

تمرینات سری چهارم - درس ریاضی فیزیک پیشرفته

خمینه ها - قسمت اول

موعد تحویل پاسخ ها: هشتم اردیبهشت ماه ۱۳۹۳

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

درصد نمره از نمره نهایی: ۴ نمره از ۲۰ نمره

۱۷ فروردین ۱۳۹۳

سوال اول: در فضای R^n شار زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha(t) : \mathbf{x} \longrightarrow t\mathbf{x}. \quad (1)$$

میدان برداری وابسته به این شار را پیدا کنید.

سوال دوم: در فضای R^2 با مختصات موضعی (x, y) میدان های برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} \quad (2)$$

الف: شار های مربوط به این میدان های برداری را حساب کنید.

ب: جابجاگرهای میدان های برداری فوق را حساب کنید.

پ: مشتقات لی زیر را حساب کنید:

$$\mathcal{L}_X Y, \quad \mathcal{L}_X Z, \quad \mathcal{L}_Y Z. \quad (3)$$

سوال سوم: در صفحه R^2 نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$R_\theta : (x^1, x^2) \longrightarrow (x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta, -x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta). \quad (4)$$

تحت این نگاشت حساب کنید که بردار $X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ به چه برداری تبدیل می شود. از نظر شهودی رابطه بردار جدیدی که بدست آمده با بردار اولیه چیست؟

همین سوال را برای یک فرم دیفرانسیل نیز پاسخ دهید.

سوال چهارم: در فضای سه بعدی دکارتی تانسور زیر تعریف شده است:

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \quad (5)$$

تحت نگاشت

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (6)$$

بدست آورید که تانسور فوق چگونه تبدیل می شود. به عبارت دیگر *pullback* تانسور g را بدست آورید.

این کار را برای فرم دیفرانسیل زیر نیز انجام دهید:

$$\omega = dx \wedge dy \wedge dz. \quad (۷)$$

سوال پنجم. در فضای R^3 میدان های برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$L_x = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \quad (۸)$$

الف - نشان دهید که این سه میدان برداری تحت جابجا گر یک جبر بسته تشکیل می دهند. شار مربوط به هر میدان برداری را بدست آورید. نتیجه را از نظر شهودی تعبیر کنید.

ب- به میدان های قسمت قبل میدان های زیر را اضافه کنید:

$$P_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad (۹)$$

نشان دهید که مجموعه میدان های L_i و P_j تحت جابجا گر تشکیل یک جبر بسته می دهند.

سوال ششم : روابط زیر را که برای میدان های برداری و مشتق لی ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX}Y &= f[X, Y] - Y[f]X, \\ \mathcal{L}_X(fY) &= f[X, Y] + X[f]Y. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در این روابط X و Y میدان های برداری روی یک خمینه M و f یک تابع مشتق پذیر حقیقی از M به سوی اعداد حقیقی است.

$$\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]. \quad (11)$$

در این رابطه ϕ یک تابع از یک خمینه M به سوی یک خمینه N است.