

- این مجموعه تمرینات برای دست‌گرمی با ریاضیات ترمودینامیک است که در فصل‌های آینده از آن‌ها بهره خواهیم گرفت.
- پاسخ‌های خود را به شکل PDF درآورده و یکشنبه ۲۵ اسفند ماه بین ساعت ۲۱ الی ۲۴ شب به ایمیل زیر ارسال نمایید.

smhsksharifi@gmail.com

سوال اول (

فرض کنید Z یک تابع دو متغیره‌ای از X و Y می‌باشد به طوری که $Z = Z(X, Y)$. همچنین با حل این معادله می‌توانیم X را به صورت تابعی از Z و Y بدست آوریم $X = X(Z, Y)$. روابط زیر را ثابت کنید.

(الف)

$$\left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y = \frac{1}{\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y}$$

(ب)

$$\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X = -1$$

سوال دوم)

فرض کنید تابع $Z = Z(X, Y)$ در صفحه‌ی X و Y تعریف شده است. می‌خواهیم مقدار Z را با بسط تیلور حول نقطه‌ی (X_0, Y_0) در نقطه‌ی $(X_0 + \delta X, Y_0 + \delta Y)$ بدست آوریم. (همه‌ی محاسبات را تا مرتبه دوم از δX و δY انجام دهید)

الف) ابتدا با بسط تیلور Z را در نقطه‌ی $(X_0 + \delta X, Y_0)$ بدست آورید. سپس دوباره با بسط تیلور حول نقطه‌ی $(X_0 + \delta X, Y_0)$ مقدار Z را در $(X_0 + \delta X, Y_0 + \delta Y)$ حساب کنید.

ب) قسمت قبل را برای نقطه‌ی $(X_0, Y_0 + \delta Y)$ تکرار کرده و سپس Z را در $(X_0 + \delta X, Y_0 + \delta Y)$ بدست آورید.

ج) نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X}$$

سوال سوم)

A و B هر دو تابع متغیرهای x و y هستند و $\frac{A}{B} = C$. نشان دهید که:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_C = \frac{\left(\frac{\partial(\ln B)}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial(\ln A)}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial(\ln A)}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial(\ln B)}{\partial x}\right)_y}$$

سوال چهارم)

یک دماسنج گازی با حجم ثابت حاوی گازی است که با معادله حرکت:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

و دماسنج دیگری با همان ساختمان، حاوی گاز دیگری است که از قانون گاز ایده آل $pV_m = RT$ تبعیت می کند. این دو دماسنج در نقطه یخ و نقطه بخار مدرج شده اند. نشان دهید که این دو دماسنج در هر دمایی مقادیر مساوی نشان می دهند. (فرض کنید دماسنج ها طوری ساخته شده اند که تمامی گاز آنها در دمای مورد اندازه گیری است.)

سوال پنجم)

یک دماسنج گازی با حجم ثابت V_0 حاوی n مول از یک گاز است. فرض میکنیم که این گاز تابع قانون گاز کامل، یعنی $pV_m = RT$ است، اما در واقع رفتار آن توصیفی بهتر است که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

دماسنج در نقطه سه گان آب درجه بندی شده است. اندازه گیری های دمایی در T چه مقدار خطا خواهد داشت؟