ارگودیک

تمرین امتیازی مربوط به دستیار آموزشی

مهلت تحویل تا انتهای آذر

۱ تعریف ارگودیک بودن

تعریف اول: در یک سیستم ارگودیک، مسیر تقریبا همه نقاط فضای فاز در نهایت به مقدار دلخواه، به هر نقطه دیگر روی سطح انرژی ثابت نزدیک خواهد شد.
بهتر است منظورمان را از تقریبا همه مشخص کنیم: یعنی اینکه میتوانند چنین نقاطی در فضای فاز وجود داشته باشند ، اما اندازه این مجموعه صفر خواهد بود.

۱.۱ اندازه صفر یعنی چی؟

تعریف ویکیپدیا برای اندازه: یک روش سیستماتیک عدد نسبت دادن به زیرمجموعه های یک مجموعه است.
پس اگر اندازه μ روی مجموعه S تعریف شده باشد و $E \subset S$ باشد:

۱. $\mu(E) \geq 0$

۲. $\mu(\Phi) = 0$

۳. اگر $[E_k]_{k=1}^{\infty}$ زیر مجموعه هایی از S باشند که اشتراکی ندارند ، داریم:
$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

- مساحت و طول و حجم ما دقیقا همین ویژگی ها را دارند.
- تابع اندازه برای هر زیر مجموعه ای تعریف میشود.یعنی مثلن در فضای سه بعدی میتوان پرسید اندازه یک خط چقدر است.

حالا فرض کنید تابع اندازه را مانند طول عادی روی بازه [۰،۱] مثل طول عادی تعریف کرده ایم. از شهودمان میدانیم که طول یک نقطه صفر است. پس اندازه تک نقطه را صفر در نظر بگیرید.
الف) نشان دهید اندازه مجموعه های زیر صفر است. $E_1 = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...], E_2 = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ...]$

- پس مجموعه های نامحدود عضو هم می توانند اندازه صفر داشته باشند.

ب) نشان دهید اندازه مجموعه اعداد گویا بین ۰و۱ هم صفر است. (کافیست ثابت کنید که شمارا است و با ویژگی ۳ آنگاه و اندازه تک نقطه بگویید صفر است)