

تمرینات سری سوم - درس ریاضی فیزیک پیشرفته

گروه های هموتوپی

موعده تحویل پاسخ ها: ۳۰ فروردین ۱۳۹۹ دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

درصد نمره از نمره نهایی: ۲ نمره از ۲۰ نمره

۱۶ فروردین ۱۳۹۹

سوال اول: گروه هموتوپی اول فضاهای زیر را بدست آورید: بطری کلاین - نوار موبیوس - صفحه پروژکتیو RP^2 و S^3 .
هم چنین گروه هموتوپی فضاهای زیر را بدست آورید:

$$T_g \oplus MobiusStrip, \quad T_g \oplus KleinBottle, \quad KleinBottle \oplus S^2$$

که در آن علامت $\oplus$ را برای نشان دادن جمع متصل connected sum دو فضا بکار برده ایم.

سوال دوم: الف: ثابت کنید که $R^2 - \{0\}$ با یک دایره از یک نوع هموتوپی هستند ولی این دو فضا باهم همریخت نیستند. اثبات شما می بایست دقیق باشد.

ب: ثابت کنید که یک دایره با یک استوانه بی نهایت بلند از یک نوع هموتوپی است.

ج- آیا دو فاصله $[0, 1]$ و $(0, 1)$ از یک نوع هموتوپی هستند؟

سوال سوم: این تمرین یک تمرین ساده در نظریه گروه است. اول نشان دهید که در جدول ضرب یک گروه یک سطر یا ستون نمی تواند یک عنصر تکراری داشته باشد. با استفاده از این خاصیت تمام گروه های متناهی با عناصر کمتر از ۶ عضو را مشخص کنید. نشان دهید که تمام این گروه ها آبلی هستند. با استفاده از قضیه اساسی در مورد گروه های آبلی نوع این گروه ها را (مثلا Z_3 یا $Z_2 \oplus Z_2$) و نظایر آن را مشخص کنید.

سوال چهارم: این تمرین برای فهم این که چرا گروه های هموتوپی با مرتبه بالاتر از یک آبلی هستند مفید است.

الف: تابع زیر را در نظر بگیرید: $f(x) = \sin(x) : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$, این تابع یک تابع پیوسته است که در نقاط مرزی دامنه اش صفر می شود. این تابع را به طور پیوسته به تابعی تبدیل کنید که در در بازه های $[0, 1/4]$ و $[3/4, 1]$ برابر با صفر باشد.

ب: تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in [0, \pi], \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

این تابع را به طور پیوسته به تابع زیر تبدیل کنید. یعنی یک هموتوپی بین آنها پیدا کنید:

$$g : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1], \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi], \\ -\sin(x) & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

سوال پنجم: نشان دهید که هر گاه X یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد همواره با $X \times R$ از یک نوع هموتوپی است.

سوال ششم: گروه هموتوپی بطری کلاین را در نظر بگیرید. با بازتعریف مولدهای این گروه نشان دهید که می توان این گروه را به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\pi_1(Klein) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\alpha^2 = \beta^2}. \quad (۱)$$

معنای این رابطه این است که این گروه توسط مولدهای α و β تولید می شود و بین این مولدها رابطه $\alpha^2 = \beta^2$ برقرار است. با استفاده از این نشان دهید که یک عنصر کلی این گروه را می توان به شکل زیر نوشت:

$$g = \alpha^{n_1} \beta^{\pm 1} \alpha^{n_2} \beta^{\pm 1} \alpha^{n_3} \beta^{\pm 1} \dots a^{\nu_k}, \quad n_i \in Z. \quad (۲)$$

لطفاً به نکات زیر توجه کنید.

یک : استدلال های خود را به صورت کاملاً مرتب و منظم، بدون خط خوردگی و به صورت روشن همراه با جملات رابط فارسی بنویسید. یک مجموعه از روابط ریاضی پشت سرهم بدون آنکه ارتباط آن ها را با هم روشن کرده باشید استدلال محسوب نمی شود. به یاد داشته باشید که روشن کردن مفهوم و خط سیر استدلال وظیفه نویسنده است نه خواننده.

دو - روابط ریاضی خود را روی برگه به شکل منسجم همراه با متن فارسی خوب بنویسید، آن ها روی صفحه کاغذ نریزید. .

سه: سوال های خود را پشت سر هم بنویسید. به سوال هایی که بدون ترتیب و با آدرس دهی به صفحات دیگر نوشته شده باشند ترتیب اثر داده نخواهد شد.

چهار: از هر سری تمرین تنها تعدادی از آنها به صورت تصادفی انتخاب شده و نمره نهایی نیز توسط این سوال ها تعیین خواهد شد.