیگر نیرو وارد نمی کنند؟
۳. چرا میخ آهنی جذب آهنربا می شود اما موادی از جنس های دیگر ممکن نیست چنین اتفاقی برایشان بیافتد؟

پاسخ این سوالات:

در برخی مواد، اتم‌ها الکترون جفت نشده دارند. جفت نشده به این معنا است که بگوییم در هر اوربیتال ما دو الکترون جای میگیرند که مجموع اسپین آنها صفر است. حال اگر تعداد الکترونها به گونه ای باشد که در لایه آخر فقط یک الکترون وجود داشته باشد، آنگاه این اتم یک الکترون جفت نشده دارد و در نتیجه در کل اتم یک اسپین خواهد داشت. (پس در مواد پارامغناطیس هر اتم یک آهنربای کوچک است) در حالت عادی میانگین اسپین این اتم‌ها صفر خواهد بود. با اعمال میدان مغناطیسی این اتم‌ها جهت خاصی به خود می‌گیرند و در نتیجه ماده ما در کل دارای یک ممان مغناطیسی میشود که باعث بوجود آمدن نیرو بین آهنربا و میخ آهنی است.



فرض کنید N اتم داریم که اندازه اسپین آنها μ است و تمییزپذیرند. اندازه میدان خارجی را \vec{B} در نظر بگیرید. هم چنین در نظر بگیرید که اسپین هر اتم فقط می‌تواند هم جهت یا خلاف جهت میدان مغناطیسی باشد. (این فرض از کوانتوم میاد). انرژی برهم کنش یک آهنربا با میدان $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ است. الف) اگر انرژی سیستم E باشد، تعداد ذراتی که هم جهت و خلاف جهت با میدان هستند را بیابید. ب) $\Omega(E, N)$ را بیابید. ج) آنتروپی این سیستم را محاسبه کنید و با استفاده از تقریب استرلینگ آن را ساده کنید. د) انرژی این سیستم بر حسب دما و همچنین M کل این سیستم (ممان مغناطیسی کل) را بر حسب دما بیابید.

۲.۱ گاز واندروالس

در این سوال قصد داریم مشخصات گاز واندروالس را در آنسامبل میکروکانونیک بدست آوریم. الف) فرض کنید برهم کنش بین مولکولهای گاز کوتاه برد است. یعنی هر مولکول گاز فقط با مولکولهای که فاصله شان از آن از r_0 کمتر است برهم کنش میکند و انرژی این برهمکنش را $-u_0$ در نظر بگیرید. انرژی کل ناشی از این برهم کنش را برای یک گاز با N ذره و حجم V بیابید. ب) اگر شعاع هر ذره را a در نظر بگیریم، نشان دهید حجم در دسترس هر ذره $V' = V - N \frac{32\pi a^3}{3}$

است.
 ج) انرژی این سیستم مانند گاز ایده آل است فقط یک جمله اضافه تر خواهد داشت. $\Omega(E, N, V)$
 را بیابید.
 د) آنتروپی را محاسبه کنید.
 ه) معادله انرژی و معادله حالت این گاز را بدست آورید.

۲ کانونیک

۱.۲ گاز کامل

گازی با حجم V و شامل N ذره در نظر بگیرید. دمای این ظرف گاز T است.

- الف) تابع پارش را برای این سیستم بدست آورید.
 ب) انرژی میانگین این سیستم را محاسبه کنید.
 ج) آنتروپی و انرژی آزاد این سیستم را محاسبه کنید.

۲.۲ گاز فرانسبیتی

گازی در نظر بگیرید که میتوان از جرم سکون ذرات آن نسبت به تکانه ها صرف نظر کرد و انرژی آن ها را $c|\vec{p}|$ در نظر گرفت. برای این گاز که N ذره دارد و حجم آن V است و دمای T دارد:
 الف) تابع پارش را بیابید.

- ب) انرژی میانگین این سیستم را بدست آورید.
 ج) انرژی آزاد را محاسبه کنید و از روی آن معادله حالت این گاز را بیابید.

۳.۲ سیستم دو حالتی

یک سیستم با N ذره در نظر بگیرید که هر کدام از ذرات فقط میتوانند انرژی صفر یا Δ داشته باشند. اگر دمای این سیستم T باشد:

- الف) تابع پارش را برای این سیستم محاسبه کنید.
 ب) انرژی میانگین این سیستم را محاسبه کنید.

۳ هم ارزی آنسامبل ها

فهمیدیم که اگر ما دمای سیستم را بدانیم، احتمال اینکه سیستم انرژی E داشته باشد $\frac{\Omega(E)e^{-\beta E}}{Z}$ است. الف) در ترمودینامیک دیدیم که اگر دما و حجم سیستم مشخص باشد آنگاه سیستم به حالتی میرود که کمینه انرژی آزاد را داشته باشد. با استفاده از احتمال بالا نشان دهید که محتملترین حالت سیستم حالتی است که کمینه انرژی آزاد را دارد.

ب) انحراف معیار این توزیع احتمال را بیابید. $\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$

ج) نشان دهید در تعداد ذرات زیاد $\frac{\Delta E}{\langle E \rangle}$ به صفر میل میکند.

د) نشان دهید این احتمال در انرژی ای برابر با انرژی میانگین بیشینه میشود.

ه) با استفاده از ج و د نشان دهید دو آنسامبل هم ارز میشوند.