

تمرین های درس ریاضی فیزیک پیشرفته

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

نیمسال اول ۹۸-۹۹ (نیمسال کرونایی)

۱۷ اسفند ۱۳۹۸

■ منبع اصلی درس ریاضی فیزیک پیشرفته، کتاب ناکاهاراست. شروع به خواندن فصل دوم کنید. اما برای حل تمرین ها گاهی ممکن است مجبور شوید به مراجع دیگر نیز نگاه کنید. در هر عصر یکشنبه و سه شنبه همین فایل به روز می شود و تمرین های جدیدی به انتهای آن اضافه می شود. امتحان نهایی از همین تمرین ها گرفته خواهد شد.

سوال اول: الف: کلاس های تزویجی گروه های S_3 و S_4 را پیدا کنید.

سوال دوم: V و W دو فضای برداری ضرب داخلی هستند و T یک نگاشت خطی است:

$$T : V \longrightarrow W, \quad T^\dagger : W \longrightarrow V \quad (۱)$$

قضیه زیر را ثابت کنید:

$$\dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\text{Ker}(T^\dagger)) = \dim(V) - \dim(W). \quad (۲)$$

سوال سوم: با مطالعه تبدیلات بی نهایت کوچک گروه های زیر تعداد پارامترهای آنها را تعیین کنید:

(۳)

$$O(n), \quad SO(n), \quad U(n), \quad SU(n), \quad GL(n, R), \quad GL(n, C), \quad SL(n, R), \quad SL(n, C).$$

سوال چهارم: بردارهای سه بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{a} := (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3). \quad (۴)$$

نشان دهید که حجم متوازی السطوحی که این بردارها سه ضلع آن را تشکیل می دهند برابر است با:

$$V = \det \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ c_1, c_2, c_3 \end{pmatrix}. \quad (۵)$$

نتیجه خود را به متوازی السطوح های n بعدی تعمیم دهید و توضیح دهید که چرا رابطه ای که پیشنهاد می کنید صحیح است.

سوال پنجم: (M, d) یک فضای متریک است. نشان دهید که یک زیر مجموعه $A \subset M$ یک زیر مجموعه بسته است اگر و فقط اگر $\bar{A} = A$.

ادامه دارد.....